

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNA MARIA BRESQUAR

**Su alcuni criteri di oscillazione per le equazioni
differenziali lineari del secondo ordine**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 63 (1980), p. 185-198

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__185_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Su alcuni criteri di oscillazione per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

ANNA MARIA BRESQUAR (*)

SUMMARY - Sufficient conditions for oscillation of the equation $(r(t)y')' + q(t)y = 0$, when $\int_a^{+\infty} r^{-1}(s) ds < +\infty$, are given.

1. - Introduzione.

Si consideri l'equazione

$$(1) \quad (r(t)y'(t))' + q(t)y = 0 \quad \left(' = \frac{d}{dt} \right)$$

dove $r(t) > 0$, $r(t) \in C^1[a, +\infty)$, $q(t) \in C[a, +\infty)$.

È noto che se

$$(2) \quad \int_a^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty, \quad \int_a^{+\infty} q(t) dt = +\infty$$

l'equazione (1) è oscillante ⁽¹⁾; se invece

$$(3) \quad \int_a^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} < +\infty, \quad \left| \int_a^{+\infty} q(t) dt \right| < +\infty$$

l'equazione (1) non è oscillante.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata dell'Università, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.A.F.A.

⁽¹⁾ In questo lavoro, per comodità di studio, considero solo l'oscillazione su una semiretta.

Per ottenere criteri di oscillazione (o di non oscillazione) nel caso in cui uno solo degli integrali

$$(4) \quad \int_a^t \frac{ds}{r(s)}, \quad \int_a^t q(s) ds$$

diverga è spesso utile usare una trasformazione di Kummer

$$(5) \quad \begin{cases} \tau = \varphi(t) \\ y(t) = \psi(t)x(\tau) . \end{cases}$$

Naturalmente si suppone ⁽²⁾

$$(5') \quad \varphi(t) \in C^2[a, +\infty), \quad \varphi'(t) > 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty,$$

$$(5'') \quad \psi(t) \in C^2[a, +\infty), \quad \psi(t) \neq 0 \quad t \geq a,$$

di modo che il problema di sapere se l'equazione (1) è oscillante o no si trasporta nello stesso problema per l'equazione trasformata

$$(6) \quad \frac{d}{d\tau} \left(R(\tau) \frac{dx}{d\tau} \right) + Q(\tau)x = 0,$$

dove

$$(6') \quad R(\varphi(t)) = r(t)\varphi'(t)\psi^2(t),$$

$$(6'') \quad Q(\varphi(t)) = [(r(t)\psi'(t))' + q(t)\psi(t)]\psi(t)[\varphi'(t)]^{-1}.$$

Può accadere, come già puntualizzò Leighton [6], che quando uno solo degli integrali (4) è divergente i corrispondenti integrali per l'equazione (6) siano entrambi convergenti o entrambi divergenti, da cui l'utilità della trasformazione di Kummer. Scegliendo, come è sempre possibile,

$$(7) \quad \tau = \varphi(t) = \int_a^t \frac{ds}{r(s)\psi^2(s)}$$

⁽²⁾ In alcuni testi si trova $\varphi \in C^1[a, +\infty)$, il che è evidentemente una svista.

con l'ipotesi

$$(7') \quad \int_{+\infty}^{\infty} \frac{dt}{r(t)\psi^2(t)} = +\infty,$$

l'equazione trasformata diventa

$$(8) \quad \frac{d^2x}{d\tau^2} + p(\tau)x = 0 \quad \tau \in [\varphi(a), +\infty)$$

dove

$$(8') \quad p[\varphi(t)] = [(r(t)\psi'(t))' + q(t)\psi(t)]\psi^3(t)r(t).$$

Di modo che la condizione

$$(9) \quad \int_{+\infty}^{\infty} p(\tau)d\tau = +\infty$$

costituisce un criterio di oscillazione ⁽³⁾ per l'equazione (1).

