Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Maria Grazia Maia

Un primo approccio alla teoria delle funzioni analitiche in un'algebra di misure complesse

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 66 (1982), p. 155-171

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__66__155_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 66 (1981)

Un primo approccio alla teoria delle funzioni analitiche in un'algebra di misure complesse.

MARIA GRAZIA MAIA (*)

Scopo di questo lavoro è l'introduzione ad una possibile teoria delle funzioni analitiche nell'algebra Γ delle misure complesse a supporto in $\mathbb{R}_+$. In [3] è stata introdotta e utilizzata l'algebra locale Λ delle misure reali a supporto in $\mathbb{R}_+$. Tale algebra è dotata di una struttura reticolare completa, e il prodotto di due misure è il prodotto di convoluzione. È evidente l'interesse di un calcolo operazionale in detta algebra, ottenuto per estensione di una funzione analitica reale $f(x)$ ad un certo dominio di elementi di Λ mediante conveniente sviluppo in serie di potenze a coefficienti reali.

Presentiamo un approccio più generale definendo le funzioni analitiche nell'algebra Γ complessificata di Λ ricorrendo alle serie di potenze a coefficienti in Γ.

1. L'algebra Γ complessificata di Λ.

Definiamo Γ come $\mathbb{C}$-algebra ponendo $\Gamma = \mathbb{C} \bigotimes_{\mathbf{R}} \Lambda$. Ogni elemento di Γ si può porre nella forma $\alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \Lambda$. A Γ tuttavia non si può estendere la struttura reticolare presente in Λ; ci limiteremo

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto matematico dell'Università, via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

pertanto a definire il valore assoluto di un elemento di Γ ponendo:

$$|\alpha + i\beta| = \bigvee_{\lambda \in K} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta)$$

dove K è il disco unità: $\lambda \in \mathbf{R}^2$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leqslant 1$.

Osserviamo che si ha, al variare di λ in K:

$$\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta < |\alpha| + |\beta| \qquad \alpha, \beta \in \Lambda.$$

Ne segue che il valore assoluto di un qualunque elemento di Γ esiste sempre ed è un elemento di Λ_+, cono positivo di Λ.

Valgono le seguenti relazioni, se ξ, $\eta \in \Gamma$:

1) $|\xi| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$,

2) $|\xi + \eta| < |\xi| + |\eta|$,

3) $|\xi\eta| < |\xi||\eta|$,

4) $|c\xi| = |c||\xi|$ per $c \in \mathbf{C}$,

5) $|1| = 1$.

Naturalmente $\mathbf{C}$ è considerato come sottocorpo di Γ. Come per gli elementi di Λ (cfr. [3]), converrà introdurre la notazione $\xi(t)$, ξ essendo un elemento di Γ, per indicare la funzione di ripartizione della misura complessa ξ. $\xi(t)$ è una funzione complessa a variazione localmente limitata, nulla per $t < 0$ e continua a destra in ogni punto. La funzione di ripartizione che caratterizza completamente la misura permette di definire in modo equivalente il valore assoluto di ξ tramite la sua funzione di ripartizione, essendo:

$|\xi|(t) =$ variazione totale della funzione $\xi(t)$ nell'intervallo $-\infty \dashv t$.

Per ogni $\tau \in \mathbf{R}_+$ porremo:

$$|\xi|_\tau = |\xi|(\tau)\,.$$

Al variare di τ in $\mathbf{R}_+$ o anche in $\mathbf{N}$, $|\cdot|_\tau$ descrive una famiglia di seminorme in Γ.

Con tale definizione del valore assoluto l'algebra Γ diviene uno spazio pseudo-normato e come tale uno spazio metrico nella metrica di Fréchet associata alla famiglia di seminorme:

$$\operatorname{dist}(\xi, \eta) = \sum_n 2^{-n} \frac{|\xi - \eta|_n}{1 + |\xi - \eta|_n} .$$

Essendo Λ un'algebra locale, anche Γ è un'algebra locale e il suo ideale massimo, che indicheremo con $\mathfrak{M}_\Gamma$, è costituito dagli elementi della forma $\alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in J$ (dove J è l'ideale massimo di Λ). La proiezione canonica:

$$\pi \colon \Gamma \to \Gamma/\mathfrak{M}_\Gamma = \mathbf{C}$$

si identifica con l'assegnazione: $\xi \mapsto \xi(0)$. $\mathfrak{M}_\Gamma$ pertanto è costituito dagli elementi ξ il cui « valore iniziale » $\xi(0)$ è nullo.

