

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDOARDO BALLICO

## **Fibrati principali su spazi complessi $q$ -completi**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 63 (1980), p. 199-202

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1980\\_\\_63\\_\\_199\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__199_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Fibrati principali su spazi complessi $q$ -completi.

EDOARDO BALLICO (\*)

SUMMARY - Let  $G$  be a Stein group with a finite number of connected components. We prove that a principal bundle with a  $q$ -complete base and  $G$  as structural group is a  $q$ -complete complex space.

Si dimostra che ogni fibrato principale la cui base è uno spazio complesso  $q$ -completo e il cui gruppo strutturale è di Stein e ha un numero finito di componenti connesse, è  $q$ -completo. Il risultato è noto per gli spazi di Stein cioè per gli spazi 0-completi [2].

Per la dimostrazione di questo teorema si usano i risultati e le tecniche di [2] e il seguente

**TEOREMA 1.** *Ogni fibrato vettoriale olomorfo su uno spazio complesso  $q$ -completo è uno spazio complesso  $q$ -completo.*

La dimostrazione di questo teorema data in [3] si estende con lievi cambiamenti dal caso in cui la base è non singolare, che è ivi trattato, al caso generale in cui la base è uno spazio analitico qualsiasi.

**TEOREMA 2.** *Sia  $X$  uno spazio analitico  $q$ -completo,  $G$  un gruppo di Stein con un numero finito di componenti connesse e  $P$  un fibrato principale di base  $X$  e gruppo strutturale  $G$ . Allora  $P$  è  $q$ -completo.*

**DIM.** *a)* Consideriamo dapprima il caso  $G = GL(1, C) = C^*$ . Sia  $p: E \rightarrow X$  il fibrato olomorfo in rette associato a  $P$ . Per il teorema 1,

(\*) Indirizzo dell'A.: Scuola Normale Superiore, Piazza Cavalieri 7, 56100 Pisa.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

$E$  è  $q$ -completo. Inoltre  $P$  è il complementare in  $E$  della sezione nulla.

Nella dimostrazione di [3] del teorema 1 si procede in questo modo. Si prende una opportuna metrica hermitiana  $h$  su  $E$  ed una funzione non negativa  $u$  che definisca la  $q$ -completezza di  $X$ . Allora, indicata con  $z$  la coordinata locale di  $E$  lungo le fibre,  $hz\bar{z} + p^*(u)$  definisce la  $q$ -completezza di  $E$ . Si consideri la funzione  $hz\bar{z} - \log(hz\bar{z})$  definita su  $P$  e ivi non negativa. La sua forma di Levi è, per qualsiasi sistema di coordinate locali in  $E$ , limitata in un intorno di ogni punto di  $E$  e definisce in modo naturale una forma hermitiana continua su  $E$ . Perciò, con una semplice estensione al caso non singolare del lemma 1 di [3], troviamo una funzione differenziale su  $E$   $g \geq hz\bar{z} + p^*(u)$  tale che la forma di Levi della funzione non negativa  $b$  su  $P$  definita da  $b((x, z)) = g - \log(hz\bar{z})$  abbia in ogni punto al massimo  $q$  autovalori negativi o nulli. Inoltre la funzione  $b$  è esaustiva e quindi  $P$  è  $q$ -completo.

b) Sia  $G = SL(n, C)$ . Sia  $P'$  il fibrato principale con gruppo strutturale  $GL(n, C)$  ed  $E$  il fibrato vettoriale associati a  $P$  in modo naturale. Siano  $g_{i,j}(x) \in SL(n, C)$  le funzioni di transizione, rispetto ad opportune trivializzazioni locali, di  $P$ ,  $P'$  ed  $E$ .

Consideriamo il fibrato vettoriale di rango  $n^2$  su  $X$

$$F = \text{Hom}(X \times C^n, E) = E \otimes X \times C^n.$$

$P'$  è l'aperto  $\text{Isom}(X \times C^n, E)$  di  $F$ : un punto di  $F$  appartiene a  $P'$  se è rappresentato da un isomorfismo su di un aperto di  $X$  tra il fibrato triviale  $X \times C^n$  e il fibrato vettoriale  $E$ . Sia  $M(n, n)$  l'insieme delle matrici quadrate di ordine  $n$  sul corpo  $C$  dei complessi.

In una trivializzazione locale, se  $x \in X$  e  $v \in M(n, n)$ , il punto  $(x, v) \in P'$  se e solo se  $\det(v) \neq 0$ .

