RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO
ALBERTO BRESSAN

**Sulla assoluta continuità di una variabile aleatoria la cui densità è limite di una successione di densità costanti a tratti**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 60 (1978), p. 237-255
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__60__237_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 60 (1978)

# Sulla assoluta continuità di una variabile aleatoria la cui densità è limite di una successione di densità costanti a tratti.

MARIO VOLPATO - ALBERTO BRESSAN (*)

RIASSUNTO - Si dimostra dapprima che una funzione crescente è derivabile in un punto se e solo se converge una opportuna successione di suoi rapporti incrementali relativi a quel punto. Se ne deduce un primo criterio sufficiente per l'assoluta continuità di una variabile aleatoria e per la determinazione della variabile stessa. La condizione viene ampliata in un criterio successivo ed infine utilizzata per indicare condizioni sufficienti affinchè esista una ed una sola variabile aleatoria assolutamente continua la cui densità coincida quasi ovunque col limite di una assegnata successione di densità costanti a tratti, interpretabili quindi come espressioni analitiche del profilo superiore di istogrammi statistici a colonne. Tra le possibili applicazioni è indicata, a titolo di esempio, l'acquisizione della variabile beta (per la cui funzione di ripartizione viene anche evidenziata una nota espressione, alquanto semplice) e la convergenza alla normale dello scarto ridotto della bernoulliana senza l'ipotesi che tale scarto debba essere fisso col divergere del numero delle prove. La versione definitiva dei teoremi e la loro dimostrazione sono di Alberto Bressan, che in tal modo ha notevolmente allargato le ipotesi e semplificato la dimostrazione di precedenti risultati esposti da Mario Volpato nel corso di lezioni di Calcolo delle Probabilità all'Università di Padova.

## I. Sulla derivabilità locale di una funzione crescente.

### 1.1. *Premesse ed enunciato del teorema di derivazione.*

Consideriamo una funzione reale $F$ crescente in senso lato, definita in un intervallo $\Omega = \{x \in \mathbf{R}: a \leqslant x \leqslant b\}$, con $a$ e $b$ numeri reali,

(*) Indirizzo degli AA.: Seminario Matematico Università - via Belzoni, 7 - 35100 Padova.

oppure anche $a = -\infty$, $b = +\infty$. Per ogni intero $n \geqslant 1$, definiamo in $\Omega$ una famiglia di punti $\{x_{i,n}\}$, $i \in I$, equidistanti ciascuno dal successivo, ponendo:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
&x_{i,n} = a + i\,\frac{b-a}{n}\,, && i \in I = \{0, 1, \ldots, n\}\,, \quad \text{se } \Omega \text{ è limitato}\,,\\
&x_{i,n} = a + i\,\frac{\sigma}{n}\,, && i \in I = \{0, 1, 2, \ldots\}\,,\\
& && \qquad\qquad \text{se } a \in \mathbb{R},\ b = +\infty\,,\\
&x_{i,n} = b + i\,\frac{\sigma}{n}\,, && i \in I = \{0, -1, -2, \ldots\}\,,\\
& && \qquad\qquad \text{se } b \in \mathbb{R},\ a = -\infty\,,\\
&x_{i,n} = i\,\frac{\sigma}{n}\,, && i \in I = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}\,,\\
& && \qquad\qquad \text{se } a = -\infty,\ b = +\infty\,,
\end{aligned}
$$

ove $\sigma$ è un qualsiasi numero reale positivo prefissato, indipendente da $i$ e da $n$.

Una siffatta famiglia di punti definisce una coppia di partizioni $D_n$ e $D'_n$ di $\Omega$ in intervalli disgiunti di uguale ampiezza, potento scegliere tali intervalli semiaperti a destra, oppure semiaperti a sinistra, e porre:

$$
(2) \qquad D_n = \{T_{i,n}\}\,, \quad i \in I\,, \qquad D'_n = \{T'_{i,n}\}\,, \quad i \in I\,,
$$

con:

$$
(3) \qquad T_{i,n} = \{x \in \Omega\colon x_{i-1,n} < x \leqslant x_{i,n}\}\,, \qquad T'_{i,n} = \{x \in \Omega\colon x_{i-1,n} \leqslant x < x_{i,n}\}\,,
$$

per ogni $i$, $n$ per cui risultino definiti in $\Omega$ i punti $x_{i-1,n}$ e $x_{i,n}$.

Fissato un $x \in \Omega$, indicheremo con $T_n(x)$ $\big($risp. $T'_n(x)\big)$ quell'intervallo, dell'$n$-esima partizione $D_n$ $(D'_n)$ che contiene $x$.

Dato un intero positivo $n$, definiamo su $\Omega$ due funzioni a gradini

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{\Delta F\big(T_n(x)\big)}{\text{mis. } T_n(x)} = \frac{F(x_{i,n}) - F(x_{i-1,n})}{x_{i,n} - x_{i-1,n}}\,, && \text{se } x \in T_{i,n}\\
g_n(x) &= \frac{\Delta F\big(T'_n(x)\big)}{\text{mis. } T'_n(x)} = \frac{F(x_{i,n}) - F(x_{i-1,n})}{x_{i,n} - x_{i-1,n}}\,, && \text{se } x \in T'_{i,n}
\end{aligned}
$$

Se quindi $x$ è un punto interno ad un intervallo della equipartizione $D_n$, $f_n$ e $g_n$ assegnano entrambe ad $x$ il rapporto incrementale della $F$ relativo a quel tratto; se invece $x = x_{i,n}$ per qualche $i \in I$, la $f_n$ assegna ad $x$ il rapporto incrementale della $F$ nell'intervallo a sinistra di $x$, la $g_n$ quello dell'intervallo a destra.

