RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARLO MARIA SCOPPOLA

Una caratterizzazione reticolare del reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano contenente due elementi aperiodici indipendenti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 73 (1985), p. 191-207

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__73__191_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 73 (1985)

Una caratterizzazione reticolare del reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano contenente due elementi aperiodici indipendenti.

Carlo Maria Scoppola (*)

Con l'espressione « caratterizzazione reticolare del reticolo dei sottogruppi del gruppo G » si intende, in ciò che segue, un insieme di condizioni necessarie e sufficienti affinchè un reticolo $\mathfrak{L}$ sia isomorfo al reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei sottogruppi di G. Tali condizioni dovranno essere di natura puramente reticolare; inoltre dovranno permettere, a partire dal solo reticolo $\mathfrak{L}$ in cui sono soddisfatte, di costruire il gruppo G e l'isomorfismo $\varphi\colon \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}$. Caratterizzazioni di questo tipo si trovano, ad esempio, in [1, 3, 5, 6]; si tratta di caratterizzazioni reticolari di reticoli di sottogruppi di classi di gruppi: assegnata una classe $\mathcal{G}$ di gruppi, e un reticolo $\mathfrak{L}$ soddisfacente a opportune condizioni, a partire da $\mathfrak{L}$ si costruiscono G in $\mathcal{G}$ e $\varphi\colon \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}$. Nell'affrontare il problema della caratterizzazione reticolare dei reticoli di sottogruppi dei gruppi di una classe $\mathcal{G}$ è utile disporre di tecniche che permettano di ridurre il problema a quello della caratterizzazione reticolare dei reticoli dei sottogruppi di una opportuna sottoclasse $\mathcal{G}'$ di $\mathcal{G}$; tecniche mediante le quali, cioè, assegnato un reticolo algebrico $\mathfrak{L}$, soddisfacente a opportune condizioni, e tale che $1_{\mathfrak{L}} = \bigvee_i L_i$, $L_i \in \mathfrak{L}$, e assegnati opportuni gruppi G_i in $\mathcal{G}'$, e isomorfismi di reticoli $\varphi\colon \mathfrak{L}(G_i) \to L_i/0$, si sia in grado di costruire un gruppo G in $\mathcal{G}$ e un isomorfismo di reticoli $\varphi\colon \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}$.

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento, 38050 Povo (Trento).

Lavoro eseguito con parziale finanziamento MPI.

In questo lavoro si illustra un esempio di tecnica di questo tipo, nel teorema 2.2; essa è di interesse indipendente dall'uso che ne viene fatto più avanti, nello studio di una caratterizzazione reticolare del reticolo dei sottogruppi dei gruppi abeliani che hanno due elementi aperiodici indipendenti.

1. Le notazioni sono per la maggior parte standard; si veda ad esempio [5]. In particolare, in ciò che segue, indicheremo con $\mathfrak{L}$ un reticolo algebrico. Diremo che $a \in \mathfrak{L}$ è *ciclico* se $a/0$ è distributivo con condizione massimale. Indicheremo cin $\mathcal{C}(\mathfrak{L})$ l'insieme degli elementi ciclici di $\mathfrak{L}$. Se a, $b \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, porremo

$$a \circ b = \{c \in \mathcal{C}(\mathfrak{L}) : a \vee b = a \vee c = b \vee c\} .$$

Se $A \subseteq \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $b \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, porremo poi

$$A \circ b = \{c \in a \circ b : a \in A\} .$$

Diremo che $L \in \mathfrak{L}$ è senza torsione se l'intervallo $L/0$ è privo di atomi. Per la definizione di un opportuno sottoinsieme $x * y \subset x \circ y$, nel caso in cui x, y siano senza torsione, e per le condizioni sotto le quali un reticolo è isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano senza torsione di rango almeno 2 (diremo brevemente, nel seguito, un GA-reticolo), si rimanda a [5].

Si ha subito:

1.1 Lemma. Sia $\mathfrak{L}$ un reticolo algebrico, modulare, siano $c \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $A, B \in \mathfrak{L}$, $A \wedge B = 0$, $c \leqslant A \vee B$. Allora $b = (c \vee A) \wedge B \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $a = (c \vee B) \wedge A \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, e $c \in a \circ b$.

