RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CLAUDIO BARTOLONE

FEDERICO BARTOLOZZI

Sopra una classe di piani (R, r)-transitivi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 61 (1979), p. 13-31

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__13_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 61 (1979)

Sopra una classe di piani (R, r)-transitivi.

CLAUDIO BARTOLONE - FEDERICO BARTOLOZZI (*)

È noto che, a partire da un opportuno piano (affine) di M. Hall Π e da una sua omologia involutoria ω (1), si può costruire un piano (affine) π appartenente, come proveremo, alla classe II di H. Lenz, i punti (propri) di π essendo quelli di Π e le sue rette ottenendosi dalle rette di Π usufruendo di ω (G. Panella [7]); dalla costruzione si deduce che se U è il centro (improprio) di ω ed l il suo asse, U ed l sono punto e retta anche di π (2).

Nel presente lavoro stabiliamo che ogni collineazione α di π agisce sui suoi punti (propri) come una collineazione α' di Π per la quale è $l^{\alpha'} = l$, $U^{\alpha'} = U$; in più, che ogni collineazione α' di Π per la quale sia $l^{\alpha'} = l$, $U^{\alpha'} = U$ è individuata, nel modo precisato da una collineazione α di π. In conseguenza, il gruppo delle collineazioni $\Omega(\pi)$ di π si può identificare con il centralizzante di ω nel gruppo delle collineazioni di Π, $\Omega(\Pi)$, esistendo un monomorfismo (di gruppi) $\Omega(\pi) \to \Omega(\Pi)$, $\alpha \to \alpha'$, che ha come immagine quel centralizzante.

Tale risultato individua il gruppo delle collineazioni di π, tenuto conto che il gruppo delle collineazioni di Π è ben noto (D. R. Hughes [2]; G. Panella [6]).

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto Matematico dell'Università - Via Archirafi 34 - 90-123 Palermo.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

(1) Più precisamente, Π è piano (affine) di traslazione che ammette tra i suoi sistemi di coordinate un (opportuno) quasicorpo di M. Hall.

(2) U punto di π significa che ogni retta di direzione U del piano Π è anche retta di π.

Se il piano π è finito, π appartiene (F. Bartolozzi [1]) ad una classe di piani (R, r)-transitivi determinata e studiata da T. G. Ostrom [5] e L. A. Rosati [11]. Anzi, L. A. Rosati ha fornito, nel caso finito, alcune informazioni sulle collineazioni di π; noi terremo presenti, nel seguito, i risultati di L. A. Rosati, dopo esserci preoccupati di stabilirli senza usufruire della ipotesi di finitezza.

Per concludere, è opportuno segnalare che i piani di Ostrom-Rosati sono stati studiati, senza ipotesi di finitezza, da G. Pickert [10] e da F. Bartolozzi [1].

1. Lemmi preliminari.

Siano F un campo di caratteristica diversa da due e di ordine superiore a tre, s un suo elemento che non sia quadrato di un elemento di F (diremo, in breve: s non quadrato) e si supponga:

(1.1) se $F' = \{z \in F | z = x^2 - sy^2 \text{ con } x, y \in F\}$, il prodotto di due qualsiasi elementi di F' che siano non quadrati in F è un quadrato in F; F' contiene un non quadrato (in F).

Con tali dati si può definire un piano (affine) di traslazione Π (cfr. [7]; pp. 348-349), coordinatizzabile con un quasicorpo di M. Hall, i cui punti sono i punti dello spazio lineare (affine) $S_4(F)$ di dimensione quattro sopra il campo F e le cui rette sono tutti e soli i piani di quello spazio definiti da equazioni di uno dei seguenti tipi (se $P = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ è punto di $S_4(F)$):

$$(1.2) \qquad \begin{cases} y_1 = a_1x_1 + sa_2x_2 + b_1 \\ y_2 = a_2x_1 + a_1x_2 + b_2 \end{cases} \qquad a_1, a_2, b_1, b_2 \in F \text{ e } a_2 \neq 0 ,$$

$$(1.3) \qquad \begin{cases} x_2 = ax_1 + b_1 \\ y_2 = ay_1 + b_2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x_1 = b_1 \\ y_1 = b_2 \end{cases} \qquad a, b_1, b_2 \in F \text{ (}^3\text{)} .$$

Inoltre, con i medesimi dati, si individua un piano π, assumendo come suoi punti i punti di Π e definendo rette di π le rette di tipo

(3) Per i riferimenti e la terminologia relativi ai piani proiettivi ed agli spazi lineari rimandiamo a G. Pickert [9] e B. Segre [12].

(1.3), che scriveremo, rispettivamente, $\{a; b_1, b_2\}$ e $\{\infty; b_1, b_2\}$, e le parti di $S_4(F)$ così ottenibili:

(1.4) $[a_1, a_2; b_1, b_2]$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F$ e $a_2 \neq 0$, è retta di π costituita da tutti e soli i punti $P = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ che appartengono al piano (1.2) di $S_4(F)$ se $(a_2x_1 + b_2)^2 - s(a_2x_2)^2$ è (zero o) quadrato oppure, se ciò non accade, al piano di $S_4(F)$ di tipo (1.2) individuato dagli elementi $a_1, -a_2, b_1, -b_2$ di F.

Posto $l = \{0; 0, 0\}$, sia V la sua direzione, mentre U indichi la direzione della retta $x_1 = y_1 = 0$: π è piano (affine) (V, UV)-transitivo.

Conveniamo di indicare con (a) il punto improprio della retta $\{a; b_1, b_2\}$ (quindi, $V = (0)$) e chiameremo (a) punto improprio di tipo I se $a \neq 0$. Ovviamente, U, V e i punti impropri di tipo I si possono ritenere comuni ai piani (affini) π e Π. Inoltre, (a_1, a_2) indicherà il punto improprio della retta (1.4) di π: (a_1, a_2) sarà detto punto improprio di tipo II ($a_1, a_2 \in F$, $a_2 \neq 0$).

Per comodità espositiva, ammettiamo subito l'appartenenza di π alla classe II di H. Lenz [4] (4); ci riserviamo di dimostrare tale appartenenza all'inizio del n. 2, senza usufruire dei risultati già conseguiti.

LEMMA 1. *Le omografie di $S_4(F)$ definite da equazioni del seguente tipo*:

$$(1.5)\quad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + c_1 \\ x_2' = a_{11}x_2 + a_{12}y_2 \\ y_1' = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + c_2 & a_{ij}, c_1, c_2 \in F\,, \ |a_{ij}| \neq 0\,, \\ y_2' = a_{21}x_2 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

individuano collineazioni del piano π.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente, per noti risultati, stabilire il lemma nei seguenti casi:

1) $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$; oppure $c_1 = c_2 = 0$ e
2) $a_{11} = 1$, $a_{22} = a$ $(a \in F,\ a \neq 0)$, $a_{12} = a_{21} = 0$,
3) $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = a$ $(a \in F)$,
4) $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{21} = 0$, $a_{12} = a$ $(a \in F)$.

(4) Nel caso finito, ciò è stato provato da L. A. Rosati in [11].

La discussione dei casi 1), 2) e 3) è ovvia. Supponiamo, quindi, che in (1.5) si abbia $c_1 = c_2 = a_{21} = 0$, $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a$ $(a \in F)$ e sia $\sigma\colon S_4(F) \to S_4(F)$ l'applicazione così definita. Basterà mostrare che se $r = [a_1, a_2; b_1, b_2]$ è retta di π di tipo (1.4) fissata (comunque), P^σ descrive una retta di π quando il punto P descrive r, poichè se r fosse di tipo (1.3) l'analoga verifica è immediata.