Con queste premesse, il teorema di Volpato si può enunciare nel modo seguente:

TEOREMA 1. *La funzione $F$ è derivabile in un fissato punto $x$ interno ad $\Omega$ se e soltanto se le due successioni $f_n$ e $g_n$ sono ivi convergenti verso un comune valore $\lambda$, nel qual caso risulta:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lambda = F'(x)\,. \tag{5}$$

### 1.2. *Alcuni lemmi.*

Premettiamo alla dimostrazione del Teorema 1 i due lemmi seguenti:

LEMMA 1. *Sia $F$ una funzione reale crescente in senso lato in un intervallo $\Omega$, e $x$ un punto di $\Omega$. Sia $(x_n)_{n\geqslant 1}$ una successione crescente (risp. decrescente) di punti di $\Omega$, tendente a $x$, tale che:*

$$a) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{F(x)-F(x_n)}{x-x_n} = \lambda\,,$$

$$b) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x-x_n}{x-x_{n+1}} = 1\,.$$

*In tal caso $F$ ammette derivata sinistra (risp. destra) in $x$, precisamente: $F'(x-) = \lambda$ $\big($risp. $F'(x+) = \lambda\big)$.*

DIM. Trattiamo il caso di $(x_n)_{n\geqslant 1}$ crescente, essendo l'altro caso perfettamente analogo. Per ogni $h > 0$ definiamo $n^* = n(h)$ il più grande intero $n$ tale che $x_n \leqslant x - h$. Valgono allora le seguenti relazioni:

$$\frac{x-x_{n^*+1}}{x-x_{n^*}}\cdot\frac{F(x)-F(x_{n^*+1})}{x-x_{n^*+1}} = \frac{F(x)-F(x_{n^*+1})}{x-x_{n^*}} \leqslant \frac{F(x)-F(x-h)}{h} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{F(x)-F(x_{n^*})}{x-x_{n^*+1}} = \frac{F(x)-F(x_{n^*})}{x-x_{n^*}}\cdot\frac{x-x_{n^*}}{x-x_{n^*+1}}\,. \tag{6}$$

Facendo tendere $h$ a zero, chiaramente $n^*$ tende a $+\infty$, e le espressioni (6) tendono tutte a $\lambda$, in virtù di $a$) e $b$). Quindi

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(x)-F(x-h)}{h} = \lambda .$$

LEMMA 2. *Sia $F$ funzione reale crescente in senso lato in $\Omega$, $x$ punto interno di $\Omega$. Per ogni $\varepsilon>0$ esistano due successioni di intervalli chiusi $[y_n, z_n]$ e $[y'_n, z'_n]$, $n=1,2,\ldots$, contenenti $x$, tali che, posto $d_n = z_n - y_n > 0$, $d'_n = z'_n - y'_n > 0$, si abbia:*

$a$) $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} d'_n = 0$ ,

$b$) $\forall n \geqslant 1$ , $\quad x - y_n \leqslant \varepsilon(z_n - y_n)$ , $\quad x - y'_n \geqslant (1-\varepsilon)(z'_n - y'_n)$ ,

$c$) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d_n}{d_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d'_n}{d'_{n+1}} = 1$ ,

$d$) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(z_n)-F(y_n)}{d_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(z'_n)-F(y'_n)}{d'_n} = \lambda$ .

*Allora $F$ è derivabile in $x$ e risulta: $F'(x) = \lambda$.*

DIM. Scegliamo un $\varepsilon > 0$. Per ogni $h>0$ diciamo $n^* = n(h)$ il più grande intero $n$ tale che $h \leqslant (1-\varepsilon)d_n$.

Da $b$) sappiamo allora che l'intervallo $[y_{n^*}, z_{n^*}]$ contiene l'intervallo $[x, x+h]$. Otteniamo quindi le disuguaglianze:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant \frac{F(z_{n^*})-F(y_{n^*})}{h} \leqslant \frac{F(z_{n^*})-F(y_{n^*})}{(1-\varepsilon)\,d_{n^*}} \cdot \frac{d_{n^*}}{d_{n^*+1}} . \tag{7}$$

Passando al limite, per $h\to 0$ otteniamo che $\lim\limits_{h\to 0} n^* = +\infty$ e quindi

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant \frac{\lambda}{1-\varepsilon} . \tag{8}$$

Con lo stesso procedimento si dimostra che

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{F(x)-F(x-h)}{h} \leqslant \frac{\lambda}{1-\varepsilon} . \tag{9}$$

Osserviamo ora che, posto $\nu^* = \nu(h) =$ minimo intero $n$ tale che $d_n \leqslant h$, sarà certamente $z_{\nu^*} \leqslant x + h$. Valgono quindi le relazioni:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geqslant \frac{F(z_{\nu^*}) - F(x)}{d_{\nu^*-1}} = \tag{10}$$
$$= \left[\frac{F(z_{\nu^*}) - F(y_{\nu^*})}{d_{\nu^*}} - \frac{F(x) - F(y_{\nu^*})}{d_{\nu^*}}\right] \cdot \frac{d_{\nu^*}}{d_{\nu^*-1}}.$$

Facendo tendere $h$ a zero, $\nu^*$ tende a $+\infty$, e da (10) si ottiene

$$\liminf_{h\to 0+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geqslant \lambda - \limsup_{h\to 0+} \frac{F(x) - F(y_{\nu^*})}{d_{\nu^*}} \geqslant \lambda - \frac{\varepsilon\lambda}{1-\varepsilon}. \tag{11}$$

Con lo stesso procedimento si dimostra che:

$$\liminf_{h\to 0+} \frac{F(x) - F(x-h)}{h} \geqslant \lambda - \frac{\varepsilon\lambda}{1-\varepsilon}. \tag{12}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, da (8), (9), (11) e (12) si conclude che

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lambda. \tag{13}$$

1.3. *Dimostrazione del Teorema* 1.