In generale i dominî naturali in cui considereremo definite le funzioni analitiche saranno tutti della forma $\pi^{-1}U$ dove U è un aperto di $\mathbf{C}$. Tali dominî sono aperti in Γ e hanno la stessa connessione topologica di U, essendo questo un retratto omotopico di $\pi^{-1}U$. Siffatti aperti verranno nel seguito denominati π-dominî. In particolare chiameremo π-disco in Γ di raggio $\varrho > 0$ la controimmagine mediante π del disco aperto in $\mathbf{C}$ dello stesso raggio (centrato in 0). Nell'algebra Γ, essendo uno spazio pseudo-normato, si possono introdurre nozioni di (o)-convergenza e $(*)$-convergenza che si ricollegano con le nozioni omonime considerate solitamente in spazi di Riesz (cfr. [5]).

Diremo (o)-convergente verso ξ una successione $(\xi_n)_n$ di elementi di Γ ($\xi_n \xrightarrow{(o)} \xi$), tale che:

$$\bigwedge_{n \geqslant 0} \bigvee_{p \geqslant 0} |\xi_{n+p} - \xi| = 0$$

Diremo $(*)$-convergente verso ξ una successione $(\xi_n)_n$ di elementi di Γ ($\xi_n \xrightarrow{(*)} \xi$) tale che ogni sottosuccessione di $(\xi_n)_n$ contenga a sua volta una sottosuccessione (o)-convergente verso ξ. È ovvio che queste nozioni di convergenza equivalgono alla convergenza a zero nei rispettivi sensi di $|\xi_n - \xi|$.

TEOREMA 1. *La $(*)$-convergenza in Γ equivale alla convergenza rispetto alla famiglia di seminorme ovvero rispetto alla metrica associata.*

Per l'osservazione fatta dianzi ci basterà far riferimento a successioni infinitesime. Dimostriamo intanto che ogni successione infinitesima metricamente contiene una sottosuccessione (o)-convergente a zero.

Sia $\xi_n \to 0$ secondo la metrica; allora per ogni $\tau \in \mathbb{R}_+$ è infinitesima la successione $|\xi_n|_\tau$ di numeri reali. Poniamo $\tau = 1$ ed estraiamo una sottosuccessione

(1) $$\xi_{1,1},\ \xi_{1,2},\ \ldots,\ \xi_{1,n},\ \ldots$$

tale che risulti convergente la serie di seminorme

$$\sum_{n\geq 1} |\xi_{1,n}|_1 \,.$$

Dalla (1) estraiamo una sottosuccessione $(\xi_{2,n})_n$ per la quale converge la serie

$$\sum_{n\geq 1} |\xi_{2,n}|_2$$

e cosí di seguito; avremo la seguente sequenza di sottosuccessioni:

$$\begin{array}{cccccc}
\xi_{1,1}, & \xi_{1,2}, & \xi_{1,3} & \cdots & \xi_{1,n} & \cdots \\
\xi_{2,1}, & \xi_{2,2}, & \xi_{2,3} & \cdots & \xi_{2,n} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\xi_{m,1}, & \xi_{m,2}, & \xi_{m,3} & \cdots & \xi_{m,n} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Per ogni intero τ la serie:

$$\sum_{n\geq 1} |\xi_{n,n}|_\tau = \Big|\sum_{n\geq 1} |\xi_{n,n}|\Big|_\tau$$

converge e converge pertanto anche la serie di elementi positivi:

$$\sum_{n\geq 1} |\xi_{n,n}|$$

Poniamo:

$$\eta_n = \sum_{k\geq n} |\xi_{k,k}|$$

la successione $(\eta_n)_n$ converge metricamente a zero ed essendo monotona decrescente, tende a zero secondo la (o)-convergenza. Essendo per ogni n verificata la relazione:

$$|\xi_{n,n}| < \eta_n$$

risulta essere (o)-convergente a zero anche la $(|\xi_{n,n}|)_n$ e quindi la $(\xi_{n,n})_n$. Quest'ultima è una sottosuccessione della $(\xi_n)_n$. Poichè ogni sottosuccessione di una successione metricamente infinitesima è ancora tale, ne segue la $(*)$-convergenza a zero di $(\xi_n)_n$. Dimostriamo ora che se $\xi_n \xrightarrow{(*)} 0$, allora converge a zero metricamente.