Dimostrazione: $((A \vee c) \wedge B) \vee c = (A \vee c) \wedge (B \vee c) = ((B \vee c) \wedge A) \vee c$ e $((A \vee c) \wedge B) \vee ((B \vee c) \wedge A) = (A \vee c) \wedge (B \vee c)$. Inoltre, $a/0 \simeq (a \vee B)/B = ((c \vee B) \wedge (A \vee B))/B = (c \vee B)/B \simeq c/(c \wedge B)$, e quest'ultimo intervallo è distributivo a condizione massimale; così $a \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$. Similmente, $b \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$. ///

1.2 Corollario. Sia $\mathfrak{L}$ come in 1.1, e, per $i = 1, 2, 3$, sia: $A_i \in \mathfrak{L}$, $B_i = A_j \vee A_k$, $c \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $c \leqslant \bigvee_i A_i$, $A_i \wedge B_i = 0$, $a_i = (c \vee B_i) \wedge A_i$, $b_i = (c \vee A_i) \wedge B_i$. Allora $c \in a_i \circ b_i$, $b_i \in a_j \circ a_k$.

2. In questo paragrafo, supporremo che $\mathfrak{L}$ soddisfi alle:

C1. $\mathfrak{L}$ è un reticolo algebrico i cui elementi compatti sono le unioni di un numero finito di elementi ciclici.

C2. Se $x \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $Y \subseteq \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, e $x \leqslant \bigvee_{y \in Y} y$, allora esistono $x_1, x_2, \ldots, x_s \in Y$ tali che $x \in \big(\ldots\big((x_1 \circ x_2)\circ x_3\big)\ldots\big)\circ x_s$.

Si ha:

2.1. Proposizione. Siano $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ due reticoli soddisfacenti alle condizioni C1, C2. Sia $\psi\colon \mathcal{C}(\mathfrak{L}) \to \mathcal{C}(\mathfrak{L}')$ una mappa suriettiva tale che

($\circ$) Se $x, y, z \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, si ha $\psi(z) \in \psi(x)\circ\psi(y)$ se e solo se $z \in x \circ y$.

Allora la posizione $\varphi(V) = \bigvee_{\substack{v \leqslant V \\ v \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})}} \psi(v)$, per ogni $V \in \mathfrak{L}$, definisce un isomorfismo di reticoli $\varphi\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'$.

Dimostrazione: φ è ben definita, perchè $\mathfrak{L}'$ è completo. Sia $U \in \mathfrak{L}'$, e sia $V = \bigvee_{\substack{x \in \mathcal{C}(\mathfrak{L}) \\ \psi(x) \leqslant U}} x$. Si ha $U = \bigvee_{\substack{x \in \mathcal{C}(\mathfrak{L}) \\ \psi(x) \leqslant U}} \psi(x)$ perchè ψ è suriettiva. Così $\varphi(V) \geqslant U$. Sia $z \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $z \leqslant V$. Per C1, C2 esistono $x_1, \ldots, x_s \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$ tali che $\psi(x_1), \ldots \varphi(x_s) \leqslant U$ e $z \in \big(\ldots(x_1 \circ x_2)\circ\ldots\big)\circ x_s$. Perciò $\psi(z) \leqslant U$, e $\varphi(V) \leqslant U$; dunque φ è suriettiva. Siano V, $W \in \mathfrak{L}$, $V \nleqslant W$, e sia $x \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $x \leqslant V$, $x \nleqslant W$ (un tale x esiste per C1). Se fosse $\varphi(V) = \varphi(W)$, $\psi(x) \leqslant \varphi(V) = \varphi(W)$ darebbe, per C2, l'esistenza di $y_1, \ldots, y_r \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $y_1, \ldots, y_r \leqslant W$, tali che $\psi(x) \in \big(\ldots(\psi(y_1)\circ\psi(y_2))\ldots\big)\circ\psi(y_r)$, per cui $x \in \big(\ldots(y_1 \circ y_2)\ldots\big)\circ y_r$, e $x \leqslant W$, contraddizione. Così φ è iniettiva. È poi chiaro che $\varphi(V) \leqslant \varphi(W)$ se e solo se $V \leqslant W$. Così φ è un isomorfismo di reticoli. ///

Sia ora $\mathcal{G}$ una classe di gruppi determinati reticolarmente in senso stretto, e tale che valga la seguente proprietà:

($*$) Se $\boldsymbol{G}$ è in $\mathcal{G}$, $\boldsymbol{H} \leqslant \boldsymbol{G}$ e anche $\boldsymbol{H}$ è in $\mathcal{G}$, si ha: se $\alpha \in \mathrm{Paut}(\boldsymbol{G})$, e $\alpha|_{\boldsymbol{H}} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, allora $\alpha = \mathrm{id}_{\boldsymbol{G}}$.