Con r fissata, esiste una collineazione τ di π di tipo 1) tale che $(0, 0, 0, 0) \in r^\tau$ e si può determinare una collineazione di π, τ', sempre di tipo 1), tale che $\tau\sigma\tau' = \sigma$. Ciò significa che non è restrittivo supporre $r = [a_1, a_2; 0, 0]$ $(a_1, a_2 \in F,\ a_2 \neq 0)$.

Con $x_1, x_2 \in F$, i punti di r sono

$$P = (x_1, x_2, a_1 x_1 + \varepsilon s a_2 x_2, \varepsilon a_2 x_1 + a_1 x_2)$$

con $\varepsilon = 1$ se $x_1^2 - s x_2^2$ è (zero o) quadrato, $\varepsilon = -1$ altrimenti.

Ne deriva

$$P^\sigma = \big((1 + a a_1)x_1 + \varepsilon a s a_2 x_2, \varepsilon a a_2 x_1 + (1 + a a_1)x_2,$$

$$a_1 x_1 + \varepsilon s a_2 x_2, \varepsilon a_2 x_1 + a_1 x_2\big)$$

e risulta

$$[(1 + a a_1)x_1 + \varepsilon a s a_2 x_2]^2 - s[\varepsilon a a_2 x_1 + (1 + a a_1)x_2]^2 =$$

$$= [(1 + a a_1)^2 - s a^2 a_2^2](x_1^2 - s x_2^2)\,.$$

Ciò significa $P^\sigma \in [a_1', a_2'; 0, 0]$ ove, se $c^{-1} = [(1 + a a_1)^2 - s a^2 a_2^2]$, è $a_1' = c[(1 + a_1 a)a_1 - s a a_2^2]$, $a_2' = c a_2$ se c è quadrato oppure $a_2' = -c a_2$ se c è non quadrato. Il lemma è così provato.

Osservazione I. Se F è un campo finito, π è piano di Ostrom-Rosati ([1]) e il suo gruppo di collineazioni (1.5) è stato determinato, in tal caso, da L. A. Rosati [11].

Si noti che ogni collineazione (1.5) fissa la retta l, il punto improprio U e ciascun punto improprio di tipo I e opera transitivamente sulle rette di direzione U e su quelle di direzione V distinte da l.

Ponendo, inoltre, in (1.5) $c_1 = c_2 = a_{12} = 0$, $a_{11} = 1$ (quindi $a_{22} \neq 0$) si ha una collineazione di π che trasforma la retta $[a_1, a_2; 0, 0]$ nella retta $[a_{21} + a_{22} a_1, a_{22} a_2; 0, 0]$: ossia il gruppo (1.5) agisce transitivamente sui (fasci di rette, le direzioni delle quali siano) punti impropri di tipo II.

Si verifica a vista che l'applicazione:

$$\omega: S_4(F) \to S_4(F)$$

definita ponendo $(x_1, x_2, y_1, y_2)^\omega = (x_1, -x_2, y_1, -y_2)$ se $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in S_4(F)$ individua una collineazione ω del piano π; anzi, ω è collineazione involutoria non identica di π che ha come asse la retta l e che muta in sè l'insieme delle rette (1.3) (delle rette (1.4)).

L. A. Rosati [11] ha provato che se π è finito, ω è l'unica collineazione di π che verifica le condizioni precisate (5).

La medesima affermazione sussiste anche se π non è finito; noi ci limiteremo, nell'ambito di questi risultati preliminari, a stabilire il

LEMMA 2. *Sia σ una collineazione involutoria di π che fissi ogni punto della retta l e un punto C (proprio o improprio) di π distinto da U e da V. Se σ muta in sè l'insieme delle rette* (1.3), *σ agisce come la trasformazione identica sui punti di π.*

DIMOSTRAZIONE. σ non sia l'identità. Poichè π appartiene alla classe II di H. Lenz, C è punto improprio e $U \neq C \neq V$.

Se C è punto improprio di tipo I, sia $C = (\gamma)$, $\gamma \in F$ e $\gamma \neq 0$, mentre se C è punto improprio di tipo II non è restrittivo supporre $C = (0, 1)$, tenendo presente l'Osservazione I e riferendosi alla collineazione $\varrho\sigma\varrho^{-1}$ di π, con ϱ collineazione di tipo (1.5) (che, quindi, fissa U, V e ogni punto improprio di tipo I) per la quale risulti $(1, 0)^\varrho = C$. Avendo negato la tesi, esiste (α), punto improprio di tipo I, tale che $(\alpha)^\sigma = U$ $(\alpha \in F,\ \alpha \neq 0, \gamma)$.

Se $P = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S_4(F)$ si ha

$$P^\sigma \in [(\alpha) P \cap l]\, U = \{\infty;\, x_1 - \alpha^{-1} x_2,\, y_1 - \alpha^{-1} y_2\}\,.$$

(5) Se si desume il piano π secondo la costruzione di Ostrom-Rosati occorre considerare un quasicorpo associativo sinistro (non eccezionale) R che abbia ordine q^2 e il cui nucleo sia un campo di Galois F di ordine q, risultando, inoltre, R centrale su F (cfr. [13]). In [11] (cfr. teor. 4) viene provato che il gruppo delle omologie di π di asse l che trasforma in sè ciascuno dei due sistemi di rette (1.3) e (1.4) è isomorfo al gruppo degli automorfismi di R che fissano ciascun elemento di F; è noto che tale gruppo ha ordine due.

PRIMO CASO. $C = (\gamma)$, $\gamma \neq 0, \alpha$. È

$$P^\sigma \in \{\gamma;\, x_2 - \gamma x_1,\, y_2 - \gamma y_1\}\,,$$

quindi:

$$P^\sigma = \big(x_1 - \alpha^{-1}x_2,\, (1-\gamma\alpha^{-1})x_2,\, y_1 - \alpha^{-1}y_2,\, (1-\gamma\alpha^{-1})\,y_2\big) =$$
$$= (x_1 - \alpha^{-1}x_2,\, -x_2,\, y_1 - \alpha^{-1}y_2,\, -y_2)$$

poichè, essendo σ involutoria, è $2\alpha = \gamma$. Poichè la collineazione σ di π agisce sui punti di $S_4(F)$ come una omografia (affine), σ deve mutare ciascun piano di $S_4(F)$ di tipo (1.2) in un piano dello stesso tipo.

Ne deriva che esistono $l, m \in F$, $m \neq 0$, tali che, con $x_1, x_2 \in F$, tenuto conto che

$$(x_1, x_2, sx_2, x_1)^\sigma = (x_1 - \alpha^{-1}x_2,\, -x_2,\, sx_2 - \alpha^{-1}x_1,\, -x_1),$$

si abbia

$$sx_2 - \alpha^{-1}x_1 = l(x_1 - \alpha^{-1}x_2) - smx_2 \quad \text{e} \quad -x_1 = m(x_1 - \alpha^{-1}x_2) - lx_2\,:$$

la seconda di tali relazioni, con $x_2 = 0$, dà $m = -1$, quindi $l = \alpha^{-1}$ e, in conseguenza, dalla prima uguaglianza si trae $2x_1 = \alpha^{-1}x_2$ che contraddice la possibilità di scegliere comunque $x_1, x_2 \in F$.

SECONDO CASO. $C = (0, 1)$. Se $b, d \in F$, con

$$P = (0, b, 0, d) \in \{\infty; 0, 0\} = OU\,,$$

si ha, come prima, $P^\sigma \in \{\infty; -\alpha^{-1}b, -\alpha^{-1}d\}$ e, pretendendo $P^\sigma \in CP$, si trova

$$P^\sigma = \big(-\alpha^{-1}b,\, \varepsilon(b + \varepsilon' s^{-1}\alpha^{-1}d),\, -\alpha^{-1}d,\, \varepsilon(d + \varepsilon'\alpha^{-1}b)\big)\,,$$

ove $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$ in dipendenza della scelta degli elementi b, d in F. Poichè σ è involutoria e $(\alpha)^\sigma = U$, deve essere $P^\sigma \in O^\sigma U^\sigma = O(\alpha)$, quindi $\varepsilon(d + \varepsilon'\alpha^{-1}b) = -d$ che contraddice l'arbitraria scelta degli elementi b, d in F. Il lemma è così provato.