Essa si può scrivere utilmente, tornando alla variabile t ,

$$(10) \quad \int_{+\infty}^{\infty} p(\tau)d\tau = \int_{+\infty}^{\infty} [(r(t)\psi'(t))' + q(t)\psi(t)]\psi(t)dt = +\infty.$$

In questo ordine di idee variando la scelta della funzione ψ il Willett [13] ha scritto alcuni interessanti criteri.

Il criterio V a pag. 272 di [13] è sfortunatamente errato. Esso corrisponde al caso

$$\int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} < +\infty$$

ed alla scelta

$$(11) \quad \psi(t) = L_n^{1/2}(\bar{R}(t)), \quad \bar{R}(t) = \left\{ \int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} \right\}^{-1},$$

⁽³⁾ Il criterio è invertibile nel senso che: se l'equazione (1) è oscillante esiste una funzione $\psi > 0$, $\psi \in C^2[a, +\infty)$ tale che le (7'), (9) siano verificate, vedi Moore [8], p. 126.

dove si ponga

$$(11') \quad \begin{cases} l_0(u) = u \\ l_n(u) = \log l_{n-1}(u) & n = 1, 2, \dots \\ L_n(u) = \prod_{k=0}^n l_k(u) & n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

Ponendo ancora

$$(11'') \quad q_n(u) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n \frac{1}{L_k^2(u)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

questa scelta porterebbe, secondo l'Autore, al criterio: l'equazione (1) è oscillante se esiste un intero non negativo n tale che

$$(12) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[q(t) - \frac{\bar{R}^4(t)}{r(t)} q_n(\bar{R}(t)) \right] L_n(\bar{R}(t)) dt = +\infty,$$

condizione corrispondente alla verifica della (10) ⁽⁴⁾.

Sfortunatamente la (7') non è verificata, essendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{r(t)\psi^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{r(t)L_n(\bar{R}(t))} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 L_n(u)} < +\infty,$$

dove si è posto $\bar{R}(t) = u$.

Oltre la dimostrazione, è il criterio stesso che non sussiste, come dimostra il controesempio del paragrafo 2.

Segue nel paragrafo 3 una proposta di sostituzione del criterio V di Willett, ottenuta mediante una scelta opportuna di $\psi(t)$. Inoltre nel paragrafo 4 viene proposto un altro criterio di oscillazione di tipo diverso dal precedente, ma ad esso collegato.

⁽⁴⁾ In realtà la (10) darebbe la condizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[q(t) - q_n(\bar{R}(t)) \frac{\bar{R}^4(t)}{r(t)} \right] L_n(\bar{R}(t)) + \frac{\bar{R}^3(t)}{r(t)} \left[\frac{dL_n(\bar{R})}{d\bar{R}} \right] \circ \bar{R}(t) \right\} dt = +\infty$$

per la quale la (12) è condizione solo sufficiente.

2. - Controesempio.

L'equazione

$$(13) \quad (t^2 y')' + t^2 q_{n+1}(t) y = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

con $q_{n+1}(t)$ definita da (11''), non è oscillante mentre il corrispondente integrale (12) è divergente.

Infatti la (13) ammette la soluzione $y = t^{-1} L_n^{1/2}(t)$.

Mentre si ha

$$\bar{R}(t) = \left\{ \int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} \right\}^{-1} = t$$

e la condizione (12) diviene

$$\int_t^{+\infty} t^2 [q_{n+1}(t) - q_n(t)] L_n(t) dt = \int_t^{+\infty} \frac{t^2}{4L_n(t) L_{n+1}^2(t)} dt = +\infty.$$

3. - Proposta di un criterio sostitutivo.