Si osservi che la classe dei gruppi abeliani che contengono due elementi aperiodici indipendenti e la classe dei gruppi nilpotenti non abeliani senza torsione sono esempi di classi che soddisfano ($*$). Si veda per questo [1, 2].

Si ha poi:

2.2 Proposizione. Sia $\mathfrak{L}$ un reticolo in cui sono soddisfatte le condizioni C1 e C2. Sia $\mathcal{G}$ definita come sopra. Siano: K_0 un elemento compatto di $\mathcal{L}$, e $\mathcal{K}_0 = \{K \in \mathcal{L}: K \geqslant K_0$ e K è compatto$\}$, $\{G_K\}_{K\in\mathcal{K}_0}$ un insieme di gruppi in $\mathcal{G}$; per ogni $K \in \mathcal{K}_0$, sia $\varphi_K: \mathcal{L}(G_K) \to K/0$ un isomorfismo di reticoli. Allora $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}(G)$ per un opportuno gruppo G.

Dimostrazione: Se K_1, $K_2 \in \mathcal{K}_0$, $K_1 \leqslant K_2$, definiamo $A_{K_1}{}^{K_2} = \{\alpha_{K_1}{}^{K_2}: G_{K_1} \to G_{K_2} \mid \alpha_{K_1}{}^{K_2}$ induce $\varphi_{K_2}^{-1} \circ \varphi_{K_1}\}$.

Poichè G_{K_1} è finitamente generato, ed è anche reticolarmente determinato in senso stretto, $A_{K_1}{}^{K_2}$ è finito e non vuoto per ogni scelta di $K_1 \leqslant K_2$. Se $K \in \mathcal{K}_0$, sia $S(K) = \Big\{\alpha(K) \in \prod_{\substack{K_1 \leqslant K_2 \leqslant K \\ K_1, K_2 \in \mathcal{K}_0}} A_{K_1}{}^{K_2} \mid$ se H_1, H_2, $H_3 \in \mathcal{K}_0$, $H_1 \leqslant H_2 \leqslant H_3 \leqslant K$, allora $\alpha(K)_{H_1}{}^{H_3} = \alpha(K)_{H_2}{}^{H_3} \circ \alpha(K)_{H_1}{}^{H_2}\Big\}$.

Si vede subito che, per ogni scelta di $K \in \mathcal{K}_0$, $S(K) \neq \emptyset$. Scelto infatti arbitrariamente $\alpha(K)_H{}^K$ per ogni $H \in \mathcal{K}_0$, $H \leqslant K$, si sceglierà $\alpha(K)_{H_1}{}^{H_2} = (\alpha_{K_2}{}^K)^{-1} \circ \alpha_{H_1}{}^K$ se H_1, $H_2 \in \mathcal{K}_0$, $H_1 \leqslant H_2$. Si verifica facilmente che $\alpha(K)$ così definito è un elemento di $S(K)$. Definiamo ora una relazione di equivalenza su $S(K)$: porremo $\alpha(K) \sim \alpha'(K)$ se e solo se esiste una scelta di $\beta_H{}^H \in A_H{}^H$ per ogni $H \in \mathcal{K}_0$, $H \leqslant K$, tale che $\beta_{K_0}{}^{K_0} = \mathrm{id}_{G_{K_0}}$, e se H_1, $H_2 \in \mathcal{K}_0$, $H_1 \leqslant H_2$,

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\beta_{H_1}{}^{H_2}"] & {} \\ {} \arrow[u, "\alpha(K)_{H_1}{}^{H_2}"] \arrow[r, "\beta_{H_1}{}^{H_1}"'] & {} \arrow[u, "\alpha'(K)_{K_1}{}^{H_2}"'] \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Porremo $\widetilde{S(K)} = S(K)/\sim$. È chiaro che $\widetilde{S(K)} \neq \emptyset$. Non è difficile verificare che se $\alpha(K)$, $\alpha'(K) \in S(K)$, e $\alpha(K)_{K_0}{}^K = \alpha'(K)_{K_0}{}^K$, allora $\alpha(K) \sim \alpha'(K)$; poichè $A_{K_0}{}^K$ è finito, anche $\widetilde{S(K)}$ è finito.