LEMMA 3. *Se σ è collineazione di π che fissa ogni punto improprio e se risulta $C^\sigma = C$ con $C = (0, 0, 0, 1)$, allora σ è l'identità.*

DIMOSTRAZIONE. Sia σ non identica. Se $O = (0, 0, 0, 0)$ è $O^\sigma = (0, \alpha, 0, \beta)$, $\alpha, \beta \in F$ e $0 \neq \beta \neq 1$ se $\alpha = 0$. Supposto dapprima $-s$ quadrato in F, si considerino i punti $P = (0, 0, a, 1)$ e $Q = (0, as^{-1},$

a, 0), ove a è un elemento non nullo di F tale che $1 - a^2s^{-1}$ è un non quadrato in F [6]. Premesso ciò, mostriamo che dall'allineamento dei punti P, Q, U non deriva quello dei punti P^σ, Q^σ, U.

Risulta, infatti,

$$CP = \{0; 0, 1\}, \qquad CQ = [a^{-1}s, -1; 0, 1], \qquad OP = \{a^{-1}; 0, 0\},$$

$$(OP)^\sigma = \{a^{-1}; \alpha, \beta\}, \qquad P^\sigma = (OP)^\sigma \cap CP = (-a\alpha, 0, -a(\beta-1), 1)$$

e

$$OQ = [0, 1; 0, 0].$$

Se $\beta^2 - \alpha^2 s$ è un quadrato, si ha $(OQ)^\sigma = [0, 1; -\alpha s, \beta]$, mentre, nell'ipotesi esclusa, si ottiene $(OQ)^\sigma = [0, 1; \alpha s, -\beta]$.

L'allineamento dei punti P^σ, Q^σ, U comporta $P^\sigma U \cap CQ = P^\sigma U \cap \cap (OQ)^\sigma$ con $P^\sigma U = \{\infty; -a\alpha, a(1-\beta)\}$ e, tale uguaglianza, fornisce le condizioni:

(1.6) $\quad -a(1-\beta) = \alpha s$ oppure $2\beta = a^{-1}\alpha s$, se $\beta^2 - \alpha^2 s$ è quadrato ,

(1.7) $\quad \beta = 1$, $2\beta = (a^{-1}s - 2a)\alpha$ oppure $\alpha = 0$, se $\beta^2 - \alpha^2 s$ è non quadrato .

Poichè in (1.6) si può sostituire a con un qualsiasi elemento non nullo di F che verifichi la condizione $1 - a^2s^{-1}$ non quadrato (ad esempio $-a$), se si pretende che i valori di α e di β non dipendano dalla scelta dell'elemento a è necessario che sia $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ oppure $\alpha = \beta = 0$ e ciò contrasta con un'ipotesi.

Nelle (1.7), $\alpha = 0$ è ovviamente da escludere, mentre la rimanente possibilità evidenzia ancora una dipendenza di α e di β da a che può essere evitata solo ponendo $\beta = 0$ e ciò è assurdo.

Nel caso in cui $-s$ è non quadrato, sostituendo i punti P e Q con i punti $R = (0, 0, b, 1)$ e $S = (0, bs^{-1}, b, 0)$ ove b è elemento non nullo di F tale che $1 - s^{-1}b^2$ è quadrato (si veda la nota [6]), e procedendo in modo analogo al caso precedente [7], si perviene ancora ad un assurdo, ossia σ è collineazione identica. Ciò prova il lemma.

(6) Le ipotesi fatte, all'inizio, sul campo F permettono di individuare $x, y \in F$, $x, y \neq 0$, tali che $z = x^2 - sy^2$ è non quadrato in F; da ciò segue subito l'esistenza di a in F, $a \neq 0$, che verifica la condizione richiesta.

(7) Più precisamente, risulta: $CR = \{0; 0, 1\}$, $CS = [-b^{-1}s, 1; 0, 1]$, $OR = \{b^{-1}; 0, 0\}$, $(OR)^\sigma = \{b^{-1}; \alpha, \beta\}$, $R^\sigma = (-b\alpha, 0, b(1-\beta), 1)$, $OS = [0, -1; 0, 0]$ e $(OS)^\sigma = [0, -1; \alpha s, \beta]$ se $\beta^2 - \alpha^2 s$ è quadrato, $(OS)^\sigma = [0, -1; -\alpha s, -\beta]$ altrimenti.

LEMMA 4. *Non esiste una collineazione σ di π che fissa ogni punto della retta l, ogni retta per un punto improprio di tipo I, (α), e per la quale risulti $(0,1)^\sigma = U$.*

DIMOSTRAZIONE. Esista σ. Si consideri il punto $P = (1, -as^{-1}, a, -1)$ ove a è un elemento non nullo di F tale che $1 - a^2 s^{-1}$ è un non quadrato in F. Poichè $P \in r = [0,1;0,0]$, P^σ è il punto comune alla retta per P di direzione (α) ed alla retta $r^\sigma = \{\infty; 0, 0\}$, ossia $P^\sigma = (0, -as^{-1} - \alpha, 0, -1 - a\alpha)$.

Se (γ) è un altro punto improprio di tipo I distinto da (α), detta t la retta di direzione (γ) per P, risulta $t = \{\gamma; -as^{-1} - \gamma, -1 - \gamma a\}$ e, per determinare t^σ, basta considerare la retta di π che congiunge $t \cap l = (a\gamma^{-1}s^{-1} + 1, 0, \gamma^{-1} + a, 0)$ con P^σ. Pertanto si ha $t^\sigma = [\lambda, \mu; \nu, \theta]$ se

$$(1 + a\gamma^{-1}s^{-1})^2 - s(\alpha + as^{-1})^2$$

è quadrato in F, $t^\sigma = [\lambda, -\mu; \nu, -\theta]$ altrimenti, ove

$$\lambda = [(\gamma^{-1} + a)(a\gamma^{-1}s^{-1} + 1) - (1 + a\alpha)(a + s\alpha)] \cdot$$
$$\cdot [(a\gamma^{-1}s^{-1} + 1)^2 - s(as^{-1} + \alpha)^2]^{-1},$$

$$\mu = (\alpha\gamma^{-1} - 1)(a^2 s^{-1} - 1)[(a\gamma^{-1}s^{-1} + 1)^2 - s(as^{-1} + \alpha)^2]^{-1},$$

$$\nu = \mu(a + \alpha s),$$

$$\theta = -\mu(a\gamma^{-1}s^{-1} + 1).$$

Al punto (γ) corrisponde, quindi, in σ, il punto improprio di tipo II (λ, μ) oppure il punto $(\lambda, -\mu)$. Poichè σ è completamente individuata dall'azione su un punto non fisso ($(0,1)$ nel nostro caso), se si desume l'immagine di (γ) a partire da $P' = (1, as^{-1}, -a, -1)$, ossia se si effettua uno scambio tra a e $-a$ (la condizione $1 - a^2 s^{-1}$ non quadrato in F, non si altera), si deve riottenere lo stesso punto $(\gamma)^\sigma$ e, in particolare, deve sussistere una delle due eguaglianze (ottenute identificando μ', ricavato da μ scambiando a con $-a$, con μ e con $-\mu$):

$$(-a\gamma^{-1}s^{-1} + 1)^2 - s(-as^{-1} + \alpha)^2 = (a\gamma^{-1}s^{-1} + 1)^2 - s(as^{-1} + \alpha)^2,$$

$$(-a\gamma^{-1}s^{-1} + 1)^2 - s(-as^{-1} + \alpha)^2 = -(a\gamma^{-1}s^{-1} + 1)^2 + s(as^{-1} + \alpha)^2.$$

Le precedenti identità forniscono, rispettivamente, $\alpha = \gamma^{-1}s^{-1}$ e $\alpha^2 = s^{-1}(a^2\gamma^{-2}s^{-2} + 1 - a^2s^{-1})$ che esprimono la dipendenza di α e di α^2 dalla scelta di γ in F (il campo F possiede almeno cinque elementi) e ciò è assurdo.