Sia $\Omega$ un intervallo limitato, $x$ interno ad $\Omega$.

Caso I. Se il rapporto $(x - a)/(b - a)$ è razionale, lo possiamo scrivere nella forma $p/q$, con $p$ e $q$ interi primi fra loro. Le ipotesi comportano che le successioni $f_{nq}(x)$ e $g_{nq}(x)$, per $n$ tendente a $+\infty$, convergono entrambe verso $\lambda$. Poichè risulta:

$$\begin{aligned} f_{nq}(x) &= \frac{F(x) - F(x_n)}{x - x_n} \qquad \text{con } x_n = x - \frac{b-a}{nq}, \\ g_{nq}(x) &= \frac{F(x'_n) - F(x)}{x'_n - x} \qquad \text{con } x'_n = x + \frac{b-a}{nq}, \end{aligned} \tag{14}$$

le ipotesi del Lemma 1 sono chiaramente soddisfatte. Le derivate destra e sinistra di $F$ in $x$ dunque esistono e valgono entrambe $\lambda$, da cui la conclusione.

Caso II. Supponiamo ora che il rapporto $(x-a)/(b-a) \overset{\text{def}}{=} \alpha$ sia irrazionale. Chiaramente $0<\alpha<1$. È noto che la successione $n\alpha-[n\alpha]$, $n=1, 2, \ldots$ è densa nell'intervallo $[0, 1]$ $\big([n\cdot\alpha]=$ massimo intero non superiore a $n\alpha\big)$ (1). Per ogni $\varepsilon>0$ esistono quindi $M_1$, $M_2$ tali che valgano le

$$0 \leqslant M_1\alpha-[M_1\alpha]<\varepsilon/2\ , \qquad 1-\varepsilon/2 \leqslant M_2\alpha-[M_2\alpha]<1\ . \tag{15}$$

Costruiamo due successioni crescenti di interi $(n_k)$ e $(n_k')$, $k=1, 2, \ldots$ ponendo:

$$\begin{aligned} &n_1 = M_1 \\ &n_{k+1} = \begin{cases} n_k + M_1\ , & \text{se } n_k\alpha-[n_k\alpha]<\varepsilon/2 \\ n_k + M_2\ , & \text{se } n_k\alpha-[n_k\alpha]\geqslant\varepsilon/2 \end{cases} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &n_1' = M_2 \\ &n_{k+1}' = \begin{cases} n_k' + M_1\ , & \text{se } n_k'\alpha-[n_k'\alpha]<1-\varepsilon/2 \\ n_k' + M_2\ , & \text{se } n_k'\alpha-[n_k'\alpha]\geqslant 1-\varepsilon/2\ . \end{cases} \end{aligned} \tag{17}$$

Dalla definizione discende immediatamente che:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{n_{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{n_k'}{n_{k+1}'}=1 \tag{18}$$

e che, per ogni intero $k\geqslant 1$:

$$0 \leqslant n_k\alpha-[n_k\alpha]<\varepsilon\ , \qquad 1-\varepsilon \leqslant n_k'\alpha-[n_k'\alpha]<1\ . \tag{19}$$

Le ipotesi del teorema comportano che

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k'}(x) = \lambda\ . \tag{20}$$

Per definizione $f_m(x)=\big(F(z_m)-F(y_m)\big)/(z_m-y_m)$, ove si sia posto:

$$y_m = a + \frac{b-a}{m}[m\alpha]\ , \qquad z_m = a+\frac{b-a}{m}\big([m\alpha]+1\big)\ . \tag{21}$$

(1) Vedi [7], pag. 10.

È evidente ora che le successioni di intervalli $[y_{n_k}, z_{n_k}]$ e $[y_{n'_k}, z_{n'_k}]$, $k = 1, 2, \dots$, soddisfano alle ipotesi del Lemma 2. Verifichiamo ad esempio la prima delle $b$). Per ogni $k \geqslant 1$ risulta:

$$(22) \qquad x - y_{n_k} = a + \alpha(b-a) - \left[a + \frac{[n_k \cdot \alpha] \cdot (b-a)}{n_k}\right] =$$

$$= \frac{n_k \alpha - [n_k \alpha]}{n_k} (b-a) \leqslant \varepsilon \frac{b-a}{n_k} = \varepsilon\,(z_{n_k} - y_{n_k}) .$$

Applicando il Lemma 2 si ottiene immediatamente, anche in questo II caso, la conclusione desiderata.