Osserviamo ora che la naturale restrizione

$$\varrho_K{}^H: S(K) \to S(H) \; (H, K \in \mathcal{K}_0, H \leqslant K)$$

induce una restrizione $\tilde{\varrho}_K{}^H: \widetilde{S(K)} \to \widetilde{S(H)}$. Poichè ogni $\widetilde{S(K)}$ è finito e non vuoto, $S = \varprojlim (\widetilde{S(K)}, \varrho_K{}^H) \neq \emptyset$. Se ora $s = \{\widetilde{\alpha(K)}\} \in S$, scegliamo arbitrariamente rappresentanti $\alpha(K)$ di $\widetilde{\alpha(K)}$, e poniamo $i_{K_0}{}^K = \alpha(K)_{K_0}{}^K$; se $H, K \in \mathcal{K}_0, H \leqslant K$, sia $\beta(H, K)_H{}^H \in A_H{}^H$ tale che

$$\beta(H, K)_H{}^H \circ \alpha(H)_{K_0}{}^H = \alpha(K)_{K_0}{}^H .$$

Osserviamo che $\beta(H, K)_H{}^H$ esiste, per la definizione di limite proiettivo, ed è unico, per $(*)$. Ponendo ora

$$i_H{}^K = \alpha(K)_H{}^K \circ \beta(H, K)_H{}^H$$

è facile verificare che $(G_K, i_H{}^K)$ è una famiglia diretta di gruppi e monomorfismi. Sia $G = \varinjlim (G_K, i_H{}^K)$.

Dalla teoria elementare discende che $G \simeq \left(\bigoplus_K G_K\right)/R$, per R opportuno, e che per ogni $g \in G$ esiste $H \in \mathcal{K}_0$ tale che $g = a_H + R$, con $a_H \in G_H$. Sia $\psi\colon \mathcal{C}(\mathcal{L}(G)) \to \mathcal{C}(\mathcal{L})$ definita da $\psi(\langle a_H + R\rangle) = \varphi_H(\langle a_H\rangle)$. Si vede subito che ψ è ben definita. Da C1 segue che ψ è suriettiva. Assegnati poi x, y, $z \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ sia $H \in \mathcal{K}_0$ tale che $H \geqslant x \vee y \vee z$. Siano a_x, a_y, $a_z \in G_H$ tali che $x = \varphi_H(\langle a_x\rangle)$, $y = \varphi_H(\langle a_y\rangle)$, $z = \varphi_H(\langle a_z\rangle)$. Così $x = \psi(\langle a_x + R\rangle)$, $y = \psi(\langle a_y + R\rangle)$, $z = \psi(\langle a_z + R\rangle)$. È quindi subito visto che ψ soddisfa alla $(\circ)$, dato che φ_H è un isomorfismo. Ora 2.1 conclude la dimostrazione. ///

3. In questo paragrafo, supporremo che il reticolo $\mathcal{L}$ sia arguesiano (cioè che, per a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, $b_3 \in \mathcal{L}$ sia soddisfatta l'identità arguesiana $(a_1 \vee b_1) \wedge (a_2 \vee b_2) \wedge (a_3 \vee b_3) \leqslant \big((z \vee a_2) \wedge a_1\big) \vee \big((z \vee b_2) \wedge b_1\big)$, dove $z = z_{12} \wedge (z_{13} \vee z_{23})$, e $z_{ij} = (a_i \vee a_j) \wedge (b_i \vee b_j)\big)$, soddisfi C1, C2 e

C3 (i) se $0 \neq x \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, e $x/0$ è infinito, allora $x/0$ è senza torsione;

(ii) assegnato tale x, e $0 \neq y \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, se $x \vee y \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ allora $x \wedge y \neq 0$;

(iii) se anche y è senza torsione, e $x \wedge y = 0$, $(x \vee y)/0$ è un GA-reticolo.