LEMMA 5. *Con* (α) *punto improprio di tipo* I, *sia* σ *una collineazione di* π *che fissa ogni punto della retta* l, *ogni retta per il punto* (α), *e per la quale* $(0, 1)^\sigma$ *risulti punto improprio di tipo* I. *Sotto tali ipotesi,* U^σ *è punto improprio di tipo* II.

DIMOSTRAZIONE. Con $P = (1, 0, 0, 1)$, punto di π appartenente alla retta $[0, 1; 0, 0]$, si determini $P^\sigma = P(\alpha) \cap [0, 1; 0, 0]^\sigma$; perciò, tenuto conto che $P(\alpha) = \{\alpha; -\alpha, 1\}$ e $[0, 1; 0, 0]^\sigma = \{\gamma; 0, 0\}$ ove si è posto $(0, 1)^\sigma = (\gamma)$, $\gamma \in F$, $\gamma \neq 0$, $\gamma \neq \alpha$, è

$$P^\sigma = \big(-\alpha(\gamma - \alpha)^{-1}, -\alpha\gamma(\gamma - \alpha)^{-1}, (\gamma - \alpha)^{-1}, \gamma(\gamma - \alpha)^{-1}\big).$$

Se t è la retta per P di direzione U, poichè $t^\sigma = (t \cap l)P^\sigma$, con $t \cap l = (1, 0, 0, 0)$, si ha

$$t^\sigma = [\lambda, \mu; -\lambda, -\mu] \qquad \text{oppure} \qquad t^\sigma = [\lambda, -\mu; -\lambda, \mu]$$

ove $\lambda = \gamma^{-1}(1 - s\alpha\gamma)(s\alpha^2 - 1)^{-1}$, $\mu = \gamma^{-1}(\gamma - \alpha)(s\alpha^2 - 1)^{-1} \neq 0$. Pertanto $U^\sigma = (\lambda, \mu)$ oppure $U^\sigma = (\lambda, -\mu)$ e il lemma è provato.

LEMMA 6. *Sia* σ *una collineazione di* π *che fissa ogni punto della retta* l, *ogni retta per il punto improprio di tipo* II, $(0, 1)$, *e che trasforma* U *in un punto improprio di tipo* II.

Sotto tali condizioni esiste, al più, un solo punto improprio di tipo I *che ha come immagine, in* σ, *un punto improprio di tipo* I.

DIMOSTRAZIONE. Ragionando, per comodità, su σ^{-1}, si consideri, in π, la coppia punto-retta, incidentisi, P, r con $P = (1, 0, \lambda, \mu)$ ed $r = [\lambda, \mu; 0, 0]$, ove si è posto $U^\sigma = (\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in F$, e $(\lambda, \mu) \neq (0, 1)$. $P^{\sigma^{-1}}$ è intersezione di $[0, 1; \lambda, \mu - 1]$, retta per P di direzione $(0, 1)$, con $r^{\sigma^{-1}} = \{\infty; 0, 0\}$; pertanto

$$P^{\sigma^{-1}} = (0, -\lambda s^{-1}, 0, \mu - 1) \qquad \text{oppure } P^{\sigma^{-1}} = (0, \lambda s^{-1}, 0, 1 - \mu).$$

Se (α), $\alpha \in F$, è punto improprio di tipo I e se $t = \{\alpha; -\alpha, \mu - \lambda\alpha\}$ è la retta per P di direzione (α), allora $t^{\sigma^{-1}} = (t \cap l)P^{\sigma^{-1}}$, con $t \cap l =$

$= (1, 0, \lambda - \mu\alpha^{-1}, 0)$; dopo ciò, se $t^{\sigma^{-1}}$ è retta per il punto improprio di tipo I, (γ), $\gamma \in F$, $\gamma \neq \alpha$, devono sussistere le identità $\gamma = \lambda s^{-1}$ e $\gamma(\lambda - \mu\alpha^{-1}) = 1 - \mu$ oppure $\gamma = -\lambda s^{-1}$ e $\gamma(\lambda - \mu\alpha^{-1}) = \mu - 1$: ovvie considerazioni permettono di concludere che, al più, un solo valore di α può soddisfare le precedenti condizioni.

I lemmi sino ad ora stabiliti, permettono di conseguire il primo dei risultati fondamentali, dal nostro punto di vista, per la risoluzione del problema postoci. Vale, infatti, il seguente:

LEMMA 7. *Ogni collineazione di π muta in sè la retta l ed il fascio di rette di direzione U.*

DIMOSTRAZIONE. Sia χ collineazione non identica di π; cominciamo col provare che χ muta in sè la retta l.

Per assurdo, risulti $l^\chi \neq l$; poichè π è di classe II, $V^\chi = V$, l^χ è retta per V ed è possibile individuare una collineazione ψ di π appartenente al gruppo (1.5) tale che $(l^\chi)^\psi = \{0; 0, 1\}$ (cfr. Lemma 1 e Osservazione 1). Se σ è collineazione non identica di π, ottenuta ponendo, in (1.5), $a_{11} = a_{22} = a$ $(a \in F,\ a \neq 0, 1)$, $a_{12} = a_{21} = c_1 = c_2 = 0$, si consideri $\sigma' = \psi^{-1}\chi^{-1}\sigma\chi\psi$; σ' è collineazione non identica di π che fissa ogni punto improprio e tale che $(O^{\chi\psi})^{\sigma'} = O^{\chi\psi}$ se $O = (0, 0, 0, 0)$.

Poichè π è (V, UV)-transitivo e $O^{\chi\psi} \in \{0; 0, 1\}$, esiste la traslazione τ tale che $(O^{\chi\psi})^\tau = (0, 0, 0, 1)$; ne deriva che $\tau^{-1}\sigma'\tau$ è collineazione non identica di π che fissa, con ogni punto improprio, il punto $(0, 0, 0, 1)$: tale eventualità è esclusa dal Lemma 3.

Per provare compiutamente il lemma, supponiamo che $U^\chi \neq U$ e sia ω la collineazione involutoria, non identica, di π definita precedentemente. $\omega' = \chi^{-1}\omega\chi$ è altresì collineazione involutoria, non identica, di π che fissa ogni punto della retta l e il punto improprio U^χ, necessariamente distinto da V, quindi, per il Lemma 2, ω' non muta in sè l'insieme delle rette (1.3).

Supponiamo dapprima che U^χ sia punto improprio di tipo I. Se $U^{\omega'}$ fosse punto improprio di tipo II, considerata una collineazione ψ del gruppo (1.5) che, fissando ogni punto improprio di tipo *I*, trasforma il punto improprio di tipo II, $(0, 1)$, nel punto $U^{\omega'}$ (Osservazione I), risulterebbe

$$(U^\chi)^{\psi\omega'^{-1}\psi^{-1}} = U^\chi, \qquad P^{\psi\omega'^{-1}\psi^{-1}} = P \qquad \text{se } P \in l,$$

e

$$(0, 1)^{\psi\omega'^{-1}\psi^{-1}} = U^{\omega'\omega'^{-1}\psi^{-1}} = U^{\psi^{-1}} = U.$$

Pertanto, il piano π dovrebbe ammettere una collineazione, $\psi\omega'^{-1}\psi^{-1}$, che fissa ogni punto della retta l, ogni retta per il punto improprio di tipo I, U^χ, e tale che $(0,1)^{\psi\omega'^{-1}\psi^{-1}} = U$, eventualità esclusa dal Lemma 4.