Supponiamo ora che $\Omega$ sia illimitato: $\Omega = \mathbb{R}$ oppure $\Omega = \{x\colon x \geqslant 0\}$ (i casi in cui $\Omega = \{x\colon x \geqslant a\}$ oppure $\Omega = \{x\colon x \leqslant b\}$ sono perfettamente analoghi). Se $x = (p/q)\cdot\sigma$, con $p$, $q$ interi primi fra loro, il teorema si dimostra ripetendo esattamente i ragionamenti fatti nel I caso. Se $x = \alpha\sigma$, con $\alpha$ irrazionale, $x$ è interno ad un intervallo $\Omega' = \{z \in \mathbb{R}\colon m\sigma \leqslant z \leqslant (m+1)\sigma\}$, per un opportuno intero $m$. In questo caso basta considerare $\Omega'$ come intervallo di base e ripetere pari pari la dimostrazione fatta al punto II.

## 2. Sulla assoluta continuità di una variabile aleatoria e sulla determinazione della sua densità.

2.1. *Un primo criterio.*

È appena il caso di ricordare che se una funzione di ripartizione di una variabile aleatoria $\xi$ è ovunque derivabile, attesa la sommabilità di tale derivata, essa è anche assolutamente continua (2). Questo fatto, insieme con il Teorema 1, porge immediatamente un primo criterio per l'assoluta continuità di una variabile aleatoria e per la determinazione della densità della stessa utile, in quei casi ove sia calcolabile la probabilità distribuita dalla variabile sui soli tratti parziali $\{T_{i,n}\}$, $\{T'_{i,n}\}$ di una successione di equipartizioni del tipo (2).

Supposto dunque di conoscere le probabilità $P(T_{i,n})$, $P(T'_{i,n})$ assegnate da una variabile aleatoria $\xi$ ai tratti $T_n(x)$, $T'_n(x)$, ecco il

CRITERIO I. *Sia $\xi$ una variabile aleatoria reale, $\{D_n\}$, $\{D'_n\}$, $n \geqslant 1$, due successioni di equipartizioni di un intervallo aperto $\Omega$ (eventualmente*

(2) Vedi ad es. [6], pagg. 168-169.

*illimitato) in tratti parziali* $T_{i,n}$ *e* $T'_{i,n}$ *definiti da* (2), (3). *Se per ogni* $x \in \Omega$ *per* $n \to +\infty$ *le due successioni*

$$\left\{\frac{P(T_n(x))}{\text{mis}\, T_n(x)}\right\} \quad e \quad \left\{\frac{P(T'_n(x))}{\text{mis}\, T'_n(x)}\right\}$$

*convergono verso un medesimo limite* $f(x)$, *allora la variabile aleatoria* $\xi$ *è assolutamente continua in* $\Omega$, *con densità uguale ad* $f$. *Se per di più è nulla la probabilità che* $\xi$ *assuma valori esterni ad* $\Omega$, *allora la* $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ *è la funzione di ripartizione della variabile* $\xi$.

2.2. *Estensione del primo criterio.*

Presentiamo ora alcuni risultati di carattere più generale, nell'ambito della teoria dell'integrazione di Lebesgue.

Sia $\mu$ una misura positiva di massa unitaria (quindi una probabilità) sulla retta reale, $F$ la relativa funzione di ripartizione:

$$F(x) = \mu(-\infty, x] = \text{prob}\,\{\xi \leqslant x\}\,. \tag{23}$$

Decomponiamo $\mu$ in una somma $\mu = \mu_1 + \mu_2$, con $\mu_1$ assolutamente continua (rispetto alla misura di Lebesgue) e $\mu_2$ singolare (cioè: esiste un insieme $N$ la cui misura di Lebesgue è nulla, tale che $\mu_2(\mathbf{R} - N) = 0$).

Dette $F_1$, $F_2$ le funzioni di ripartizione di $\mu_1$ e $\mu_2$ rispettivamente, si ha ovviamente $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Inoltre $F_1$ e $F_2$ sono entrambe crescenti in senso lato e risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} F(x) &= \lim_{x\to-\infty} F_1(x) = \lim_{x\to-\infty} F_2(x) = 0\,, \\ \lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty} F_1(x) + \lim_{x\to+\infty} F_2(x) = 1\,, \end{aligned} \tag{24}$$

È inoltre noto [3] che la derivata $F'(x)$ esiste quasi ovunque e coincide con la derivata di $F_1$ (q.o.), mentre $F'_2(x) = 0$ (q.o.). Da questo e dall'assoluta continuità della $F_1$ segue che

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)\, dt\,. \tag{25}$$

(3) Vedi ad es. [6].

In particolare quindi $F'$ è una funzione non negativa, integrabile su tutto l'asse reale.

OSSERVAZIONE 1. – Se nella decomposizione suddetta risultasse:

$$\lim_{x\to+\infty} F_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} F'(t)\,dt = 1\,, \tag{26}$$

si potrebbe concludere immediatamente che $F = F_1$: infatti

$$\lim_{x\to+\infty} F_2(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(F(x) - F_1(x)\big) = 0\,, \tag{27}$$

quindi $F_2(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Possiamo dunque formulare il seguente

CRITERIO II. *Sia $F$ una funzione di ripartizione di una variabile aleatoria reale. Sia $\{D_n\}$, $n \geqslant 1$, una successione di partizioni di* $\mathbf{R}$ *in intervalli disgiunti $T_{i,n}$, non degeneri, tale che, detta $\sigma_n$ la massima ampiezza degli intervalli dell'n-esima partizione, si abbia*: $\lim\limits_{x\to\infty} \sigma_n = 0$ [4].