Supponiamo per assurdo che $(\xi_n)_n$ non sia infinitesima metricamente; allora esiste $\tau \in \mathbb{R}_+$ per cui $|\xi_n|_\tau$ non converge a zero. Per $\varepsilon > 0$ conveniente sarà verificata (per quel τ) la relazione

$$|\xi_n|_\tau \geqslant \varepsilon$$

per infiniti valori di n. Sarà possibile quindi estrarre una sottosuccessione $(\xi_{n(k)})_k$ tale che

$$|\xi_{n(k)}|_\tau \geqslant \varepsilon$$

per ogni k.

Dalla $(\xi_{n(k)})_k$ si può estrarre a sua volta una sottosuccessione $(\eta_n)_n$ (o)-convergente a zero. Allora la successione:

$$\varkappa_n = \bigvee_p |\eta_{n+p}|$$

è monotona decrescente e (o)-convergente a zero, pertanto dovrà essere $\varkappa_n(\tau)$ infinitesima e ciò è incompatibile con le relazioni:

$$0 < \varepsilon \leqslant |\eta_n|_\tau \leqslant \varkappa_n(\tau)$$

valide per ogni n.

Osservazione. L'equivalenza tra la convergenza metrica e la $(*)$-convergenza può essere dimostrata in generale in uno spazio pseudometrico, per la cui definizione si rimanda a [3].

2. Serie di potenze a coefficienti in Γ.

In seguito ci sarà utile la considerazione dell'algebra $\Gamma[\![X]\!]$ delle serie formali a coefficienti in Γ. Quest'algebra è ancora un'algebra locale, il cui ideale massimo è costituito dalle serie formali aventi il coefficiente iniziale in $\mathfrak{M}_\Gamma$.

Come Λ, Γ e $\Gamma[\![X]\!]$ sono algebre integre.

DEF. 1. *Sia* $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ *una serie formale a coefficienti in* Γ, *definiamo il raggio di convergenza di detta serie come il numero reale non negativo o* $+\infty$ *estremo superiore degli* $r \in \mathbf{R}_+$ *per cui esiste un* $M \in \Lambda_+$ *tale che*

$$|a_n| r^n < M .$$

TEOREMA 2. *Sia* $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ *una serie formale in* Γ *e* ϱ *il suo raggio di convergenza, allora la serie di potenze* $S(\xi) = \sum_{n\geq 0} a_n \xi^n$ *è convergente nel* π*-disco di raggio* ϱ *ovvero per tutti i* ξ *per cui* $|\xi(0)| < \varrho$.

La dimostrazione si ottiene ricalcando la dimostrazione analoga nel campo complesso.

TEOREMA 3. *Sia* $\sum_{n\geq 0} a_n \xi^n$ *una serie di potenze in* Γ *convergente per un certo* $\xi \in \Gamma$, *allora il raggio di convergenza della serie è maggiore o uguale a* $|\xi(0)|$.

Se $\xi(0) = 0$ il fatto è banale. Sia dunque $\xi(0) \neq 0$, allora la successione di τ-seminorme $|a_n \xi^n|_\tau$ è infinitesima e quindi limitata; ciò per ogni $\tau \in \mathbf{R}_+$.

Se r è un numero reale positivo e minore di 1, la serie

$$\sum_{n\geq 0} |a_n \xi^n|_\tau r^n$$

è convergente per ogni τ. Quindi è convergente la serie

$$\sum_{n\geq 0} |a_n \xi^n| r^n .$$

Ciò significa che il raggio di convergenza della serie di potenze in η

$$\sum_{n\geq 0} b_n \eta^n$$

con $b_n = a_n \xi^n$ è maggiore o uguale a 1.

Dunque, posto $\eta = r\xi(0)/\xi$ si ha:

$$\eta(0) = r < 1$$

quindi la successione il cui termine n-esimo è:

$$\left| b_n \left(\frac{r\xi(0)}{\xi} \right)^n \right| = |a_n r^n (\xi(0))^n| = |a_n| \, |\xi(0)\, r|^n$$

è limitata reticolarmente, dunque è limitata reticolarmente la successione $|a_n| R^n$ per ogni $R < |\xi(0)|$, $R \in \mathbf{R}_+$.

Pertanto il raggio di convergenza della serie data è maggiore o uguale a $|\xi(0)|$.