Nell'ipotesi, quindi, che U^χ risulti punto improprio di tipo I, tale, altresì, deve essere $U^{\omega'}$. Poichè ω', come già osservato, non muta in sè l'insieme dei punti impropri di tipo I, deve esistere un punto di tale insieme, L, cosicchè $L^{\omega'}$ sia punto improprio di tipo II. Se ϱ è una collineazione del gruppo (1.5) che trasforma $L^{\omega'}$ in $(0,1)$, allora $\sigma = \varrho^{-1}\omega'^{-1}\varrho$ è collineazione di π che fissa i punti della retta l, ogni retta per il punto improprio di tipo I, U^χ, e per la quale $(0,1)^\sigma = L$. In tali circostanze, il Lemma 5 assicura che U^σ è punto improprio di tipo II: ciò è però escluso da quanto di già provato per ω'.

Pertanto, una eventuale collineazione χ di π che non fissi il punto U deve, necessariamente, mutarlo in un punto improprio di tipo II; dopo ciò, a meno di una collineazione del gruppo (1.5), si può supporre che $U^\chi = (0,1)$.

Chiamata, ancora, con ω' la collineazione involutoria non identica di π, $\chi^{-1}\omega\chi$, che fissa ogni punto della retta l ed il punto improprio di tipo II, $(0,1)$, deve risultare $U^{\omega'}$ punto improprio di tipo II perchè, per quanto provato, non esistono collineazioni di π che portano U in un punto improprio di tipo I. Per il Lemma 6 è possibile, allora, scegliere un punto improprio di tipo I, M, tale che $M^{\omega'}$ sia punto improprio di tipo II; se φ è una collineazione del gruppo (1.5) tale che $(0,1)^\varphi = (U^\chi)^\varphi = M^{\omega'}$, $\chi\varphi\omega'^{-1}$ è collineazione di π che fa corrispondere ad U il punto improprio di tipo I, M, contro quanto già stabilito.

Il lemma è così dimostrato.

2. Il gruppo delle collineazioni di π.

Il piano (affine) di traslazione Π individuato dal quasicorpo di M. Hall $J = J(F, s) = J(+, \cdot)$ che è definito dal campo F e dal polinomio $x^2 - s \in F[x]$, irriducibile in $F[x]$, ha come punti (propri) $\mathbf{P} = \{(x, y) | x, y \in J\}$ e come rette (proprie) $\mathbf{R} = \{[c], [m, b] | c, m, b \in J\}$, l'incidenza essendo così definita:

$$[c] = \{(x, y) \in \mathbf{P} | x = c\}, \qquad [m, b] = \{(x, y) \in \mathbf{P} | y = mx + b\}.$$

Se Π si estende ad un piano proiettivo, (m) indica il punto improprio della sua retta $[m, b]$, (∞) quello della sua retta $[c]$, mentre $[\infty]$ è la sua retta impropria descritta dai punti (impropri) così ottenuti.

$J(+)$ ha una struttura di F-spazio vettoriale (sinistro) con base $\{1, \xi\}$: se $x \in J$ è $x = x_1 + x_2\xi$ $(x_1, x_2 \in F)$ e quella struttura definisce l'addizione; inoltre, se $x = x_1 + x_2\xi$, $y = y_1 + y_2\xi \in J$ è

$$xy = x_1y_1 + x_1y_2\xi\ , \qquad se\ x_2 = 0\ ,$$

$$xy = x_1y_1 - (x_1^2 - s)x_2^{-1}y_2 + (x_2y_1 - x_1y_2)\xi\ , \qquad \text{se } x_2 \neq 0\ .$$

Risulta $F = \{x_1 + x_2\xi \in J | x_2 = 0\}$ e F è il nucleo di $J(+, \cdot)$; se $x = x_1 + x_2\xi \in J$, poniamo $\sigma(x) = x_2$.

Supponiamo che F, s verifichino l'ipotesi (1.1) del n. 1; è individuato un sistema cartesiano $K = K(F, s) = K(+, \circ)$ (cfr. G. Panella [8]) ponendo $K(+) = J(+)$ in quanto gruppi additivi e definendo con $x = x_1 + x_2\xi$, $y = y_1 + y_2\xi \in K = J$

$$x \circ y = -xy \text{ se } x_2 \neq 0 \text{ e } [\sigma(xy)]^2 - s[\sigma(y)]^2 \text{ è non quadrato in } F\ ,$$

$$x \circ y = xy \text{ altrimenti}\ .$$

Il piano (affine) π individuato da $K(+, \circ)$ ha, per definizione, i medesimi punti $\mathbf{P}$ e le medesime rette $\mathbf{R}$ di Π con l'incidenza così definita:

$$[c] = \{(x, y) \in \mathbf{P} | x = c\}\ , \qquad [m, b] = \{(x, y) \in \mathbf{P} | y = m \circ x + b\}\ ;$$

per evitare ambiguità, denoteremo con $[c]'$, $[m, b]'$ le rette di π, $(\infty)'$ e $(m)'$ saranno i suoi punti impropri e $[\infty]'$ la sua retta impropria. Da notare che è, canonicamente, $[c] = [c]'$ se $c \in J = K$, $[m, b] = [m, b]'$ se $m \in F$, $(\infty) = (\infty)'$ e $(m) = (m)'$ se $m \in F$.

La coppia di piani Π, π è un modello della coppia di piani studiata al n. 1 e indicata con le medesime notazioni (F. Bartolozzi [1]); è facile verificare che le rette ed i punti di π messi in evidenza nel n. 1 si traducono, nell'attuale modello, così: $V = (\infty)' = (\infty)$, $U = (0)' = (0)$, $0 = (0, 0)$, $OU = [0, 0]' = [0, 0]$, $l = OV = [0]' = [0]$.

LEMMA 8. *Il piano π appartiene alla classe* II *di H. Lenz.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè π risulta $(V, [\infty]')$-transitivo e $K(+, \circ)$ è sistema cartesiano non distributivo nè a destra nè a sinistra, è sufficiente escludere l'esistenza di un punto P e di una retta p di π, $P \notin p$, tali che π risulti (X, x)-transitivo se e solo se X è punto di p e la retta x congiunge P con X. Esista una tale coppia P, p; tenuto conto che la collineazione ω introdotta al n. 1 fissa soltanto $[\infty]'$ ed l nel fascio di rette di direzione V, deve essere $p = l$, $P \in [\infty]'$ e $P \neq V$. Inoltre, poichè ω su $[\infty]'$ fissa i soli punti V e U, si ha $P = U$.

In conseguenza, π deve risultare (O, OU)-transitivo; perchè ciò accada è necessario che $K(+, \circ)$ verifichi la seguente condizione (cfr. T. V. S. Jagannathan [3]; p. 70): se a, b, con $a \neq b$, sono elementi non nulli di K (comunque) fissati, se x è elemento non nullo di K con $a \neq x \neq b$, se $m \in K$ è definito pretendendo $m \circ x = a - b$ e m', x' sono elementi di K individuati dalle condizioni $m \circ x' = -b$ e $m' \circ x = a$, il prodotto $m' \circ x'$ non deve dipendere da x.

Per provare che tale condizione non è verificata, si assuma $a = \xi$, $b = -1 + \xi$ e $x \in F$, $x \neq 0$; si ottiene $m = x^{-1}$, $m' = x^{-1}\xi$, $x' = x + (-x)\xi$ e risulta $m' \circ x' = \pm m'x' = \pm(-sx^2 + \xi)$, l'eventuale ambiguità di segno dipendendo dalla scelta di x in F.