*Per ogni intero $n \geqslant 1$, $x \in \mathbf{R}$ si definisca $f_n(x) = \Delta F(T_{i,n})/\mathrm{mis}\,(T_{i,n})$ se $x \in T_{i,n}$ (ossia: $f_n(x)$ è il rapporto incrementale della $F$ relativo a quell'intervallo, dell'n-esima partizione, che contiene $x$).*

*La successione $f_n(x)$ converge allora verso una $f(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$; la $f$ così definita risulta integrabile su tutto* $\mathbf{R}$. *Se inoltre*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1\,, \tag{28}$$

*la $F$ è assolutamente continua, e risulta*:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,. \tag{29}$$

La giustificazione del precedente Criterio è pressochè immediata.

[4] È appena il caso di avvertire che la classe delle partizioni qui considerate è ben più ampia di quella del precedente T.1.

Atteso il fatto che $F$ è differenziabile quasi ovunque, in ogni punto $x$ in cui $F'(x)$ esiste, esiste anche il $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ e tale limite vale proprio $F'(x)$. È quindi perfettamente definita la funzione $F_1$:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,,$$

perchè i punti in cui la $f$ non è definita, oppure non coincide con la $F'$, formano un insieme di misura nulla.

L'ipotesi (28), in virtù dell'Osservazione 1, comporta ora che $F_1 = F$.

2.3. *Esistenza e densità di una distribuzione di probabilità assolutamente continua compatibile con una successione di istogrammi statistici.*

CRITERIO III. *Sia $\{D_n\}$, $n \geqslant 1$, una successione di partizioni di $\mathbb{R}$ con le proprietà enunciate nel Crit. II. Sia $\{f_n\}$, $n \geqslant 1$, una successione di funzioni non negative, con $f_n$ costante su ogni intervallo di $D_n$; valga*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1\,, \qquad \text{per ogni } n \geqslant 1\,. \tag{30}$$

*Esista il $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)$, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$, e risulti:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1\,. \tag{31}$$

*Esiste allora una ed una sola distribuzione di probabilità $\mu$, assolutamente continua, avente $f$ come funzione di densità, compatibile con la successione $\{f_n\}$, nel senso che ha la proprietà:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(f_n(x) - \frac{\mu(T_n(x))}{\text{mis. } T_n(x)}\right) = 0\,, \qquad \text{per quasi ogni } x \in \mathbb{R}\,, \tag{32}$$

*ove $T_n(x)$ indica, come in precedenza, l'intervallo, dell'n-esima partizione, che contiene $x$.*

DIM. Si ponga $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Chiaramente $F$ è non decrescente, perchè $f(t) \geqslant 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Inoltre, dalla (31) segue:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 , \tag{33}$$

quindi $F$ è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria assolutamente continua. Per il Crit. II, la successione

$$\frac{\mu(T_n(x))}{\text{mis. } T_n(x)} = \frac{\Delta F(T_n(x))}{\text{mis. } T_n(x)} \tag{34}$$

converge q.o. verso la derivata $F'(x)$. Poichè

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} F'(t)\,dt , \tag{35}$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$ otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{x} (f(t) - F'(t))\,dt = 0 , \tag{36}$$

dunque $f = F'$ q.o..

Dalle definizioni di $f$ e $F'$ segue allora:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta F(T_n(x))}{\text{mis. } T_n(x)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\mu(T_n(x))}{\text{mis. } T_n(x)} , \tag{37}$$

per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$.

Si supponga ora che esista una seconda misura $\hat{\mu}$ per cui valga la (32). Diciamo $\hat{F}$ la sua funzione di ripartizione. Decomponiamo $\hat{F}$ in $\hat{F}_1 + \hat{F}_2$, con $\hat{F}_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \hat{F}'(t)\,dt$, $\hat{F}_2'(x) = 0$ q.o.

Le ipotesi comportano ora che $\hat{F}'(x) = f(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$, quindi

$$\hat{F}_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(x) , \tag{38}$$

mentre, per l'Osservazione 1, $\hat{F}_2(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque $F = \hat{F}$, il che dimostra l'unicità della $\mu$.

Si osservi che il grafico di ciascuna delle funzioni $f_n$ qui considerate può interpretarsi come profilo superiore di un istogramma statistico a colonne. Il Criterio III stabilisce dunque delle condizioni sufficienti affinchè una successione di istogrammi statistici possa pensarsi generata da una medesima distribuzione di probabilità (compatibile con la successione), e, nel caso positivo, indica il modo per determinare la funzione di densità di tale distribuzione.

OSSERVAZIONE 2. Se $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ coincide q.o. con una funzione $\hat{f}$, continua in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, la $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \hat{f}(t)\, dt$ è allora differenziabile in ogni punto di $\Omega$, e risulta:

$$F'(x) = \hat{f}(x)\,, \qquad (\forall x \in \Omega)\,. \tag{39}$$

## 3. Applicazioni.

A titolo di esempio, mostreremo un'applicazione del primo criterio ed una del terzo.

### 3.1. *Legge Beta.*

Si supponga di poter estrarre da un'urna un numero reale $y$ distribuito con probabilità uniforme sull'intervallo $\Omega = [0, 1]$.

Si eseguano $\nu$ estrazioni bernoulliane e, ordinati i numeri estratti in maniera crescente, si consideri esito (incerto) dell'esperimento il numero $\xi$ che, nella successione, occupa il posto $r$-esimo $(1 \leqslant r \leqslant \nu)$.