TEOREMA 4. *Siano* $A(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ e $B(X) = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ *due serie formali in* Γ *aventi raggio di convergenza* $\geq \varrho$, *allora la serie somma*:

$$S(X) = A(X) + B(X)$$

e la serie prodotto:

$$P(X) = A(X) \cdot B(X)$$

hanno raggio di convergenza $\geq \varrho$ *e inoltre, per ogni* ξ *del* π*-disco di raggio* ϱ, *le serie* $S(\xi)$ *e* $P(\xi)$ *hanno rispettivamente per somma la somma e il prodotto di* $A(\xi)$ *e di* $B(\xi)$.

Anche questa dimostrazione si ottiene ricalcando la analoga nel campo complesso.

TEOREMA 5. *Siano* $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ *e* $T(X) = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ *due serie formali in* Γ, *con raggi di convergenza* ϱ_1 *e* ϱ_2 *entrambi positivi, allora anche la serie* $U(X) = S(T(X))$ *ha raggio di convergenza positivo, inoltre, se* ξ *è interno a un* π*-disco di raggio positivo abbastanza piccolo, si ha*:

$$U(\xi) = S(T(\xi)) .$$

Per comodità del lettore riportiamo la dimostrazione, simile al caso del campo complesso.

Sia r reale $0 < r < \varrho_2$, allora la serie $\sum_{n\geqslant 1} b_n r^n$ converge e la sua somma η è tale che:

$$\eta(0) = \Big(\sum_{n\geqslant 1} |b_n| r^n\Big)(0) = \sum_{n\geqslant 0} |b_n(0)| r^n$$

quest'ultima serie è una funzione reale e continua di r e infinitesima per $r \to 0$. Scegliamo $r > 0$ e tale che $\eta(0) < \varrho_1$, allora la serie

$$\sum_{p\geqslant 0} |a_p| \eta^p = \sum_{p\geqslant 0} |a_p| \Big(\sum_{k\geqslant 1} |b_k| r^k\Big)^p$$

è convergente.

Quest'ultima serie si può porre nella forma $\sum_{n\geqslant 0} \gamma_n r^n$ e, se si pone $U(X) = \sum_{n\geqslant 0} c_n X^n$, si ha evidentemente $|c_n| < \gamma_n$. Ne segue che la serie $\sum_{n\geqslant 0} |c_n| r^n$ è convergente e il raggio di convergenza di $U(X)$ è $\geqslant r$. Se $|\xi(0)| < r$, la serie $U(\xi)$ è convergente. Poniamo $S_n(X) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k X^k$ e sia $S_n\big(T(X)\big) = U_n(X)$. Si ha:

$$U_n(\xi) = S_n\big(T(\xi)\big)$$

poichè l'applicazione $T(X) \mapsto T(\xi)$ è un omomorfismo di una sottoalgebra dell'algebra delle serie formali a coefficienti in Γ e $S_n(X)$ è un polinomio. La serie $S(X)$ converge nel punto $T(\xi)$ e si ha:

$$S\big(T(\xi)\big) = \lim_n S_n\big(T(\xi)\big)\,.$$

D'altra parte i coefficienti di $U(X) - U_n(X) = S\big(T(X\ \big) - S_n\big(T(X)\big)$ sono maggiorati da quelli della serie

$$\sum_{p>n} |a_p| \Big(\sum_{k\geqslant 1} |b_k| X^k\Big)^p$$

La serie

$$\sum_{p>n} |a_p| \Big(\sum_{k\geqslant 1} |b_k| \,|\xi|^k\Big)^p$$

è una serie convergente la cui somma tende a zero al divergere di n. Ne segue che, per $|\xi(0)| < r$, $U(\xi) - U_n(\xi)$ tende a zero quando $n \to +\infty$.

Si ha dunque:

$$U(\xi) = \lim_n U_n(\xi) = \lim_n S_n(T(\xi)) = S(T(\xi))$$

non appena $|\xi(0)| < r$.

TEOREMA 6. *Sia* $S(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ *una serie formale con coefficiente iniziale* $a_0 \notin \mathfrak{M}_\Gamma$, $T(X)$ *la serie tale che* $S(X)T(X) = 1$, *allora, se il raggio di convergenza di* $S(X)$ *è positivo, tale è anche il raggio di convergenza di* $T(X)$. *Inoltre, se* ξ *è interno a un* π*-disco di raggio positivo abbastanza piccolo, si ha*:

$$S(\xi)\,T(\xi) = 1\,.$$

Dimostrazione analoga a quella relativa al campo complesso.