Supposto come in Willett [13] criterio V (pag. 272)

$$(14) \quad \int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} < +\infty, \quad \bar{R}(t) = \left\{ \int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} \right\}^{-1},$$

scegliamo

$$(14') \quad \psi(t) = \frac{L_n^{1/2}(\bar{R}(t))}{\bar{R}(t)}.$$

Si ha allora, posto $\bar{R}(t) = u$,

$$\int_t^{+\infty} \frac{dt}{r(t) \psi^2(t)} = \int_t^{+\infty} \frac{\bar{R}^2(t)}{r(t) L_n(\bar{R}(t))} dt = \int_t^{+\infty} \frac{du}{L_n(u)} = +\infty,$$

mentre la (10) diviene

$$(15) \quad \int^{+\infty} \left\{ q(t) \frac{L_n(\bar{R}(t))}{\bar{R}^2(t)} + L_n^{1/2}(\bar{R}(t)) \left[\left(\frac{d^2}{d\bar{R}^2} L_n^{1/2}(\bar{R}) \right) \circ \bar{R}(t) \right] \frac{d\bar{R}(t)}{dt} \right\} dt = +\infty.$$

La (15), ricordando che $L_n^{1/2}(t)$ è soluzione dell'equazione $u''(t) + q_n(t)u = 0$, fornisce per la (1) il seguente *criterio*:

l'equazione (1) è oscillante se esiste un intero n non negativo tale che

$$(16) \quad \int^{+\infty} \left\{ \frac{q(t)}{\bar{R}^2(t)} - \frac{\bar{R}^2(t)}{r(t)} q_n(\bar{R}(t)) \right\} L_n(\bar{R}(t)) dt = +\infty.$$

ESEMPIO. Si consideri l'equazione

$$(17) \quad (t^2 y')' + t^2 \left[q_{p-1}(t) + \frac{k^*}{4L_p^2(t)} \right] y = 0$$

$$(p = 1, 2, \dots, k^* = 1 + 4c^2, c > 0),$$

che con la condizione scritta per k^* è oscillante ed ammette le soluzioni

$$y_1 = t^{-1} L_p^{1/2}(t) \cos [cl_{p+1}(t)], \quad y_2 = t^{-1} L_p^{1/2}(t) \sin [cl_{p+1}(t)].$$

Il criterio (16) è applicabile se si sceglie $n \geq p$, non è applicabile se si considera $n \leq p - 1$.

Si ha infatti dalle (14)

$$\bar{R}(t) = t$$

e la (16) per $n = p$ fornisce

$$c^2 \int^{+\infty} \frac{dt}{L_p(t)} = +\infty,$$

mentre per $n = p - 1$ fornisce

$$\frac{k^*}{4} \int^{+\infty} \frac{dt}{L_{p-1}(t)L_p^2(t)} = \left[-\frac{k^*}{4L_p(t)} \right]^{+\infty} < +\infty.$$

Scelto ora $n = p + h$ con $h = 1, 2, \dots$ la (16) diviene

$$\int^{+\infty} \left[q_{p-1}(t) + \frac{k^*}{4L_p^2(t)} - q_{p+h}(t) \right] L_{p+h}(t) dt > A \int^{+\infty} \frac{\prod_{\alpha=p+1}^{p+h} l_\alpha(t)}{L_p(t)} dt = +\infty,$$

con A costante opportuna e su una opportuna semiretta.

Invece per $n = p - 1 - h$ con $h = 1, 2, \dots$ la (16) diviene

$$\int^{+\infty} \left[q_{p-1}(t) + \frac{k^*}{4L_p^2(t)} - q_{p-1-h}(t) \right] L_{p-1-h}(t) dt < A \int^{+\infty} \frac{dt}{L_{p-h-1}(t) l_{p-h}^2(t)} < +\infty,$$

con A costante opportuna e su una opportuna semiretta.

Ci si può chiedere il motivo della scelta (14') di $\psi(t)$. Lo spirito del criterio V del Willett [13] era che per $n = 0$ $\psi(t)$ fosse di ordine $\{\bar{R}(t)\}^{1/2}$ e desse in questo caso un criterio di oscillazione per la (1) analogo a quello fornito dal criterio II del Willett [13] per $n = 0$ nel caso

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty.$$

Come già detto tale scelta di $\psi(t)$ non è possibile perchè non soddisfa la (7'); si può invece scegliere $\psi(t) = \{\bar{R}(t)\}^{-1/2}$ come si ottiene dalla (14') per $n = 0$.