Se $m' \circ x'$ fosse indipendente da x non vi sarebbe ambiguità di segno e dovrebbe essere $sx^2 = s$, ossia $x^2 = 1$ che contraddice $|F| > 3$.

OSSERVAZIONE II. Al n. 1 abbiamo senz'altro ammesso l'appartenenza di π alla classe II di H. Lenz; la dimostrazione del precedente lemma è indipendente dai risultati già ottenuti usufruendo di quella ipotesi.

LEMMA 9. *Sia $C(\oplus, *)$ il sistema cartesiano (il quasicorpo) che fornisce coordinate a π (a Π) nel suo riferimento (O, U, V, E_1), con $E_1 = (\lambda, 1)$ essendo $\lambda \in F$* e *$\lambda \neq 0$. Il sistema cartesiano (il quasicorpo) $C(\oplus, *)$ è isomorfo al sistema cartesiano $K(F, s')$ (al quasicorpo $J(F, s')$) con $s' = \lambda^2 s$.*

DIMOSTRAZIONE. È definita un'applicazione bigettiva $h\colon K \to C$ pretendendo che il punto $(0, a)$ di π, $a \in K(F, s)$, abbia coordinate $(0, h(a))$ nel riferimento (O, U, V, E_1). Con $a, b \in K(F, s)$, il punto $(0, a + b)$ di π ha coordinate nel riferimento (O, U, V, E_1), $(0, h(a) \oplus h(b))$: ne deriva $h(a + b) = h(a) \oplus h(b)$ e h è isomorfismo additivo.

Analogamente, per $(0, (\lambda^{-1}a) \circ (\lambda b))$ si trova $(0, h(a) * h(b))$ e risulta

$$h[(\lambda^{-1}a) \circ (\lambda b)] = h(a) * h(b)\ .$$

Identificando a con $h(a)$, se $a \in K$, è $K(+) = C(\oplus)$ e il sistema cartesiano $C(\oplus, *)$ si identifica con $K(+, *)$ essendo $*$ così definita: se $a = a_1 + a_2\xi$, $b = b_1 + b_2\xi \in K$ è $a * b = a_1 b_1 + a_1 b_2 \xi$ se $a_2 = 0$ mentre, se $a_2 \neq 0$, risulta

$$a * b = \pm \left[\left(a_1 b_1 - (a_1^2 - s\lambda^2) a_2^{-1} b_2\right) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\xi\right]$$

ove si scelga il segno inferiore quando $(a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 - s\lambda^2 (b_2)^2$ è non quadrato in F, il segno superiore altrimenti. Ne deriva che $K(+, *)$ è il sistema cartesiano $K(F, s')$, con $s' = \lambda^2 s$, descritto dal campo F e dal suo elemento s'. Analoga dimostrazione vale con riferimento al piano Π.

Lemma 10. *Sia* $s \neq -1$; χ *indichi una collineazione di* π *(di* Π, *e fissi la retta* l *e la direzione* U*) per la quale si abbia* $(0, 0)^\chi = (0, 0)$, $(1, 1)^\chi = (\lambda, 1)$ *essendo* $\lambda \in K = J$ *e* $\lambda \neq 0$. *Con* (x, y) *punto (proprio) di* π *(di* Π*) si ha* $(x, y)^\chi = (\lambda \circ x^\varphi, y^\varphi)$ $\left((x, y)^\chi = (\lambda x^\varrho, y^\varrho)\right)$, λ *è elemento di* F *e* φ: $K \to K$ (ϱ: $J \to J$) *è automorfismo additivo per il quale, con* $a, b \in K$ $(a, b \in J)$, *risulta*

$$(a \circ b)^\varphi = (\lambda^{-1} \circ a^\varphi) \circ (\lambda \circ b^\varphi)\,, \qquad \left((ab)^\varrho = (\lambda^{-1} a^\varrho)(\lambda b^\varrho)\right).$$

Dimostrazione. Proviamo il lemma per il piano π.

Poichè π è $(V, [\infty]')$-transitivo e appartiene alla classe II di H. Lenz (Lemma 8), χ è collineazione affine.

Inoltre, per il Lemma 7, χ fissa la retta l e la direzione U di π; in conseguenza, per le ipotesi, deve essere $(x, y)^\chi = (x^\psi, y^\varphi)$ se (x, y) è punto (proprio) di π, con φ, ψ: $K \to K$ opportune applicazioni bigettive, tali che $0^\varphi = 0^\psi = 0$, $1^\psi = \lambda$ e $1^\varphi = 1$.

Poichè $V^\chi = V$, se $(m)'$ è direzione di π $(m \in K)$ è $(m)'^\chi = (m^\delta)'$ con δ: $K \to K$ applicazione bigettiva per la quale $0^\delta = 0$.

Pertanto, se $(x, y) \in [m, 0]'$ $(x, y, m \in K)$ deve aversi $(x^\psi, y^\varphi) \in [m^\delta, 0]'$, ossia $(m \circ x)^\varphi = m^\delta \circ x^\psi$ e, se $\alpha \in K$ per cui $\alpha^\psi = 1$ (è $\alpha \neq 0$), $m^\delta = (m \circ \alpha)^\varphi$.

In definitiva, si ottiene

$$\text{(A)} \qquad (m \circ x)^\varphi = (m \circ \alpha)^\varphi \circ x^\psi \qquad \text{se } m, x \in K\,,$$

con α elemento non nullo di K definito dalla pretesa $\alpha^\psi = 1$. Da (A), con $m = x = 1$, si ottiene $1 = 1^\varphi = \alpha^\varphi \circ \lambda$ che assicura α^φ, $\lambda \in K - F$ oppure α^φ, $\lambda \in F$. Proveremo che $\lambda \in F$ mostrando che l'ipotesi α^φ, $\lambda \in K - F$ conduce ad una contraddizione; in più, supporremo $-s$

quadrato in F, avvertendo che, se questo non è il caso, si perviene alla contraddizione in maniera analoga.

Con $-s$ quadrato in F e α^φ, $\lambda \in K - F$ è $(s \circ \lambda) \circ \lambda = 1$ che fornisce $\alpha^\varphi = s \circ \lambda$ tenuto conto che (A), come già osservato, dà $1 = \alpha^\varphi \circ \lambda$; ne deriva, $s \circ \alpha^\varphi = s \circ (s \circ \lambda)$.

Inoltre, da (A), con $m = \alpha$ e $x = 1$, si ha $\alpha^\varphi = (\alpha^2)^\varphi \circ \lambda$ e si trova $(\alpha^2)^\varphi = s$; mentre, con $x = \alpha \circ \alpha = \alpha^2$ e $m = 1$ si ottiene $s = (\alpha^2)^\varphi = \alpha^\varphi \circ (\alpha^2)^\psi$ ed avendosi $\alpha^\varphi \circ \alpha^\varphi = s$ è $(\alpha^2)^\psi = \alpha^\varphi$.

Ancora, avendo presente la (A) e quanto di già provato, risulta

$$(\alpha^2 \circ \alpha)^\varphi = (\alpha \circ \alpha^2)^\varphi = (\alpha^2)^\varphi \circ (\alpha^2)^\psi = s \circ \alpha^\varphi$$

e

$$s = (\alpha^2)^\varphi = (\alpha^2 \circ \alpha)^\varphi \circ \lambda = (s \circ \alpha^\varphi) \circ \lambda = [s \circ (s \circ \lambda)] \circ \lambda = (s^2 \circ \lambda) \circ \lambda = s^{-1}\,,$$

ossia $s^2 = 1$ che è la contraddizione dovuta. Da α^φ, $\lambda \in F$ e $\alpha^\varphi \circ \lambda = 1 = \alpha^\varphi \lambda$ segue $\alpha^\varphi = \lambda^{-1}$.