Osservazioni. (i) Si verifica subito che il reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano è arguesiano e soddisfa C1, C2 e C3.

(ii) La condizione C3 (iii) è in realtà di natura puramente reticolare: si veda per questo [5].

3.1 Lemma. Siano $A \in \mathcal{L}$, a, b, $x \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, $x \neq 0$, a, $b \leqslant A$, x senza torsione, $x \wedge A = 0$, $\alpha \in a \circ x$, $\beta \in b \circ x$. Allora:

(i) $A \wedge \alpha = 0$;

(ii) $\{(a \vee b) \wedge (\alpha \vee \beta)\} = a \circ b \cap \alpha \circ \beta$;

(iii) se $a \wedge b = 0$, $\{(a \vee \beta) \wedge (\alpha \vee b)\} = a \circ \beta \cap \alpha \circ b$;

(iv) se $a \wedge b = 0$ e, per (iii), γ è l'unico elemento di $\alpha \circ b \cap a \circ \beta$, allora $\{(\gamma \vee x) \wedge (a \vee b)\} = \gamma \circ x \cap a \circ b$.

DIMOSTRAZIONE. (i) $\alpha\wedge A \leqslant (\alpha\vee x)\wedge A = (a\vee x)\wedge A = a\vee(x\wedge A) = a$. Ma $\alpha\wedge a = 0$, perchè altrimenti, se a ha torsione, per C3 anche α ha torsione, e $(\alpha\vee a)/0$ è finito, e così $x/0$ sarebbe finito, assurdo per C3; se a non ha torsione, per C3 $(a\vee x)/0$ è un GA-reticolo, e $A\wedge\alpha = 0$ discende da 2.2 in [5].

(ii) $w = (a\vee b)\wedge(\alpha\vee\beta) \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$; infatti $w/(w\wedge\alpha) \simeq (w\vee\alpha)/\alpha = (\alpha\vee \vee\beta)/\alpha \simeq \beta/(\beta\wedge\alpha)$; ma $w\wedge\alpha = (a\vee b)\wedge\alpha = 0$, per (i). L'identità modulare porge $w \in a\circ b \cap \alpha\circ\beta$. Se poi $w' \in a\circ b \cap \alpha\circ\beta$, si ha $w' \leqslant w$, e $w' = w'\vee(\alpha\wedge w) = (w'\vee\alpha)\wedge w = w$.

(iii) Sia $u = (a\vee\beta)\wedge(\alpha\vee b)$. Si ha $u/(u\wedge a) \simeq (u\vee a)/a = (\beta\vee \vee a)/a \simeq \beta/(\beta\wedge a) = \beta/0$, e $u\wedge a = (\alpha\vee b)\wedge a \leqslant (\alpha\vee b)\wedge(a\vee x) = \alpha$, perchè $b\wedge(a\vee x) \leqslant A\wedge(a\vee x) = a$, e $b\wedge a = 0$.

Quindi $u\wedge a \leqslant a\wedge\alpha = 0$. Così $u \in a\circ\beta \cap a\circ b$. Come in (ii), si vede che u è unico.

(iv) Come in (ii), si mostra $c = (\gamma\vee x)\wedge(a\vee b) \in \gamma\circ x \cap a\circ b$. Se poi $c' \in \gamma\circ x \cap a\circ b$, allora $c' \leqslant c$, e $c' = c'\vee(x\wedge c) = (c'\vee x)\wedge c = (\gamma\vee x)\wedge c = c$. ///

3.2 PROPOSIZIONE. Sia $i = 1, 2, 3$, a_i, b_i, $x \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, x senza torsione, $0 \neq x$, $(a_i\vee a_j)\wedge x = 0$, $b_i \in a_i\circ x$, $c_{ij} = (a_i\vee a_j)\wedge(b_i\vee b_j)$. Allora $c_{12} \in c_{13}\circ c_{23}$.