Il criterio II del Willett è il seguente; posto

$$R(t) = \int^t r^{-1}(s) ds, \quad \text{con} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = +\infty,$$

l'equazione (1) è oscillante se esiste un intero non negativo n tale che

$$(18) \quad \int^{+\infty} \left[q(t) - \frac{1}{r(t)} q_n(R(t)) \right] L_n(R(t)) dt = +\infty.$$

Esso per $n = 0$ fornisce il criterio

$$(19) \quad \int^{+\infty} \left\{ q(t) \int^t \frac{ds}{r(s)} - \frac{1}{4r(t)} \left\{ \int^t \frac{ds}{r(s)} \right\}^{-1} \right\} dt = +\infty.$$

Effettivamente la (16) per $n = 0$ fornisce

$$(20) \quad \int_0^{+\infty} \left\{ q(t) \int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} - \frac{1}{4r(t)} \left[\int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} \right]^{-1} \right\} dt = +\infty,$$

analoga alla (19).

Tutto ciò in accordo con il lavoro di Moore [8] che contiene implicitamente nel teorema 7 quanto sarebbe sufficiente per stabilire i criteri (19) e (20), corrispondenti alle trasformazioni di Kummer da lui citate

$$\begin{cases} \tau = t \\ y(t) = \left\{ \int_t^{+\infty} \frac{ds}{r(s)} \right\}^{\frac{1}{2}} x(\tau) \end{cases} \quad \begin{cases} \tau = t \\ y(t) = \left\{ \int_t^t \frac{ds}{r(s)} \right\}^{\frac{1}{2}} x(\tau). \end{cases}$$

Ovviamente la funzione $\psi(t)$ data da (14') non è l'unica che coincide con $[\bar{R}(t)]^{-1/2}$ per $n = 0$, ma tale funzione ha il vantaggio di rendere semplicissimo il calcolo della (10) e di avere ordine di infinitesimo decrescente al crescere di n . Questo ultimo fatto dovrebbe in generale rendere migliore il criterio (16) al crescere di n . Ad esempio la scelta $\psi(t) = L_n^{-1/2}(\bar{R}(t))$ dà un criterio che peggiora al crescere di n . Infatti, eliminati i termini ad integrale convergente, si riduce a

$$\int_0^{+\infty} \left\{ q(t) - \frac{\bar{R}^2(t)}{4r(t)} \right\} \frac{dt}{L_n(\bar{R}(t))} = +\infty.$$

4. - Secondo criterio di oscillazione.

Nel paragrafo 3 abbiamo visto che l'equazione (1) è oscillante se è verificata la (16) cioè se esiste un intero non negativo n tale che

$$\int_0^{+\infty} \left\{ \frac{q(t)}{\bar{R}^2(t)} - \frac{\bar{R}^2(t)}{r(t)} q_n(\bar{R}(t)) \right\} L_n(\bar{R}(t)) dt = +\infty \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Nel caso che questo integrale converga nel senso di Cauchy-Lebesgue, ferme restando le altre ipotesi su $r(t)$ e $q(t)$, vale il seguente *criterio*:

l'equazione (1) è oscillante se esiste un intero non negativo n tale che

$$(21) \quad \int_t^{+\infty} \left\{ \frac{q(s)}{\bar{R}^2(s)} - \frac{\bar{R}^2(s)}{r(s)} q_n(\bar{R}(s)) \right\} L_n(\bar{R}(s)) ds \geq \frac{k}{l_{n+1}(\bar{R}(t))}$$

con $k > \frac{1}{4}$, per $t > t_0 > a_{n+1}$ con $l_{n+1}(\bar{R}(a_{n+1})) = 0$ ⁽⁵⁾.

Si noti che questa ultima condizione, che è stata aggiunta per semplicità, può sempre essere verificata per ogni n purchè si moltiplichi l'equazione (1) per una costante opportuna, oppure è certamente verificabile dall'equazione (1) per n abbastanza grande.