Da (A) con $m = 1$, tenuto conto che $\alpha^\varphi = \lambda^{-1} \in F$ si ottiene $x^\psi = \lambda \circ x^\varphi$, quindi $(x, y)^\chi = (\lambda \circ x^\varphi, y^\varphi)$.

Essendo $(m \circ x)^\varphi = m^\delta \circ (\lambda \circ x^\varphi)$, $m, x \in K$, con $x = 1$ è $m^\varphi = m^\delta \circ \lambda = \lambda \circ m^\delta$ poichè $\lambda \in F$: se ne deduce $m^\delta = \lambda^{-1} \circ m^\varphi$ e risulta $(a \circ b)^\varphi = (\lambda^{-1} \circ a^\varphi) \circ (\lambda \circ b^\varphi)$ se $a, b \in K$.

Da $(a, a + b) \in [1, b]'$, se $a, b \in K$, segue $\big(\lambda \circ a^\varphi, (a + b)^\varphi\big) \in [\lambda^{-1}, b^\varphi]'$, $(a + b)^\varphi = \lambda^{-1} \circ (\lambda \circ a^\varphi) + b^\varphi$ e φ, poichè $\lambda \in F$, è automorfismo additivo.

Osservazione III. Il precedente lemma si può invertire, ossia, come facilmente si verifica, se $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$ e se $\varphi\colon K \to K$ ($\varrho\colon J \to J$) è automorfismo additivo per il quale, con $a, b \in K$ ($a, b \in J$), risulta

$$(a \circ b)^\varphi = (\lambda^{-1} \circ a^\varphi) \circ (\lambda \circ b^\varphi)\,, \qquad \big((ab)^\varrho = (\lambda^{-1} a^\varrho)(\lambda b^\varrho)\big)\,,$$

esiste una collineazione χ di π (di Π, e χ fissa la retta l e la direzione U) per la quale si ha $(0, 0)^\chi = (0, 0)$, $(1, 1)^\chi = (\lambda, 1)$ e la cui azione sui punti propri di π (di Π) è così definita: $(x, y)^\chi = (\lambda \circ x^\varphi, y^\varphi)$ se (x, y) è punto proprio di π $\big((x, y)^\chi = (\lambda x^\varrho, y^\varrho)$ se (x, y) è punto proprio di $\Pi\big)$.

Lemma 11. *Siano $f\colon K = J \to K = J$ un automorfismo additivo (per definizione, $K(+) = J(+)$) e $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$. Per l'applicazione f sono equivalenti le affermazioni:*

i) *se $x, y \in K(+, \circ)$ risulta $(x \circ y)^f = (\lambda^{-1} \circ x^f) \circ (\lambda \circ y^f)$;*

ii) *se $x, y \in J(+, \cdot)$ risulta $(xy)^f = (\lambda^{-1} x^f)(\lambda y^f)$.*

Dimostrazione. Ci limitiamo a stabilire che da i) segue ii). Se $a \in K$ è $a \circ x = x \circ a$ per ogni $x \in K$, se (e solo se) $a \in F$; ne deriva che la i), con $x = a \in F$, fornisce $(\lambda^{-1} \circ a^f) \circ (\lambda \circ y^f) = (\lambda^{-1} \circ y^f) \circ (\lambda \circ a^f)$ per ogni $y \in K$, e ciò comporta, come si verifica facilmente, $a^f \in F$ e, quindi, $(a \circ y)^f = a^f y^f$. Pertanto, con $x = x_1 + x_2 \xi \in K$ e $\xi^f = c_1 + c_2 \xi$ $(c_1, c_2 \in F)$ è $x^f = x_1^f + c_1 x_2^f + c_2 x_2^f \xi$: poichè f è surgettiva, è $c_2 \neq 0$, $c_2 F^f = F$, $F^f = F$ e $(K - F)^f = K - F$. Se $x \in K - F$ è $x \circ x = s$ se $-s$ è quadrato in F, $x \circ x = -s$ altrimenti. Da i) con $x = y \in K - F$ si ha $(x \circ x)^f = (\lambda^{-1} \circ x^f) \circ (\lambda \circ x^f) = (z \circ z) \circ \lambda^2$ se $z = \lambda^{-1} \circ x^f$, quindi $z \in K - F$; in conseguenza, risulta $s^f = s \lambda^2$.

Se, infine, $x = x_1 + x_2 \xi$, $y = y_1 + y_2 \xi$ sono elementi di K, si ha

$$\{\sigma[(\lambda^{-1} \circ x^f) \circ (\lambda \circ y^f)]\}^2 - s\{\sigma[(\lambda \circ y^f)]\}^2 = c_2^2[\sigma(xy)^f]^2 - c_2^2 s \lambda^2 \{[\sigma(y)]^f\}^2 =$$
$$= c_2^2\{[\sigma(xy)]^2\}^f - c_2^2 s^f \{[\sigma(y)]^2\}^f = c_2^2\{[\sigma(xy)]^2 - s[\sigma(y)]^2\}^f$$

che assicura che gli elementi $\{\sigma[(\lambda^{-1} \circ x^f) \circ (\lambda \circ y^f)]\}^2 - s\{\sigma[(\lambda \circ y^f)]\}^2$ e $[\sigma(xy)]^2 - s[\sigma(y)]^2$ di F sono contemporaneamente (zero o) quadrati in F, oppure non quadrati. Tale osservazione permette ovviamente di concludere che l'ipotesi i) implica l'affermazione ii).

Lemma 12. *Sia* $\mathbf{P} = \{(x, y) | x, y \in J\}$ *l'insieme dei punti propri del piano di traslazione* Π *che, poichè* $K = J$, *coincide con* $\{(x, y) | x, y \in K\}$, *insieme dei punti propri del piano* π. *Se* $g \colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ *è applicazione bigettiva, sono equivalenti le seguenti affermazioni*:

j) *esiste una (unica) collineazione* χ *del piano* Π *per la quale si ha* $(x, y)^\chi = (x, y)^g$, *se* $(x, y) \in \mathbf{P}$, $U^\chi = U$ *e* $l^\chi = l$;

jj) *esiste una (unica) collineazione* χ *del piano* π *per la quale si ha* $(x, y)^\chi = (x, y)^g$ *se* $(x, y) \in \mathbf{P}$.

Dimostrazione. Per il Lemma 9, non è restrittivo supporre che $J = J(F, s)$ $\big(K = K(F, s)\big)$ sia definito assumendo $s \neq -1$.

Inoltre, per il Lemma 7, nella ipotesi jj) deve risultare $l^\chi = l$, $U^\chi = U$.

Al n. 1, Lemma 1, abbiamo osservato che le trasformazioni (1.5) definiscono un gruppo di applicazioni $f \colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ ciascuna delle quali si estende a una collineazione di π; è facile verificare (se si vuole, consultando [6]) che ogni tale f si estende anche ad una collineazione di Π la quale fissa la retta l ed il punto U. Ne deriva che non è restrittivo sostituire g con l'applicazione da essa ottenuta componendola con opportune applicazioni f del gruppo (1.5). L'appartenenza dell'applicazione $(x, y) \to (x, y + a)$ $(x, y \in K$, a in K comunque fissato) al gruppo (1.5) garantisce che si può supporre $(0, 0)^g = (0, 0)$. In più, il gruppo (1.5) contiene un sottogruppo che fissa $(0, 0)$ ed è transitivo sui punti (propri) di l diversi da $(0, 0)$; possiamo, cioè, supporre $(0, 1)^g = (0, 1)$.

