Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Edmondo Morgantini

**Una curiosa proprietà metrica dei quadrilateri piani completi**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 65 (1981), p. 129-133
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__65__129_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 65 (1981)

# Una curiosa proprietà metrica dei quadrilateri piani completi.

EDMONDO MORGANTINI (*)

RIASSUNTO - I segmenti aventi come estremi le 3 coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo del piano euclideo sono diametri di 3 circoli appartenenti ad uno stesso fascio ed ortogonali al circolo circoscritto al triangolo diagonale del quadrangolo.

## 1. Una proprietà triangolare dei circoli di Appollonio ed altre proprietà metriche che ne conseguono.

Sia dato nel piano euclideo reale (che poi converrà pensare ampliato con l'aggiunta dei punti impropri e di quelli complessi) un triangolo $A_1A_2A_3$.

Preso nel piano un punto $P$, restano determinati i rapporti delle distanze $\overline{A_iP}$ di $P$ dai vertici $A_1$, $A_2$, $A_3$. Sussiste allora il seguente:

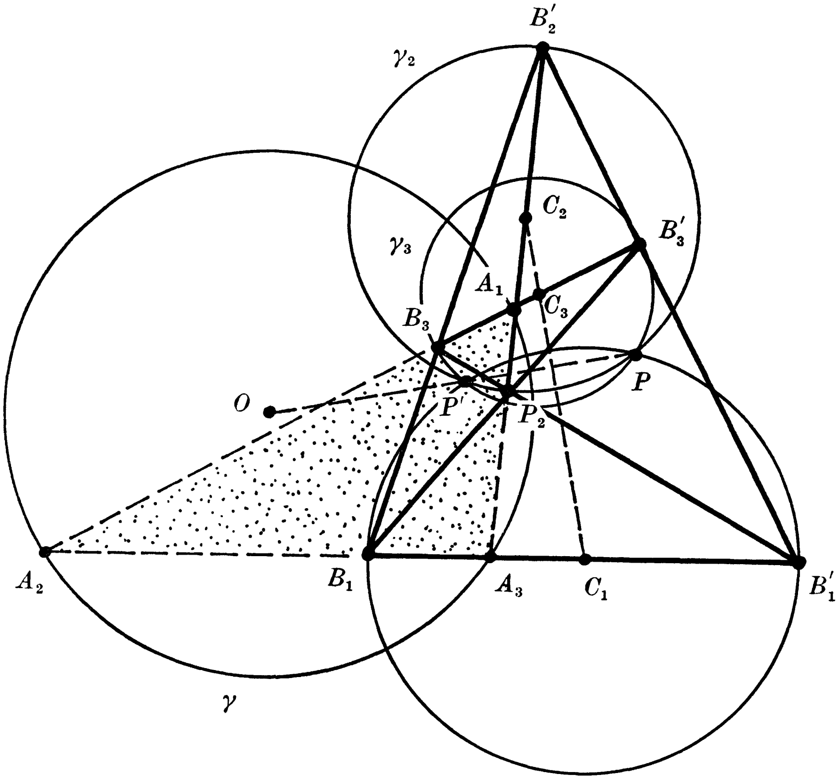
TEOREMA I. Se $P$ non appartiene al circolo $\gamma$ circoscritto ad $A_1A_2A_3$ nè coincide col suo centro $O$, *esiste uno ed un solo punto $P'$ tale che*:

$$\overline{A_1P'}:\overline{A_2P'}:\overline{A_3P'}=\overline{A_1P}:\overline{A_2P}:\overline{A_3P}\,.$$

*Il punto $P'$ è il corrispondente di $P$ nella inversione rispetto al circolo $\gamma$.*

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Algebra e Geometria, Università, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

Infatti (v. fig. 1) si considerino i 3 circoli $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ appartenenti rispettivamente ai 3 fasci $F_1, F_2, F_3$ di punti limite rispettivi $A_2, A_3$; $A_3, A_1$; $A_1, A_2$ e passanti per $P$.




Figg. 1, 2.