Preliminare alla dimostrazione del criterio è il seguente teorema dovuto a Taam.

TEOREMA (Taam). Considerate le due equazioni differenziali

$$(22) \quad (r_1(u)y')' + q_1(u)y = 0$$

$$(22') \quad (r_2(u)y')' + q_2(u)y = 0$$

con $r_j \in C^1[a, +\infty)$, $q_j \in C[a, +\infty)$, ($j = 1, 2$), esistano nel senso di Cauchy-Lebesgue gli integrali

$$\int_u^{+\infty} q_j(s) ds \quad (j = 1, 2).$$

Supposto che

$$0 < r_2(u) < r_1(u), \quad r_2(u) \leq A,$$

$$(23) \quad \left| \int_u^{+\infty} q_1(s) ds \right| < \int_u^{+\infty} q_2(s) ds,$$

se la (22') non è oscillante, non lo è nemmeno la (22).

Si utilizzerà per la dimostrazione del criterio (21) il seguente corollario al teorema di Taam.

⁽⁵⁾ Precisamente nel caso $n = 0$ si suppone $l_1(\bar{R}(a_1)) = 0$; nei casi $n = 1, 2, 3, \dots$ si suppone anche $l_n(\bar{R}(a_n)) = 0$.

COROLLARIO. Considerate le due equazioni

$$(24) \quad (h(t)y')' + k_1(t)y = 0$$

$$(24') \quad (h(t)y')' + k_2(t)y = 0,$$

con $0 < h(t) \in C^1[a, +\infty)$, $\int_t^{+\infty} h^{-1}(t) dt = +\infty$, $k_j \in C[a, +\infty)$, $j = 1, 2$, esistano nel senso di Cauchy-Lebesgue gli integrali $\int_t^{+\infty} k_j(s) ds$ e valga la disuguaglianza

$$\left| \int_t^{+\infty} k_1(s) ds \right| < \int_t^{+\infty} k_2(s) ds,$$

allora, se la (24) oscilla, oscilla anche la (24').

Infatti il cambio di variabile

$$u = \int_t^t \frac{ds}{h(s)}$$

riduce questo enunciato al precedente nel caso particolare $r_1(u) = r_2(u) = 1$ (*).

DIMOSTRAZIONE DEL CRITERIO.

a) *Caso* $n = 0$. Si tratta di dimostrare che la condizione

$$(25) \quad \int_t^{+\infty} \left[\frac{q(s)}{\bar{R}(s)} - \frac{\bar{R}(s)}{4r(s)} \right] ds \geq \frac{k}{\log \bar{R}(t)}$$

con $k > \frac{1}{4}$, $t > t_0 > a_1$, $\log \bar{R}(a_1) = 0$ assicura l'oscillazione dell'equazione (1).

Eseguo il solito cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} \tau = \varphi(t) = \int_{a_1}^t \{r(s)\psi^2(s)\}^{-1} ds & \text{con } \psi(t) = \frac{L_0^{1/2}(\bar{R}(t))}{\bar{R}(t)} = \{\bar{R}(t)\}^{-\frac{1}{2}}. \\ y(t) = \psi(t)x(\tau) \end{cases}$$

(*) Questo corollario rientra nel teorema 10 a pag. 16 di [2].

In virtù dell'ipotesi $\log \bar{R}(a_1) = 0$, si ha $\tau = \log \bar{R}(t)$ e l'equazione (1) si muta nella (8) con

$$p(\varphi(t)) = \left[\frac{q(t)}{\bar{R}(t)} - \frac{\bar{R}(t)}{4r(t)} \right] \frac{r(t)}{\bar{R}(t)}$$

di modo che la (25), posto $u = \log \bar{R}(s)$, equivale a

$$(26) \quad \int_{\tau}^{+\infty} p(u) du \geq \frac{k}{\tau}$$

con $k > \frac{1}{4}$, $\tau > \log \bar{R}(t_0) > \log \bar{R}(a_1) = 0$.