TEOREMA 7. *Sia* $S(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ *una serie formale in* Γ *con raggio di convergenza* ϱ, *allora la seıie derivata* $S'(X) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n X^{n-1}$ *ha lo stesso raggio di convergenza* ϱ, *e per ogni* ξ *del* π*-disco di raggio* ϱ *si ha*:

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(\xi + h\eta) - S(\xi)}{h} = S'(\xi)\eta$$

la variabile h *potendo essere anche complessa.*

La prima parte del teorema si dimostra ricalcando la dimostrazione relativa al campo complesso. Vediamo la seconda parte.

Fissiamo $\xi \in \Gamma$ in modo che $|\xi(0)| < \varrho$, sia $\eta \in \Gamma$, prendiamo un reale $\bar{h} > 0$ tale che

$$\xi(0)| + |\bar{h}\eta(0)| < \varrho$$

poniamo

$$\varkappa = |\xi| + |\bar{h}\eta|$$

allora $\varkappa(0) < \varrho$.

Se $|h| < \bar{h}$, la serie

$$S(\xi + h\eta) = \sum_{n\geqslant 1} a_n(\xi + h\eta)^n$$

è convergente. Consideriamo:

$$\frac{S(\xi + h\eta) - S(\xi)}{h} - \eta S'(\xi) = \sum_{n\geqslant 1} u_n(\xi, h\eta)$$

dove si è posto:

$$u_n(\xi, h\eta) = a_n\eta[(\xi + h\eta)^{n-1} + \xi(\xi + h\eta)^{n-2} + \ldots + \xi^{n-1} - n\xi^{n-1}]$$

poichè $|\xi|$ e $|\xi + h\eta|$ sono maggiorati da $\varkappa$, si ha che:

$$|u_n(\xi, h\eta)| < 2n|a_n|\varkappa^{n-1}|\eta|$$

e poichè $\varkappa(0) < \varrho$, la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} n|a_n|\varkappa^{n-1}$$

converge. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ e $\tau \in \mathbf{R}_+$, si potrà trovare un N tale che

$$|\eta|_\tau \sum_{n>N} |2n|a_n|\varkappa^{n-1}|_\tau < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Avendo fissato così N, la somma finita

$$\sum_{n\leqslant N} u_n(\xi, h\eta)$$

è un polinomio in h a coefficienti in Γ, nullo per $h = 0$, continuo in h, per cui, se $|h| < \delta$, essendo δ un reale positivo conveniente, si ha:

$$\left|\sum_{n\leqslant N} u_n(\xi, h\eta)\right|_\tau < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Allora, per h abbastanza piccolo, si ha:

$$\text{(2)} \qquad \left|\frac{S(\xi + h\eta) - S(\xi)}{h} - S'(\xi)\eta\right|_\tau \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{n\leqslant N} u_n(\xi, h\eta)\right|_\tau + |\eta|_\tau \left|\sum_{n>N} 2n|a_n|r^{n-1}\right|_\tau < \varepsilon$$

ogni seminorma del I membro di (2) è infinitesima con h. Risulta:

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(\xi+h\eta)-S(\xi)}{h}=S'(\xi)\eta\,.$$

COROLLARIO 1. *La somma di una serie di potenze $S(\xi)$ a coefficienti in Γ ammette derivate di tutti gli ordini nell'interno del suo π-disco di convergenza.*

TEOREMA 8. *Sia $S(X)$ una serie formale tale che $S(0)=0$ e $S'(0)\notin \mathfrak{M}_\Gamma$ sia $T(Y)$ tale che $S(T(Y))=Y$, allora se il raggio di convergenza di $S(X)$ è positivo, anche il raggio di convergenza di $T(Y)$ è positivo. Inoltre se η è interno a un π-disco di raggio abbastanza piccolo, si ha:*

$$S(T(\eta))=\eta\,.$$

Supponiamo dapprima che sia $S'(0)=1$ e consideriamo accanto alla serie $S(X)$ una serie del tipo

$$\bar{S}(X)=X-\sum_{n\geqslant 2}A_nX^n$$

dove $A_n\in\Lambda_+$ e $|a_n|<A_n$ per ogni $n\geqslant 2$. Alla serie $S(X)$ è associata la serie formale inversa

$$\bar{T}(y)=\sum_{n\geqslant 1}B_nY^n$$

tale che $S(T(Y))=Y$, i cui coefficienti B_n sono deducibili ricorsivamente da relazioni del tipo:

$$B_n=P_n(A_2,\dots,A_n,B_1,\dots,B_{n-1}) \tag{3}$$

dove P_n è un polinomio a coefficienti interi positivi o nulli.