Per ogni intero $n \geqslant 1$, consideriamo una partizione $D_n$ dell'asse reale in intervalli $T_{i,n}$ di uguale ampiezza, ponendo:

$$T_{i,n} = \left\{x \in \mathbb{R}\colon \frac{i-1}{n} < \xi \leqslant \frac{i}{n}\right\}, \qquad (i \text{ intero qualsiasi})\,. \tag{40}$$

Per ricavare la densità di distribuzione della variabile aleatoria cominciamo a determinare la probabilità che $\xi$ appartenga ad uno degli intervalli della equipartizione $D_n$.

È chiaro intanto che, se $i \leqslant 0$ oppure $i > n$, $P(\xi \in T_{i,n}) = 0$, perchè la $\xi$ assume soltanto valori appartenenti all'intervallo $[0, 1]$. Se $0 < i \leqslant n$, consideriamo i tre insiemi disgiunti:

$$
(41) \qquad
\begin{aligned}
A_1 &= \left\{x \in \mathbb{R} \colon 0 < x \leqslant \frac{i-1}{n}\right\}, \\
A_2 &= \left\{x \in \mathbb{R} \colon \frac{i-1}{n} < x \leqslant \frac{i}{n}\right\} = T_{i,n}\,, \\
A_3 &= \left\{x \in \mathbb{R} \colon \frac{i}{n} < y \leqslant 1\right\}.
\end{aligned}
$$

Ricordando che l'uniforme distribuzione di $y$ su $\Omega$ porge:

$$
(42) \qquad P(y \in A_1) = \frac{i-1}{n}\,, \qquad P(y \in A_2) = \frac{1}{n}\,, \qquad P(y \in A_3) = 1 - \frac{i}{n}\,,
$$

osserviamo che, dati $u$, $v$, $w$, interi non negativi di somma $\nu$, la probabilità che nel campione di taglia $\nu$ estratto dall'urna vi siano:

$$
(43) \qquad
\left\{
\begin{array}{ll}
u \text{ elementi appartenenti ad } A_1 & (\stackrel{\text{def}}{=} \text{evento } A_{1,u})\,, \\
v \text{ elementi appartenenti ad } A_2 & (\stackrel{\text{def}}{=} \text{evento } A_{2,v})\,, \\
w \text{ elementi appartenenti ad } A_3 & (\stackrel{\text{def}}{=} \text{evento } A_{3,w})\,,
\end{array}
\right.
$$

è data dall'espressione:

$$
(44) \qquad P(A_{1,u} \cap A_{2,v} \cap A_{3,w}) = \frac{\nu!}{u!v!w!} \left(\frac{i-1}{n}\right)^u \left(\frac{1}{n}\right)^v \left(1 - \frac{i}{n}\right)^w
$$

Osserviamo ancora che il simultaneo successo dei tre eventi $A_{1,u}$, $A_{2,v}$ e $A_{3,w}$ comporta l'evento $\xi \in T_{i,n}$ se e solo se gli interi $u$, $v$, $w$, soddisfano le relazioni

$$
(45) \qquad
\left\{
\begin{array}{l}
0 \leqslant u \leqslant r-1\,, \\
0 \leqslant w \leqslant \nu - r\,, \\
u + v + w = \nu\,.
\end{array}
\right.
$$

Detto allora $T$ l'insieme delle terne intere $(u, v, w)$ soddisfacenti le (45), risulta

$$(46)\qquad P(\xi\in T_{i,n}) = \sum_{(u,v,w)\in T}\frac{\nu!}{u!v!w!}\left(\frac{i-1}{n}\right)^u\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^v\left(1-\frac{i}{n}\right)^w =$$

$$=\frac{\nu!}{(r-1)!(\nu-r)!}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{r-1}\cdot\frac{1}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)^{\nu-r}+$$

$$+\sum_{T-(r-1,1,\nu-r)}\frac{\nu!}{u!v!w!}\left(\frac{i-1}{n}\right)^u\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^v\cdot\left(1-\frac{i}{n}\right)^w .$$

Chiamiamo $F$ la funzione di ripartizione della variabile $\xi$: $F(x) = P(\xi\leqslant x)$ e definiamo per ogni intero $n\geqslant 1$ la funzione $f_n$:

$$(47)\qquad f_n(x) = n\cdot P(\xi\in T_{i,n}), \qquad \text{se } x\in T_{i,n} .$$

Chiaramente $f_n$ rappresenta una densità costante a tratti, quindi il suo grafico è il profilo superiore di un istogramma. Per costruzione, la $f_n(x)$ coincide con il rapporto incrementale della $F$ in quell'intervallo, dell'$n$-esima partizione, che contiene $x$.

Posto $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, dalla (46) si ottiene $\left(\text{se } x\in T_{i(x),n},\ 1\leqslant i(x)\leqslant n\right)$

$$(48)\qquad f_n(x) = \frac{\nu!}{(r-1)!(\nu-r)!}\left(\frac{i(x)-1}{n}\right)^{r-1}\left(1-\frac{i(x)}{n}\right)^{\nu-r}+$$

$$+\ n\cdot\sum_{T-(r-1,1,\nu-r)}\frac{\nu!}{u!v!w!}\left(\frac{i(x)-1}{n}\right)^u\left(\frac{1}{n}\right)^v\left(1-\frac{i(x)}{n}\right)^w .$$