Nell'ipotesi j) (nell'ipotesi jj)) deve risultare $(1, 1)^g = (\lambda, 1)$ con $\lambda \in K = J$, $\lambda \neq 0$ e si deve avere, per il Lemma 10, $\lambda \in F$ e

$$(x, y)^g = (\lambda x^\varrho, y^\varrho)\,, \qquad \big((x, y)^g = (\lambda \circ x^\varphi, y^\varphi)\big) \qquad \text{se } (x, y) \in \mathbf{P}\,,$$

essendo $\varrho\colon J \to J$ $(\varphi\colon K \to K)$ un automorfismo additivo ed avendosi $(xy)^\varrho = (\lambda^{-1}x^\varrho)(\lambda y^\varrho)$ se $x, y \in J$ $\big((x \circ y)^\varphi = (\lambda^{-1} \circ x^\varphi) \circ (\lambda \circ y^\varphi)$ se $x, y \in K\big)$.

Per il Lemma 11, deve essere $(x \circ y)^\varrho = (\lambda^{-1} \circ x^\varrho) \circ (\lambda \circ y^\varrho)$ se $x, y \in K = J$ $\big((xy)^\varphi = (\lambda^{-1}x^\varphi)(\lambda y^\varphi)$ se $x, y \in J = K\big)$ e l'Osservazione III assicura l'esistenza di una (unica) collineazione di π (di Π) la cui azione sui punti propri di π (di Π) è definita ponendo $(x, y) \to (\lambda \circ x^\varrho, y^\varrho)$ se $(x, y) \in \mathbf{P}$ $\big((x, y) \to (\lambda x^\varphi, y^\varphi)$ se $(x, y) \in \mathbf{P}\big)$. Tale applicazione da $\mathbf{P}$ a $\mathbf{P}$ coincide con g, poichè, essendo $\lambda \in F$, è $\lambda \circ x^\varrho = \lambda x^\varrho$ se $x \in K$ $(\lambda x^\varphi = \lambda \circ x^\varphi$ se $x \in J)$. Il lemma è, così, dimostrato.

Il piano Π, definito dal quasicorpo di Hall $J(F, s)$, possiede (come subito si verifica) una sola collineazione non identica ω che è a quadrato identico, che fissa ogni punto della retta l ed il punto U; l'azione di ω sui punti propri di Π è così definita: $(x, y)^\omega = (-x, y)$ se $x, y \in J$. Premesso ciò, sussiste il

TEOREMA. *Siano Π il piano di traslazione definito dal quasicorpo di Hall $J(F, s)$, π il piano individuato dal sistema cartesiano $K(F, s)$, $\Omega(\Pi)$, risp. $\Omega(\pi)$, il gruppo delle collineazioni di Π, risp. π.*

Esiste un monomorfismo (di gruppi) $\Omega(\pi) \to \Omega(\Pi)$ e l'immagine di $\Omega(\pi)$ in tale monomorfismo è il centralizzante di ω in $\Omega(\Pi)$.

DIMOSTRAZIONE. Assumendo per π, Π il modello fissato all'inizio del n. 2, indichiamo con $\mathbf{P}$ l'insieme dei punti propri di π che (come insieme) coincide con l'insieme dei punti propri di Π.

Sia $\alpha \in \Omega(\pi)$; poichè π appartiene alla classe II di H. Lenz (Lemma 8) e risulta $\big(V, [\infty]'\big)$-transitivo, α definisce un'applicazione $a\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$, ponendo $(x, y)^a = (x, y)^\alpha$ se $(x, y) \in \mathbf{P}$, e a è applicazione bigettiva.

Per il Lemma 12 è determinata una collineazione α' di Π, $\alpha' \in \Omega(\Pi)$, e risulta $l^{\alpha'} = l$ e $U^{\alpha'} = U$. Se $\alpha, \beta \in \Omega(\pi)$ si ha $(\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$

e, se $\alpha \neq \beta$, deve essere $\alpha' \neq \beta'$, poichè l'azione di una collineazione sui punti propri di un piano individua la collineazione: ossia, $\alpha \to \alpha'$, se $\alpha \in \Omega(\pi)$, definisce un monomorfismo (di gruppi) $\Omega(\pi) \to \Omega(\Pi)$. Risulta $\alpha'\omega = \omega\alpha'$: infatti, essendo $U^{\alpha'} = U$, $l^{\alpha'} = l$, $\alpha'\omega\alpha'^{-1}$ è collineazione di Π non identica che fissa il punto U, ogni punto della retta l e il cui quadrato è la collineazione identica di Π; per quanto osservato immediatamente prima dell'enunciato del teorema, deve essere

$$\alpha'\omega\alpha'^{-1} = \omega .$$

Per concludere, sia $\chi \in \Omega(\Pi)$ e si abbia $\chi\omega = \omega\chi$. Poichè Π appartiene alla classe IV di H. Lenz ed è $([\infty], [\infty])$-transitivo, χ definisce, con la sua azione su $\mathbb{P}$, una applicazione bigettiva g: $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$. Se P è punto proprio di l è $(P^{\chi})^{\omega} = (P^{\omega})^{\chi} = P^{\chi}$: ciò comporta $l^{\chi} = l$, $V^{\chi} = V$. Inoltre, $(U^{\chi})^{\omega} = (U^{\omega})^{\chi} = U^{\chi}$, $U^{\chi} \neq V$, $U^{\chi} \in [\infty]$ forniscono $U^{\chi} = U$. Per il Lemma 12, esiste $\alpha \in \Omega(\pi)$ la cui azione sopra i punti $\mathbb{P}$ coincide con quella di g, ed è individuata $\alpha' \in \Omega(\Pi)$, immagine di α nel monomorfismo $\Omega(\pi) \to \Omega(\Pi)$ già definito, risultando $P^{\alpha'} = P^{g} = P^{\chi}$ se $P \in \mathbb{P}$; ciò significa $\alpha' = \chi$ e il teorema è compiutamente dimostrato.

Osservazione IV. Il precedente teorema, risp. il Lemma 12, consente di scrivere il gruppo delle collineazioni del piano π; perciò, è sufficiente considerare il gruppo $\Omega(\Pi)$ delle collineazioni del piano di M. Hall definito dal quasicorpo $J(F, s)$ (il gruppo $\Omega(\Pi)$ è determinato in [6]) e calcolare il centralizzante di ω in $\Omega(\Pi)$, risp. gli elementi di $\Omega(\Pi)$ che fissano la retta l e il punto U di Π.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Bartolozzi, *Sopra una classe di piani finiti (R, r)-transitivi*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat., VIII, **39** (1965), pp. 245-248.

[2] D. R. Hughes, *Collineation groups of non-desarguesian planes, I*, Amer. J. Math., **81** (1959), pp. 921-938.

[3] T. V. S. Jagannathan, *Ordered projective planes*, J. Ind. Math. Soc., **36** (1972), pp. 65-78.

[4] H. Lenz, *Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen*, Jber. Deutsche Math. Ver., **57** (1954), pp. 20-31.

[5] T. G. OSTROM, *Finite planes with a single (p, L)-transitivity*, Arch. Math., **15** (1964), pp. 378-384.
[6] G. PANELLA, *Le collineazioni nei piani di Marshall Hall*, Riv. Mat. Univ. Parma, (2), **1** (1960), pp. 171-184.
[7] G. PANELLA, *Osservazioni sulla costruzione dei piani di Hughes*, Rend. Mat. e App., **23** (1964), pp. 331-350.
[8] G. PANELLA, *Una classe di sistemi cartesiani*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. e nat., VIII, **38** (1965), pp. 480-485.
[9] G. PICKERT, *Projektive Ebenen*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York (1975).
[10] G. PICKERT, *Die cartesischen Gruppen der Ostrom-Rosati-Ebenen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **30** (1967), pp. 106-117.
[11] L. A. ROSATI, *Su una nuova classe di piani grafici*, Ricerche Mat., **13** (1964), pp. 39-55.
[12] B. SEGRE, *Lectures on Modern Geometry* (con appendice di L. Lombardo-Radice), Cremonese, Roma (1961).
[13] H. ZASSENHAUS, *Über endliche Fastkörper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **11** (1935), pp. 187-220.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 dicembre 1977.