In ogni trivializzazione di  $F$  sull'aperto  $U$  di  $X$ , è definito il determinante come funzione olomorfa di  $U \times M(n, n)$  in  $C$ . Poichè  $g_{i,j}(x) \in SL(n, C)$ , il determinante induce una funzione olomorfa ben definita  $a$  su  $F$ . Infatti basta provare che se  $\otimes$  indica il prodotto di Kronecker tra matrici e  $G$  agisce su  $M(n, n)$  tramite  $g(b \otimes^t c) = gb \otimes^t c$ , allora  $G$  agisce su  $M(n, n)$  con il prodotto tra matrici. Per linearità basta verificarlo quando  $b$  (risp.  $c$ ) ha tutte le componenti nulle eccetto quelle di posto 1 (risp.  $r$ ); siano  $s^{kt}$  le componenti di indice  $(k, t)$  di una matrice  $c$ ; allora  $gb$  è una matrice  $n \times 1$  con  $(gb)^{k1} = g^{kt}$  e  $(bg \otimes^t c)^{ks} = 0$  se  $s \neq r$ ,  $= g^{kt}$  se  $s = r$ .

Per il teorema 1,  $F$  è uno spazio analitico  $q$ -completo. Ne segue che  $P' = \{y \in F: a(y) \neq 0\}$  è  $q$ -completo; infatti, se  $f$  definisce la  $q$ -completezza di  $F$ ,  $f + 1/a\bar{a}$  definisce la  $q$ -completezza di  $P'$ . Allora  $P$ , come sottospazio analitico chiuso di  $P'$ , è  $q$ -completo.

c) Sia  $G = GL(n, C)$ . Consideriamo il sottogruppo invariante  $SL(n, C)$  di  $GL(n, C)$ . Allora  $GL(n, C)/SL(n, C)$  è isomorfo a  $C^*$ . Per [1] theorem 3.4.4 pag. 44,  $p: P \rightarrow X$  si fattorizza tramite una fibrazione principale localmente banale  $P \rightarrow H$  con gruppo  $SL(n, C)$  ed una fibrazione localmente banale  $H \rightarrow X$  con gruppo  $GL(n, C)$  e fibra  $C^*$ . Poichè  $SL(n, C)$  è invariante ed agisce trivialmente su  $H$ ,  $H \rightarrow X$  è un fibrato principale con gruppo strutturale  $C^*$ .

Quindi  $H$  è  $q$ -completo per  $a$ ); per  $b$ ) anche  $P$  è  $q$ -completo.

d) Sia  $G$  un sottogruppo analitico chiuso di  $GL(n, C)$ ; a  $P$  corrisponde un fibrato principale  $P'$  con gruppo strutturale  $GL(n, C)$  di cui  $P$  è un sottospazio chiuso. Per  $c$ )  $P'$  è  $q$ -completo e quindi tale è anche  $P$ .

e) Nel caso generale sia  $G_0$  la componente connessa dell'identità di  $G$ . Allora  $G_0$  è un sottogruppo chiuso invariante di  $G$  e per ipotesi  $G/G_0$  è un gruppo finito; poichè ogni rivestimento finito e non ramificato di uno spazio  $q$ -completo è  $q$ -completo, ci si riduce come in  $c$ ) a dimostrare il teorema quando  $G$  è connesso.

f) Sia  $G$  un gruppo di Stein connesso. Procediamo per induzione su  $\dim G$ . Se  $\dim G = 1$ ,  $G$  è abeliano ed isomorfo a  $C$  o  $C^*$  per il teorema di struttura dei gruppi connessi abeliani di Stein [2] theorem 1 e prop. 2. Poichè  $C$  è isomorfo ad un sottogruppo chiuso unipotente di  $GL(2, C)$ , il teorema è dimostrato per  $d$ ) se  $\dim G = 1$ .

Sia ora  $\dim G > 1$ . Se  $G$  è semplice, allora è un sottogruppo chiuso di un gruppo lineare [2] prop. 1 e prop. 4 e quindi  $P$  è  $q$ -completo per la parte  $d$ ). Consideriamo la seguente proposizione che, grazie al teorema 1 di [2], è la prop. 7 di [2].

**PROPOSIZIONE.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie complesso, connesso e di Stein. Se  $G$  non è semplice, esiste un sottogruppo complesso chiuso, invariante e connesso  $A$  di  $G$  di dimensione positiva e tale che  $G/A$  è di Stein e  $A$  è un sottogruppo chiuso di un gruppo lineare complesso.*

Da questa proposizione si ottiene la tesi, anche se  $G$  non è semplice, usando l'ipotesi induttiva e ragionando come in  $c$ ). Questo conclude la dimostrazione del teorema. c.v.d.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] F. HIRZEBRUCH, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1966.
- [2] Y. MATSUSHIMA - A. MORIMOTO, *Sur certains espaces fibres holomorphes sur une variété de Stein*, Bull. Soc. Math. France, **88** (1960), pp. 137-455.
- [3] V. VILLANI, *Fibrati vettoriali ologorji su una varietà complessa q-completa*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **3** (1966), pp. 15-23.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 ottobre 1979.