Dato che $|i(x)/n - x|\leqslant 1/n$, si ha $\lim\limits_{n\to\infty} i(x)/n = x$; inoltre la sommatoria

$$(49)\qquad \sum_{T-(r-1,1,\nu-r)}\frac{\nu!}{u!v!w!}\left(\frac{i-1}{n}\right)^u\left(\frac{1}{n}\right)^v\left(1-\frac{i}{n}\right)^w ,$$

contiene un numero finito di termini, tutti con il fattore $1/n$ elevato ad un esponente $\geqslant 2$. Si riconosce quindi che

$$(50)\qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x\leqslant 0 \text{ oppure } x>1 , \\ \dfrac{\nu!}{(r-1)!(\nu-r)!}\,x^{r-1}(1-x)^{\nu-r} & \text{se } 0<x\leqslant 1 . \end{cases}$$

Il ragionamento fin qui svolto può essere ripetuto pari pari considerando equipartizioni $D'_n$ dell'intervallo $[0, 1]$ in tratti parziali $T'_{i,n}$, semiaperti a destra, giungendo a definire una funzione $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ ovunque coincidente con $f$. Osservando ora che

$$(51)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\nu!}{(r-1)!(\nu-r)!}\, x^{r-1}(1-x)^{\nu-r}\,dx = 1\,,$$

si può affermare, in base al Criterio I, che la $F$ è una funzione di ripartizione assolutamente continua e che la $f$ rappresenta la densità di distribuzione della relativa variabile aleatoria.

Risulta quindi:

$$(52)\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,, \qquad (\forall x \in \mathbf{R})\,,$$

e in particolare, se $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$(53)\qquad F(x) = \frac{\nu!}{(r-1)!(\nu-r)!} \int_0^x t^{r-1}(1-t)^{\nu-r}\,dt\,.$$

È il caso di osservare che $F(x)$ rappresenta la probabilità che, in una successione di $\nu$ estrazioni bernouilliane di una variabile aleatoria $y$ uniformemente distribuita sull'intervallo $[0, 1]$, in almeno $r$ di queste risulti $y \leqslant x$. Tale probabilità è espressa quindi da

$$(54)\qquad F(x) = \sum_{j=r}^{\nu} \binom{\nu}{j} x^j (1-x)^{\nu-j}\,.$$

Vale dunque la nota identità:

$$(55)\qquad \frac{\nu!}{(r-1)!(\nu-r)!} \int_0^x t^{r-1}(1-t)^{\nu-r}\,dt = \sum_{j=r}^{\nu} \binom{\nu}{j} x^j (1-x)^{\nu-j}\,.$$

Della (55), qui giustificata usando un ragionamento puramente probabilistico, è possibile dare una dimostrazione per via analitica. Per $r = \nu$ l'uguaglianza è evidente. Supponendo vera la (55) per un certo $r = k$, se ne può mostrare la validità (mediante integrazione per parti) anche per $r = k - 1$, quindi, per il principio di induzione, la (55) sussiste qualunque sia l'intero $r$, $1 \leqslant r \leqslant \nu$.

3.2. *Legge normale* (*di Laplace-Gauss*).

Mostreremo ora come la distribuzione normale possa essere univocamente determinata come limite di una successione di distribuzioni discrete (5).

Ricordiamo che lo *scarto ridotto* in un processo di $n$ prove bernoulliane a due alternative (successo od insuccesso, di probabilità complementari $p$, $q$) è una variabile casuale discreta $\xi_n$ cui sono accessibili gli $n+1$ valori: $(i - np)/\sqrt{npq}$, $(0 \leqslant i \leqslant n)$, con probabilità:

$$P\left(\xi_n = \frac{i - np}{\sqrt{npq}}\right) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}, \qquad (0 \leqslant i \leqslant n). \tag{56}$$

Chiameremo $F_n$ la funzione di ripartizione di tale variabile aleatoria. Per ogni intero $n \geqslant 1$, dividiamo l'asse reale in tratti di uguale ampiezza, ponendo:

$$T_{i,n} = \left\{x \in \mathbb{R} \colon \frac{i - 1 - np}{\sqrt{npq}} < x \leqslant \frac{i - np}{\sqrt{npq}}\right\}, \tag{57}$$

e consideriamo la funzione a gradini $f_n$ così definita:

$$f_n(x) = \frac{\Delta F_n(T_{i,n})}{\text{mis. } T_{i,n}} = \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \cdot \sqrt{npq}\,, \qquad (\text{se } x \in T_{i,n}). \tag{58}$$

Si osservi che $f_n(x) \geqslant 0$ per ogni $n$, ed inoltre:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \sqrt{npq} = 1\,. \tag{59}$$

Se dimostriamo che la successione $\{f_n\}$, $n \geqslant 1$, converge puntualmente verso una funzione $f$ il cui integrale lungo l'intero asse reale è 1, a norma del Criterio III esisterà una ed una sola variabile alea-

(5) Cfr. [1], pag. 153.

toria $\xi$, assolutamente continua, limite debole per la successione $\{\xi_n\}$. Detta $F(x) = P(\xi \leqslant x)$ la funzione di ripartizione della $\xi$, si avrà quindi, qualunque sia $x \in \mathbf{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \,, \tag{60}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta F_n(T_n(x)) - \Delta F(T_n(x))}{\text{mis. } T_n(x)} = 0 \,, \tag{61}$$

ove $T_n(x) = T_{i(x),n}$ indica, come in precedenza, il tratto dell'$n$-esima partizione che contiene $x$.