D'altra parte la (26), vedi in sostanza Taam [9], costituisce un criterio di oscillazione per la (8) da cui la conclusione.

b) *Casi* $n = 1, 2, 3, \dots$. Fissato un valore di n , si esegua il cambiamento di variabile

$$\begin{cases} \tau = \varphi(t) = \int_{a_n}^t \{r(s)\psi^2(s)\}^{-1} ds & \text{con } \psi(t) = \frac{L_{n-1}(\bar{R}(t))}{\bar{R}(t)} \\ y(t) = \psi(t)x(\tau) \end{cases}$$

L'ipotesi $l_n(\bar{R}(a_n)) = 0$ fornisce $\tau = l_n(\bar{R}(t))$ e l'equazione (1) si muta nella (8) con $p(\tau)$ fornita da (8'). Calcolo ora l'espressione

$$\tau p(\tau) - \frac{1}{4\tau}.$$

Utilizzando i calcoli fatti per ottenere la (16) si ha

$$\begin{aligned} \left\{ \tau p(\tau) - \frac{1}{4\tau} \right\} \circ \varphi(t) &= \left\{ L_n(\bar{R}(t)) \left[\frac{q(t)}{\bar{R}^2(t)} - \frac{\bar{R}^2(t)}{r(t)} q_{n-1}(\bar{R}(t)) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{R}^2(t)}{4L_n(\bar{R}(t))r(t)} \right\} \frac{r(t)L_{n-1}(\bar{R}(t))}{\bar{R}^2(t)} = \\ &= L_n(\bar{R}(t)) \left\{ \frac{q(t)}{\bar{R}^2(t)} - \frac{\bar{R}^2(t)}{r(t)} q_n(\bar{R}(t)) \right\} \frac{r(t)L_{n-1}(\bar{R}(t))}{\bar{R}^2(t)}. \end{aligned}$$

Di modo che la (21), posto $u = l_n(\bar{R}(s))$, equivale a

$$(27) \quad \int_{\tau}^{+\infty} \left\{ u p(u) - \frac{1}{4u} \right\} du \geq \frac{k}{\log \tau}$$

con $k > \frac{1}{4}$, $\tau > l_n(\bar{R}(t_0)) > l_n(\bar{R}(a_{n+1})) = 1$ e tutto si riduce a dimostrare che la (27) è una condizione sufficiente per l'oscillazione dell'equazione (8)

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + p(\tau)x = 0.$$

A tale scopo si considerino infatti le due equazioni

$$(28) \quad \frac{d}{d\tau} \left(\tau \frac{dy}{d\tau} \right) + \left[\tau p(\tau) - \frac{1}{4\tau} \right] y = 0,$$

$$(28') \quad \frac{d}{d\tau} \left(\tau \frac{dy}{d\tau} \right) + \frac{k}{\tau \log^2 \tau} y = 0 \quad \left(k > \frac{1}{4} \right).$$

La sostituzione $y(\tau) = \tau^{-1/2} x(\tau)$ muta la (28) nell'equazione

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + p(\tau)x = 0$$

e la (28') nell'equazione

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \left[\frac{1}{4\tau^2} + \frac{k}{\tau^2 \log^2 \tau} \right] x = 0, \quad \left(k > \frac{1}{4} \right),$$

che è notoriamente oscillante per $k > \frac{1}{4}$. L'applicazione del corollario del teorema di Taam alle (28) e (28'), resa possibile dalla (27), conduce alla conclusione.

ESEMPIO. Si vede subito che il criterio (21) è applicabile all'equazione (17) per $n = p - 1$.

5. - Osservazioni.