Ciascuno dei 3 circoli $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ si può pensare come un «*circolo di Apollonio*», luogo dei punti $P'$ soddisfacenti rispettivamente alle condizioni:

$$\overline{A_2P'} : \overline{A_3P'} = \overline{A_2P} : \overline{A_3P} ,$$

$$\overline{A_3P'} : \overline{A_1P'} = \overline{A_3P} : \overline{A_1P} ,$$

$$\overline{A_1P'} : \overline{A_2P'} = \overline{A_1P} : \overline{A_2P} .$$

D'altra parte i 3 fasci $F_1$, $F_2$, $F_3$ appartengono ad una stessa rete: quella il cui circolo ortotomico contiene i loro punti limite $A_1$, $A_2$, $A_3$ e perciò coincide col circolo $\gamma$ circoscritto al triangolo dato.

Sicchè la condizione (lineare) di passaggio per un punto $P$ (soddisfatta da $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) determina entro la rete un 3° fascio $F$ di circoli, al quale dunque appartengono $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, e del quale $P'$ è l'altro punto base.

L'asse radicale $PP'$ del fascio $F$ è un diametro di $\gamma$, cosicchè $P$ e $P'$ sono allineati col centro $O$ di $\gamma$.

Inoltre ciascuno dei circoli della rete è mutato in sè dall'inversione rispetto al circolo $\gamma$. In particolare lo sono anche $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, cosicchè in quella inversione si corrispondono anche i loro 2 punti comuni $P$ e $P'$, c.v.d.

Da quanto precede consegue (per induzione sull'indice $n$) il seguente:

Teorema II. *Presi $n$ punti $A_1, A_2, \dots, A_n$ su di un circolo $\gamma$, le coppie $P, P'$ di punti corrispondenti nell'inversione rispetto a $\gamma$ sono tali che*:

$$\overline{A_1P'}:\overline{A_2P'}:\dots:\overline{A_nP'} = \overline{A_1P}:\overline{A_2P}:\dots:\overline{A_nP}\,.$$

Da notare che i possibili valori dei rapporti che figurano nei 2 membri della precedente proporzionalità sono tutti e solo quelli che si ottengono facendo assumere ad uno dei 2 punti, ad es. $P$, tutte le posizioni possibili *all'interno* di $\gamma$.

Il Teorema I si può anche esprimere come una proprietà dei circoli di Apollonio. Esso infatti afferma che:

Teorema III. *Dati 3 punti $A_1, A_2, A_3$, per ogni scelta di un punto $P$ del loro piano, appartengono ad uno stesso fascio $F$* (variabile con $P$) *i 3 circoli di Apollonio $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ relativi alle 3 coppie di punti $A_1A_3$, $A_3A_1$, $A_1A_2$ e passanti per $P$. Inoltre, come si è già visto*:

*I 2 punti base $P, P'$ del fascio $F$ si corrispondono nell'inversione rispetto al circolo $\gamma$ circoscritto al triangolo $A_1A_2A_3$.*

## 2. Alcune curiose proprietà metriche dei quadrilateri piani completi.

I 3 circoli $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ segano i lati del triangolo $A_1A_2A_3$, opposti ai vertici di ugual indice, nelle 3 coppie di punti diametralmente opposti $B_1, B_1'$; $B_2, B_2'$; $B_3, B_3'$, e questi dividono internamente ed esternamente nello stesso rapporto i segmenti $A_2A_3$, $A_3A_1$, $A_1A_2$, e precisamente:

$$\overline{A_2B_1}:\overline{A_3B_1} = \overline{A_2B'_1}:\overline{A_3B'_1} = \overline{A_2P}:\overline{A_3P}\,,$$
$$\overline{A_3B_2}:\overline{A_1B_2} = \overline{A_3B'_2}:\overline{A_1B'_2} = \overline{A_3P}:\overline{A_1P}\,,$$
$$\overline{A_1B_3}:\overline{A_2B_3} = \overline{A_1B'_3}:\overline{A_2B'_3} = \overline{A_1P}:\overline{A_2P}\,.$$

Si possono scegliere le notazioni in modo che i punti $B_i$ siano quelli interni e quelli $B'_i$ siano esterni ai rispettivi segmenti (v. fig. 2). Allora sono positivi i rapporti semplici:

$$(2.1)\qquad \begin{cases} (A_2A_3B'_1) = -(A_2A_3B_1) = \overline{A_2P}:\overline{A_3P}\,, \\ (A_3A_1B'_2) = -(A_3A_1B_2) = \overline{A_3P}:\overline{A_1P}\,, \\ (A_1A_2B'_3) = -(A_1A_2B_3) = \overline{A_1P}:\overline{A_2P}\,. \end{cases}$$

Dalle (2.1) si ricava in particolare che:

$$(2.2)\qquad (A_2A_3B'_1)\cdot(A_3A_1B'_2)\cdot(A_1A_2B'_3) = 1\,.$$

Dalla (2.2), per il teorema di Menelao, si deduce che i 3 punti $B'_1$, $B'_2$, $B'_3$ *sono allineati.*

Analogamente si prova, sfruttando le (2.1) ed il teorema di Menelao, che sono allineate anche le altre 3 terne $B'_1B_2B_3$, $B_1B'_2B_3$, $B_1B_2B'_3$.