Si deduce ricorsivamente su n dalle (3):

$$|b_n|<B_n\,.$$

Ne segue che il raggio di convergenza della serie $T(Y)$ è maggiore o uguale a quello della serie $\bar{T}(Y)$. Dimostriamo che quest'ultimo è positivo.

Scegliamo la serie $\bar{S}(X)$ come segue: sia $r > 0$ un numero strettamente inferiore al raggio di convergenza della serie $S(X)$; il termine generale della serie

$$\sum_{n\geqslant 1} |a_n| r^n$$

è dunque maggiorato dalla somma M. Se poniamo $A_n = M/r^n \; n \geqslant 2$, si ottengono i coefficienti di una serie maggiorante di $S(X)$; la funzione:

$$\bar{S}(\xi) = \xi - M \frac{\xi^2/r^2}{1-\xi/r} \qquad \text{per } |\xi(0)| < r\,,$$

è localmente invertibile e, detta $T(\eta)$ l'inversa, si trova che $\bar{T}(\eta)$ deve essere soluzione dell'equazione di II grado seguente:

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{M}{r^2}\right)\bar{T}^2 - \left(1 + \frac{\eta}{r}\right)\bar{T} + \eta = 0$$

che ammette per soluzione annullantesi per $\eta = 0$:

$$\bar{T}(\eta) = \frac{1 + \eta/r - \sqrt{1 - 2\eta/r - 4M\eta/r^2 + \eta^2/r^2}}{2(1/r + M/r^2)}\,.$$

Allorchè $|\eta(0)|$ è abbastanza piccolo, il radicale è della forma $\sqrt{1+u}$ e ammette uno sviluppo in serie di potenze intere di u con raggio di convergenza uguale a 1. Sostituendo a u l'espressione polinomiale in η

$$-2\frac{\eta}{r} - 4M\frac{\eta}{r^2} + \frac{\eta^2}{r^2}$$

annullantesi per $\eta = 0$, si ottiene uno sviluppo in serie di $\bar{T}(\eta)$ che converge per $|\eta(0)|$ abbastanza piccolo. Così il raggio di convergenza di questa serie è diverso da zero.

Se $S'(0) \notin \mathfrak{M}_{\Gamma}$, allora la serie $S(X)/S'(0)$ ha derivata calcolata nell'origine uguale a 1 e quindi il raggio di convergenza della serie $T(Y)$ inversa di quest'ultima è positivo e rappresenta in un intorno dell'origine l'inversa $T(\eta)$ della funzione $S(\xi)/S'(0)$.

Si ricava allora facilmente che $T(\eta/S'(0))$ è una serie convergente con raggio di convergenza positivo ed è verificata la relazione

$$S\big(T(\eta/S'(0))\big) = \eta$$

non appena $|\eta(0)|$ è abbastanza piccolo.

3. Funzioni analitiche in Γ.

DEF. 2. *Sia $f(\xi)$ una funzione definita in un π-dominio D di Γ a valori in Γ, diremo che f è analitica nel punto $\xi_0 \in D$ se esiste un numero $\varrho > 0$ e una serie formale $S(X) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ di raggio di convergenza $\geqslant \varrho$ tale che*

$$f(\xi) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(\xi - \xi_0)^n$$

per ogni ξ per cui $|\xi(0) - \xi_0(0)| < \varrho$.

TEOREMA 9. *Se la serie $S(X) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ ha raggio di convergenza ϱ e ξ_0 è interno al π-disco di convergenza, allora il raggio di convergenza della serie dedotta*

$$\sum_{n\geqslant 0} (\xi - \xi_0)^n \frac{S^{(n)}(\xi_0)}{n!}$$

è $\varrho' \geqslant \varrho - |\xi_0(0)|$ e nei punti ξ per cui è $|\xi(0)| < \varrho - |\xi_0(0)|$ la somma della serie dedotta coincide con $S(\xi)$.