La condizione (27)

$$\int_{\tau}^{+\infty} \left\{ up(u) - \frac{1}{4u} \right\} du \geq \frac{k}{\log \tau} \quad \left(k > \frac{1}{4} \right)$$

che assicura l'oscillazione dell'equazione $d^2x/d\tau^2 + p(\tau)x = 0$ migliora un risultato di Wray [15] che ha ottenuto come condizione di oscillazione la doppia disuguaglianza

$$\left(\mu - \frac{1}{2} \right)^2 + \varepsilon + \frac{1}{4} \leq \log \tau \int_{\tau}^{+\infty} \left\{ up(u) - \frac{1}{4u} \right\} du \leq \left(\mu + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} - \varepsilon$$

supposta valida per qualche $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$. Egli inoltre ha ottenuto il risultato che la condizione

$$\frac{1}{4} - \left(\mu + \frac{1}{2} \right)^2 \leq \log \tau \int_{\tau}^{+\infty} \left\{ up(u) - \frac{1}{4u} \right\} du \leq \frac{1}{4} - \left(\mu - \frac{1}{2} \right)^2$$

con $\mu > 0$, assicura la non oscillazione dell'equazione (8).

Si noti che mentre la condizione (26) di oscillazione per l'equazione (8)

$$\int_{\tau}^{+\infty} p(u) du \geq \frac{k}{\tau} \quad \left(k > \frac{1}{4} \right)$$

rientra nel criterio di oscillazione di Hartman

$$(29) \quad \int \exp \left[-4 \int_{\tau}^{\tau} P(s) ds \right] d\tau < +\infty, \quad P(\tau) = \int_{\tau}^{+\infty} p(u) du$$

ciò non è vero per la condizione di oscillazione (27). Infatti l'equazione

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left\{ \frac{1}{4\tau^2} + \frac{k}{\tau^2 \log^2 \tau} \right\} x = 0 \quad \left(k > \frac{1}{4} \right)$$

verifica la (27), ma non la (29).

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. BREUER - D. GOTTLIEB, *Hille-Wintner type oscillation criteria for linear ordinary differential equations of second order*, Ann. Polon. Math., **30** (1975), pp. 257-262.
- [2] W. A. COPPEL, *Disconjugacy*, Lecture Notes in Math., vol. 220, Springer (1971).
- [3] P. HARTMAN, *On nonoscillatory linear differential equations of second order*, Proc. Amer. Math. Soc., **64**, n. 2 (1977), pp. 251-259.
- [4] V. KOMKOV, *A technique for the detection of oscillation of second order ordinary differential equations*, Pacific J. Math., **42**, n. 1 (1972), pp. 105-115.
- [5] K. KREITH, *Oscillation theory*, Lecture Notes in Math., vol. 324, Springer (1973).
- [6] W. LEIGHTON, *The detection of the oscillation of solutions of a second order linear differential equation*, Duke J. Math., **17** (1950), pp. 57-62.
- [7] J. W. MACKI - J. S. W. WONG, *Oscillation theorems for linear second order differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **20** (1969), pp. 67-72.
- [8] R. A. MOORE, *The behavior of solutions of a linear differential equation of second order*, Pacific J. Math., **5** (1955), pp. 125-145.
- [9] C. T. TAAM, *Non-oscillatory differential equations*, Duke Math. J., **19** (1952), pp. 493-497.
- [10] C. C. TRAVIS, *Remarks on a comparison theorem for scalar Riccati equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **52** (1975), pp. 311-314.
- [11] D. WILLETT, *On the oscillatory behavior of the solutions of second order linear differential equations*, Ann. Polon. Math., **21** (1969), pp. 175-193.
- [12] D. WILLETT, *Oscillation on finite or infinite intervals of second order linear differential equations*, Canad. Math. Bull., **14** (1971), pp. 539-550.
- [13] D. WILLETT, da *Lectures on Ordinary Differential Equations*, Edited by R. McKelvey, Academic Press (1970).
- [14] J. S. W. WONG, *Oscillation and nonoscillation of solutions of second order linear differential equations with integrable coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., **144** (1969), pp. 197-215.
- [15] S. D. WRAY, *Integral comparison theorems in oscillation theory*, J. London Math. Soc. (2), **8** (1974), pp. 595-606.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 ottobre 1979.