DIMOSTRAZIONE. Per 3.1, $c_{ij} \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$. Per simmetria, basta mostrare $c_{12} \leqslant c_{23}\vee c_{13}$. Sia $c = c_{12}\wedge(c_{23}\vee c_{13})$. L'identità arguessiana fornisce $x \leqslant \bigwedge_i (a_i\vee b_i) \leqslant \big((c\vee a_2)\wedge a_1\big)\vee\big((c\vee b_2)\wedge b_1\big)$. Supponiamo, per assurdo, $c < c_{12}$. Allora, per 3.1, $c \notin a_1\circ a_2$, oppure $c \notin b_1\circ b_2$. Se $c \notin a_1\circ a_2$, a meno di riordinamento di indici si può supporre $a_1' = \big((c\vee a_2)\wedge a_1\big) \neq a_1$. Analogamente, se $c \notin b_1\circ b_2$, si supporrà $b_1' = (c\vee b_2)\wedge b_1 < b_1$. Così si avrebbe $x \leqslant a_1'\vee b_1'$ dove $a_1' > a_1$ oppure $b_1' > b_1$. Si osservi ora che, poichè $x\wedge a = 0$, anche $b_1\wedge a_1 = 0$, per 3.1; l'identità modulare porge facilmente in ogni caso una contraddizione. ///

Assumiamo ora che il reticolo $\mathfrak{L}$, oltre alle condizioni già enunciate, soddisfi anche

C4. Siano $x, a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, x senza torsione, $x \neq 0$, $x\wedge\big(\bigvee_i a_i\big) = 0$. Condizione necessaria affinchè $a_1 \in a_2\circ a_3$ è la seguente: esistono a_i', $a_i'' \leqslant a_i$, $\alpha_i' \in a_i'\circ x$, $\alpha_i'' \in a_i''\circ x$, tali che $a_1 \in \alpha_2'\circ\alpha_3''$, $a_2 \in \alpha_3'\circ\alpha_1''$, $a_3 \in \alpha_1'\circ\alpha_2''$.

OSSERVAZIONI. (i) C4 è evidentemente verificata nei reticoli dei sottogruppi dei gruppi abeliani;

(ii) la condizione enunciata in C4 è anche sufficiente affinchè $a_1 \in a_2 \circ a_3$, in virtù dell'identità modulare;

(iii) se $a_2 \wedge a_3 = 0$, ragionando come alla fine della dimostrazione di 3.2 si ha $a_2' = a_2$, $a_3'' = a_3$.

3.3 DEFINIZIONE. Siano A, B, $F \in \mathfrak{L}$ tali che $(A \vee B) \wedge F = (A \vee \vee F) \wedge B = (B \vee F) \wedge A = 0$, $F/0$ è un GA-reticolo. Diremo che (A, B, F) è una *terna* per $\mathfrak{L}$.

Supporremo d'ora in avanti che $\mathfrak{L}$ soddisfi alle due ulteriori condizioni:

C5. Sia (A, B, F) una terna per $\mathfrak{L}$, e siano, per $i = 1, 2$, x, y, a_i, b_i, α_i, $\beta_i \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$ tali che: $x \neq 0 \neq y$, $x \wedge y = 0$,x, $y \leqslant F$, $a_i \leqslant A$, $b_i \leqslant B$, $\alpha_i \in a_i \circ x$, $\beta_i \in b_i \circ x$, $\gamma_i = \alpha_i \circ b_i \cap \beta_i \circ a_i$, $c_i = \gamma_i \circ x \cap a_i \circ b_i$, $a_3 = (a_i \vee \vee a_2) \wedge (\alpha_1 \vee \alpha_2)$, $b_3 = (b_1 \vee b_2) \wedge (\beta_1 \vee \beta_2)$, $c_3 = (\gamma_1 \vee \gamma_2) \wedge (c_1 \vee c_2)$. Se poi $x * y = \{s, t\}$, siano $\tilde{\beta}_1 = (\beta_1 \vee t) \wedge (b_1 \vee y)$, $\tilde{\alpha}_2 = (\alpha_2 \vee t) \wedge (a_2 \vee y)$, $\alpha_3 = (\alpha_1 \vee \vee \tilde{\alpha}_2) \wedge (a_3 \vee t)$, $\beta_3 = (\tilde{\beta}_1 \vee \beta_2) \wedge (b_3 \vee t)$. Allora:

$$c_3 = (\alpha_3 \vee \beta_3) \wedge (a_3 \vee b_3) .$$

C6. Sia (A, B, F) una terna per $\mathfrak{L}$, e per $i = 1, 2, 3$ si abbia: a_i, b_i, $x_i \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $a_i \leqslant A$, $b_i \leqslant B$, $x_i \leqslant F$, $x_i \neq 0 = x_i \wedge x_j$, $x_i \in x_j \circ x_k$, $a_i \in a_j \circ a_k$, $b_i \in b_j \circ b_k$, e siano $\alpha_i \in a_i \circ x_i$, $\beta_i \in b_i \circ x_i$, $\gamma_i = (\alpha_i \vee b) \wedge (\beta_i \vee a_i)$. Se $\alpha_i \in \alpha_j \circ \alpha_k$, $\beta_i \in \beta_j \circ \beta_k$ allora $\gamma_i \in \gamma_j \circ \gamma_k$.

OSSERVAZIONE. È facile vedere che C5, C6 sono verificate nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano.

3.4. LEMMA. Sia (A, B, F) una terna per $\mathfrak{L}$, siano a, b, x, $y \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $a \leqslant A$, $b \leqslant B$, $x \neq 0 \neq y$, x, $y \leqslant F$, $x \wedge y = 0$, $x * y = \{s, t\}$. Siano $\alpha \in \in a \circ x$, $\beta \in b \circ x$, $\gamma = (a \vee \beta) \wedge (\alpha \vee b)$, $c = (\gamma \vee x) \wedge (a \vee b)$. Posto $\bar{\alpha} = (\alpha \vee \vee t) \wedge (a \vee y)$, $\bar{\beta} = \big(((\beta \vee y) \wedge (b \vee t)) \vee x\big) \wedge (b \vee y)$, si ha $c \in \bar{\alpha} \circ \bar{\beta}$.

DIMOSTRAZIONE. Una immediata applicazione di C5. ///

3.5 DEFINIZIONE. Un reticolo soddisfacente alle condizioni C1, C2, C3, C4, C5, C6 si dirà un PA-*reticolo*.

3.6 TEOREMA. Sia $\mathfrak{L}$ un PA-reticolo arguessiano, (A, B, F) una terna per $\mathfrak{L}$, $1_{\mathfrak{L}} = A \vee B \vee F$. Siano $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F}$ gruppi abeliani, e

$$\varphi_1 : \mathfrak{L}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{A}) \to (F \vee A)/0$$

$$\varphi_2 : \mathfrak{L}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{B}) \to (F \vee B)/0$$

isomorfismi di reticoli tali che $\varphi_1|_{F/0} = \varphi_2|_{F/0}$, $\varphi_1(\boldsymbol{A}) = A$, $\varphi_2(\boldsymbol{B}) = B$. Per semplificare le notazioni, se $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{B})$ scriveremo c per $\varphi_1(\langle \boldsymbol{c} \rangle)$ (c per $\varphi_2(\langle \boldsymbol{c} \rangle)$). Allora:

(i) Siano $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{1} \neq \boldsymbol{x}$, $x \wedge y = 0$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$. Si ha allora $1 = |ax \circ bx^{-1} \cap ay \circ by^{-1} \cap a \circ b|$; quindi l'unico elemento di $ax \circ bx^{-1} \cap a \circ b$ è indipendente dalla scelta di x.

(ii) $1 = |a \circ b \cap ax \circ bx^{-1} \cap ax^{-1} \circ bx|$.

(iii) Detto ab l'unico elemento di $\mathfrak{L}$ di cui in (ii), la posizione $\{\psi(\langle \boldsymbol{abx} \rangle)\} = a \circ bx \cap b \circ ax \cap ab \circ x$ definisce una mappa $\psi : \mathcal{C}(\mathfrak{L}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F})) \to \mathcal{C}(\mathfrak{L})$.

(iv) Se $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3 \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{1} \neq \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}$, allora $\{\langle \boldsymbol{c}_2 \rangle\} = \langle \boldsymbol{c}_1 \rangle \circ \langle \boldsymbol{c}_3 \rangle \cap \langle \boldsymbol{c}_1 \boldsymbol{x} \rangle \circ \langle \boldsymbol{c}_3 \boldsymbol{x}^{-1} \rangle$ se e solo se $\{\psi(\langle \boldsymbol{c}_2 \rangle)\} = \psi(\langle \boldsymbol{c}_1 \rangle) \circ \psi(\langle \boldsymbol{c}_3 \rangle) \cap \psi(\langle \boldsymbol{c}_1 \boldsymbol{x} \rangle) \circ \psi(\langle \boldsymbol{c}_3 \boldsymbol{x}^{-1} \rangle)$.