Si ha:

$$S^{(p)}(\xi_0) = \sum_{q\geqslant 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q}\xi_0^q$$

e quindi:

$$|S^{(p)}(\xi_0)| < \sum_{q\geqslant 0} \frac{(p+q)!}{q!} |a_{p+q}|\, |\xi_0|^q .$$

Sia $\xi \in \Gamma$ tale che $|\xi(0)| < \varrho - |\xi_0(0)|$, si ha:

$$\sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p!} |S^{(p)}(\xi_0)|\, |\xi|^p < \sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!} |a_{p+q}|\, |\xi_0|^q\, |\xi|^p <$$
$$< \sum_{n\geqslant 0} |a_n| \sum_{0\leqslant p\leqslant n} \binom{n}{p} |\xi_0|^{n-p}\, |\xi|^p = \sum_{n\geqslant 0} |a_n| \big(|\xi_0| + |\xi|\big)^n = \sum_{n\geqslant 0} |a_n| \varkappa^n$$

dove $\varkappa = |\xi_0| + |\xi|$ è un elemento di Λ_+ tale che $|\varkappa(0)| < \varrho$, quindi la serie

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n| \varkappa^n$$

è convergente.

Poichè ξ può essere scelto in modo tale che $|\xi(0)|$ sia prossimo quanto si vuole a $\varrho - |\xi_0(0)|$, ne segue che il raggio di convergenza della serie:

$$\sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p!} S^{(p)}(\xi_0) X^p$$

è maggiore o uguale a $\varrho - |\xi_0(0)|$.

Sia ora $\xi \in \Gamma$ tale che $|\xi(0) - \xi_0(0)| < \varrho - |\xi_0(0)|$; la serie doppia:

$$\sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} \xi_0^q (\xi - \xi_0)^p$$

converge assolutamente. Per calcolare la sua somma possiamo raggruppare i termini in due modi diversi. Un primo modo porge:

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \left(\sum_{0\leqslant p\leqslant n} \binom{n}{p} (\xi - \xi_0)^p \xi_0^{n-p} \right) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \xi^n = S(\xi) . \tag{4}$$

Un secondo modo:

$$\sum_{p\geqslant 0} \frac{(\xi - \xi_0)^p}{p!} \left(\sum_{q\geqslant 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} \xi_0^q \right) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p!} S^{(p)}(\xi_0)(\xi - \xi_0)^p \tag{5}$$

da cui la tesi per confronto tra (4) e (5).

COROLLARIO 2. *La somma di una serie di potenze a raggio di convergenza* $\varrho > 0$ *è una funzione analitica nel* π*-disco di raggio* ϱ.

TEOREMA 10. *Se* $f(\xi)$ *è una funzione analitica in* Γ, *allora essa è continua in ogni punto* ξ_0 *del suo dominio.*

Per definizione $f(\xi)$ è sviluppabile in serie di potenze:

$$f(\xi) = \sum_{n\geqslant 0} a_n (\xi - \xi_0)^n$$

l'uguaglianza essendo verificata per ogni $\xi \in \Gamma$ per cui $|\xi(0) - \xi_0(0)| < r$ con r positivo conveniente. Possiamo quindi senza restrizione essenziale dimostrare la continuità nell'origine di una serie di potenze $S(\xi) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \xi^n$ con raggio di convergenza ϱ positivo.

Si ha per $|\xi(0)| < \varrho$:

$$|S(\xi) - S(0)| < \sum_{n\geqslant 1} |a_n \xi^n| < \sum_{n\geqslant 1} |a_n||\xi|^n$$

l'ultima serie scritta essendo convergente.

Sia ora $(\xi_k)_k$ una successione (o)-convergente a zero e sia $|\xi_k(0)| < \varrho$ per ogni k, allora, posto $\beta = \bigvee_k \xi_k$, sarà $|\beta(0)| < \varrho$ e $|\xi_k| < \beta$ per ogni k. Vale allora la:

$$\sum_{n\geqslant 1} |a_n||\xi_k|^n = |\xi_k| \sum_{n\geqslant 1} |a_n||\xi_k|^{n-1} < |\xi_k| \sum_{n\geqslant 1} |a_n|\beta^{n-1} .$$

Ne segue che, posto $M = \sum_{n\geqslant 1} |a_n|\beta^{n-1}$, risulta:

$$|S(\xi_k) - S(0)| < |\xi_k| M$$

da cui si ha che ogni successione $(\xi_k)_k$ (o)-convergente a zero (contenuta nel π-disco di raggio ϱ) fornisce una successione $\big(S(\xi_k) - S(0)\big)_k$ ancora (o)-convergente a zero. Da ciò segue che ogni successione $(*)$-convergente a zero si muta in una $(*)$-convergente a zero, da cui la $(*)$-continuità della $S(\xi)$ nel punto 0 e per il teorema 1 anche la continuità secondo la metrica.