Si mette così in evidenza un *quadrilatero piano completo,* del quale $B_1, B'_1$, $B_2, B'_2$, $B_3, B'_3$ sono le 3 coppie di vertici opposti ed $A_1A_2A_3$ è il triangolo diagonale.

*Viceversa,* dato un quadrilatero piano completo, di cui $B_1, B'_1$, $B_2, B'_2$, $B_3, B'_3$ siano le 3 coppie di vertici opposti ed $A_1A_2A_3$ il triangolo diagonale, si può sempre supporre di aver scelto le notazioni in modo che $B'_1$, $B'_2$, $B'_3$ siano allineati ed esterni al triangolo $A_1A_2A_3$.

Le note proprietà armoniche dei quadrilateri c'insegnano che le 3 coppie di punti $B_1, B'_1$, $B_2, B'_2$, $B_3, B'_3$ dividono internamente ed esternamente nello stesso rapporto (variabile con la coppia) i 3 segmenti $A_2A_3$, $A_3A_1$, $A_1A_2$.

D'altra parte il teorema di Menelao e l'allineamento delle 4 terne:

$$B'_1, B'_2, B'_3\,,\qquad B'_1, B_2, B_3\,,\qquad B_1, B'_2, B_3\,,\qquad B_1, B_2, B'_3\,,$$

ci assicurano che vale la (2.2).

Inoltre i 3 circoli $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ di diametri $B_1B_1'$, $B_2B_2'$, $B_3B_3'$ sono (di Apollonio, ossia) luogo dei punti $P$ tali che rispettivamente:

$$(2.3) \qquad \begin{cases} \overline{A_2P}:\overline{A_3P} = (A_2A_3B_1') \,, \\ \overline{A_3P}:\overline{A_1P} = (A_3A_1B_1') \,, \\ \overline{A_1P}:\overline{A_2P} = (A_1A_2B_1') \,. \end{cases}$$

Se $P$ è un punto comune a $\gamma_1$ e $\gamma_2$, soddisfa alle prime due (2.3). Moltiplicandole membro a membro e tenendo conto della (2.2), se ne deduce che $P$ soddisfa anche alla terza (2.3), ossia appartiene anche al circolo $\gamma_3$. In altre parole $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono i 3 circoli di Apollonio relativi alle 3 coppie di punti $A_2A_3$, $A_3A_1$, $A_1A_2$ e a quel punto $P$.

Tenendo presente quanto già visto nel n. 1, se ne deduce [1] il seguente:

TEOREMA IV. Dato un quadrilatero piano completo, sia $A_1A_2A_3$ il suo triangolo diagonale e siano $B_1, B_1'$, $B_2, B_2'$, $B_3, B_3'$ le sue tre coppie di vertici opposti [2], appartenenti rispettivamente ai lati opposti ai vertici $A_1$, $A_2$, $A_3$: Siano inoltre $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i 3 circoli di diametri rispettivi $B_1B_1'$, $B_2B_2'$, $B_3B_3'$ e sia $\gamma$ il circolo circoscritto ad $A_1A_2A_3$, di centro $O$. Allora:

1) *I tre circoli $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono ortogonali al circolo $\gamma$.*

2) *I 3 centri $C_1$, $C_2$, $C_3$ di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono allineati.*

3) *I 3 circoli $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ appartengono ad uno stesso fascio $F$.*

4) *I 2 punti base $P$, $P'$ del fascio $F$ sono allineati col punto $O$ e si corrispondono nell'inversione rispetto al circolo $\gamma$.*

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 ottobre 1980.

[1] Ammettendo che il ragionamento precedente valga anche se $P$ non è reale.

[2] Che conviene supporre siano tutti al finito.