Resta dunque da provare la convergenza della successione $\{f_n(x)\}$. A tale scopo, ricordando la nota formula di Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\cdot \exp[-n]\,\alpha(n) \,, \qquad \left(\text{con} \lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 1\right) , \tag{62}$$

possiamo scrivere

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{pq}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{n^{n+\frac{1}{2}}p^i q^i}{i^{i+\frac{1}{2}}\cdot(n-i)^{n-i+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\alpha(n)}{\alpha(i)\cdot\alpha(n-i)} \,, \qquad (i = i(x)) \,, \tag{63}$$

sicchè, ponendo

$$\gamma(n, i) \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha(n)}{\alpha(i)\,\alpha(n-i)} \,, \tag{64}$$

otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma(n, i) = 1 \,, \qquad (\forall x \in \mathbf{R},\ i = i(x)) \,, \tag{65}$$

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{npq}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{n^{n+\frac{1}{2}}p^i q^{n-i}}{i^{i+\frac{1}{2}}(n-i)^{n-i+\frac{1}{2}}}\cdot\gamma(n, i) \,. \tag{66}$$

Il logaritmo neperiano dei due membri della (66) porge:

$$\log f_n(x) = \frac{1}{2}\log\frac{npq}{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n + i\log p + (n-i)\log q - \\ - \left(i + \frac{1}{2}\right)\log i - \left(n - i + \frac{1}{2}\right)\log(n-i) + \log\gamma(i, n) \,. \tag{67}$$

Si osservi ora che dalla (57) discendono:

$$\frac{1}{\sqrt{npq}} < x - \frac{i(x) - np}{\sqrt{npq}} \leqslant 0 , \tag{68}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i(x) - np}{\sqrt{npq}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\big(i(x) - 1\big) - np}{\sqrt{npq}} = x , \tag{69}$$

di guisa che, posto

$$\frac{i(x) - np}{\sqrt{npq}} - x \overset{\text{def}}{=} \varepsilon(n) , \qquad \sigma \overset{\text{def}}{=} \sqrt{pq} , \tag{70}$$

si ottengono le uguaglianze

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0 , \\ &i(x) = np + \big(x + \varepsilon(n)\big)\, \sigma\cdot\sqrt{n} = np\left(1 + \frac{x + \varepsilon(n)}{p\sqrt{n}}\, \sigma\right), \\ &\big(n - i(x)\big) = nq - \big(x + \varepsilon(n)\big)\cdot\sigma\cdot\sqrt{n} = nq\left(1 - \frac{x + \varepsilon(n)}{q\sqrt{n}}\, \sigma\right). \end{aligned} \tag{71}$$

Usando le (71) possiamo scrivere i seguenti sviluppi in serie:

$$\begin{aligned} \log i &= \log np + \log\left(1 + \frac{x + \varepsilon(n)}{p\sqrt{n}}\, \sigma\right) = \\ &= \log np + \frac{x + \varepsilon(n)}{p\sqrt{n}}\, \sigma - \frac{\big(x + \varepsilon(n)\big)^2}{2p^2 n}\, \sigma^2 + \frac{\big(x + \varepsilon(n)\big)^3}{3p^3 n\sqrt{n}}\, \sigma^3 + \ldots , \end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned} \log (n - i) &= \log nq + \log\left(1 - \frac{x + \varepsilon(n)}{p\sqrt{n}}\, \sigma\right) = \\ &= \log nq - \frac{x + \varepsilon(n)}{q\sqrt{n}}\, \sigma - \frac{\big(x + \varepsilon(n)\big)^2}{2q^2 n}\, \sigma^2 - \frac{\big(x + \varepsilon(n)\big)^3}{3q^3 n\sqrt{n}}\cdot \sigma^3 - \ldots , \end{aligned} \tag{73}$$

e la (67) si riduce a

$$\begin{aligned} \log f_n(x) &= \log \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2}\log n - \frac{1}{2}\log pq - \\ &\quad - \frac{\big(x + \varepsilon(n)\big)^2}{2} + \log \gamma(i, n) + H(n, x) = \\ &= \log\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \exp\left[-\frac{\big(x + \varepsilon(n)\big)^2}{2}\right]\cdot \gamma(i, n)\right\} + H(n, x) , \end{aligned} \tag{74}$$

ove $H(n, x)$ indica una serie di potenze nella variabile $1/\sqrt{n}$ il cui primo termine è

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{q-p}{2\sigma}\cdot\left(\frac{(x+\varepsilon(n))^3}{3} - x + \varepsilon(n)\right),$$

e quindi $H(n, x)$ è infinitesimo al divergere di $n$. Dall'uguaglianza

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{(x+\varepsilon(n))^2}{2}\right]\cdot\gamma(i, n)\cdot\exp\left[H(n, x)\right], \tag{75}$$

discende che

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right], \tag{76}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]dt\,. \tag{77}$$

Dato che $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-t^2/2\right]dt = 1$, si è dunque dimostrata l'esistenza di un'unica variabile casuale $\xi$ che sulle equipartizioni di $\mathbf{R}$ in tratti parziali del tipo (57) soddisfa alle (60) e (61), risultando quindi compatibile, nel senso precedentemente specificato, con la successione di istogrammi il cui profilo superiore è dato dai grafici delle $f_n$, definite dalla (58).

## BIBLIOGRAFIA

[1] L. Daboni, *Calcolo delle Probabilità ed elementi di Statistica*, Utet, 1974.
[2] H. Cramer, *The elements of Probability Theory and same of its applications*, Wiley, 1954.
[3] D. Dugué, *Traité de Statistique Teorique et Appliquée*, Masson, 1958.
[4] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. I e II, Wiley, 1966.
[5] A. N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea Pub. Co., 1956.
[6] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.
[7] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, Wiley, 1965.

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 aprile 1979.