TEOREMA 11. *Una funzione $f(\xi)$ analitica nel punto ξ_0 è differenziabile nel senso seguente: esiste una funzione $\varphi(\eta)$ infinitesima per $\eta \to 0$ tale che:*

$$f(\xi_0 + \eta) - f(\xi_0) - f'(\xi_0)\,\eta = \eta\varphi(\eta) .$$

Infatti, riportandoci all'origine e considerando la solita serie di potenze in η:

$$S(\eta) - S(0) = \sum_{n\geqslant 1} a_n \eta^n$$

poichè $S'(0) = a_1$, risulta:

$$S(\eta) - S(0) - \eta S'(0) = \eta \sum_{n\geqslant 2} a_n \eta^{n-1}$$

Per cui, posto $\varphi(\eta) = \sum_{n \geq 2} a_n \eta^{n-1}$, si ha:

$$S(\eta) - S(0) - \eta S'(0) = \eta \varphi(\eta)$$

dove $\varphi(\eta)$ è infinitesima con η in virtù del teorema 10.

OSSERVAZIONE. Valgono le solite regole di differenziazione per la somma, per il prodotto, per la funzione reciproca nonchè per la funzione inversa e per la composizione di funzioni nell'ambito delle funzioni analitiche in Γ.

TEOREMA 12. *Se una serie di potenze $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ ha raggio di convergenza positivo e se l'origine è punto di accumulazione di zeri, la serie ha tutti i suoi coefficienti nulli.*

Infatti supponiamo che sia a_N il primo coefficiente diverso da zero, allora si avrà:

$$S(\xi) = \xi^N \sum_{n \geq 0} a_{N+\nu} \xi^\nu .$$

Scegliamo una successione $(\xi_k)_k$ contenuta nel π-disco di convergenza della $S(X)$ formata da zeri della $S(\xi)$, $\xi_k \neq 0$ per ogni k e tale che $\lim_k \xi_k = 0$; si avrà allora per ogni k

$$S(\xi_k) = 0$$

ma $\xi_k^N \neq 0$ per ogni k, quindi, essendo Γ algebra integra, dovrà essere, per ogni k

$$\sum_{n \geq 0} a_{N+\nu} \xi_k^\nu = 0$$

da cui, per $k \to +\infty$, si ottiene $a_N = 0$, contro l'ipotesi.

COROLLARIO 3. *Se una funzione analitica in Γ ha un punto di accumulazione di zeri interno al suo π-dominio, questo essendo connesso, allora è identicamente nulla in detto dominio.*

TEOREMA 13. *Se $f(\xi)$ è analitica in un π-dominio D e se ξ_1, $\xi_2 \in D$ con $\xi_1(0) = \xi_2(0)$, allora*

$$f(\xi_1)(0) = f(\xi_2)(0) .$$

TEOREMA 14. *Se $f(\xi)$ è analitica in un π-dominio $D = \pi^{-1}D_0$, posto $F(z) = f(z)(0)$ per $z \in D_0$, avendo indicato con D_0 un aperto di $\mathbb{C}$, allora la funzione $F(z)$ della variabile complessa z è analitica in D_0.*

COROLLARIO 4. *Se $f(\xi)$ è analitica in un π-dominio $D = \pi^{-1}D_0$ connesso e se l'insieme dei punti $z \in D_0$ per cui $f(z) \in \mathfrak{M}_\Gamma$ ha un punto di accumulazione in D_0, allora $f(\xi) \in \mathfrak{M}_\Gamma$ per ogni $\xi \in D$.*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] A. BIGARD - K. KEIMEL - S. WOLFENSTEIN, *Groupes et anneaux réticulés*, Springer-Verlag (1977).

[2] H. CARTAN, *Théorie élémentaires des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris (1961).

[3] G. DARBO, *Un'algebra locale reticolata che interviene nella teoria dei sistemi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **60** (1978).

[4] W. A. J. LUXEMBURG - A. C. ZAANEN, *Riesz spaces, I*, North Holland, Amsterdam (1971).

[5] B. Z. VULIKH, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Wolters-Noordhoff, Groningen (1967).

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 aprile 1981.