(v) ψ definita in (iii) è suriettiva.

(vi) Se $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}$, allora $\psi(\langle \boldsymbol{r} \rangle) \in \psi(\langle \boldsymbol{s} \rangle) \in \psi(\langle \boldsymbol{t} \rangle)$ se e solo se $\langle \boldsymbol{r} \rangle \in \langle \boldsymbol{s} \rangle \circ \langle \boldsymbol{t} \rangle$.

(vii) La posizione

$$\varphi(\boldsymbol{H}) = \bigvee_{\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}} \psi(\boldsymbol{h})$$

dove $\boldsymbol{H} \leqslant \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}$, definisce un isomorfismo di reticoli

$$\varphi : \mathfrak{L}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}) \to \mathfrak{L}$$

che estende φ_1, φ_2.

DIMOSTRAZIONE. (i) è una conseguenza immediata di 3.2, quando si sostituiscano ax, bx^{-1}, x, ay, by^{-1}, y, xy^{-1} rispettivamente per a_i, b_i, x. Per ottenere (ii), basta applicare due volte il risultato precedente e osservare che, per 3.1, $a \circ b \cap ax \circ bx^{-1} \cap ay \circ by^{-1} = a \circ b \cap ay \circ by^{-1} =$

$= a \circ b \cap ax^{-1} \circ bx \cap ay \circ by^{-1}$. (iii) Sia per cominciare $x \neq 0$, Per 3.1, $\{w\} = a \circ bx \cap b \circ ax$. Per 3.4 $w \in x \circ ab$, e si è appena visto che ab non dipende da y. Se poi $x = 0$, si ha $bx = b$, $ax = a$ e $\psi(\langle \boldsymbol{abx} \rangle) = ab$. (iv) Sia

$$\langle \boldsymbol{c}_2 \rangle = (\langle \boldsymbol{c}_1 \rangle \vee \langle \boldsymbol{c}_3 \rangle) \wedge (\langle \boldsymbol{c}_1 \boldsymbol{x} \rangle \vee \langle \boldsymbol{c}_3 \boldsymbol{x}^{-1} \rangle) .$$

Si possono scegliere $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3 \in \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3 \in \boldsymbol{B}$ tali che $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{c}_1 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{c}_3 \boldsymbol{x}^{-1} = \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{b}_3 \boldsymbol{x}^{-1}$. Allora $\langle \boldsymbol{c}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_3 \rangle$. Una semplice applicazione di C5 mostra che:

$$\psi(\langle \boldsymbol{c}_1 \rangle) = \big(\psi(\langle \boldsymbol{c}_1 \rangle) \vee \psi(\langle \boldsymbol{c}_3 \rangle)\big) \wedge \big(\psi(\langle \boldsymbol{c}_1 \boldsymbol{x} \rangle) \vee \psi(\langle \boldsymbol{c}_3 \boldsymbol{x}^{-1} \rangle)\big) . \tag{2}$$

Similmente si vede che (2) implica (1). (v) Sia $c \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$; è chiaro che $x = (c \vee A \vee B) \wedge F$ è senza torsione. Se $x \neq 0$, definiti $a = (c \vee B \vee F) \wedge A$, $ax = (c \vee B) \wedge (F \vee A)$, $b = (c \vee A \vee F) \wedge B$, $bx = (c \vee A) \wedge (B \vee F)$, si ha subito $c \in a \circ bx \cap b \circ ax$, per 1.1; per 3.1, c è l'unico elemento di $a \circ bx \cap$ $\cap\, b \circ ax$, e così $\psi(\langle \boldsymbol{abx} \rangle) = c$. Se $x = 0$, allora $c \leqslant A \vee B$, per l'identità modulare. Siano $a = (c \vee B) \wedge A$, $b = (c \vee A) \wedge B$: per 1.1, $c \in a \circ b$. Allora l'osservazione (iii) dopo C4 fornisce $\psi(\langle \boldsymbol{ab} \rangle) = c$, per opportuni $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. (vi) Supponiamo che $\langle \boldsymbol{r} \rangle \in \langle \boldsymbol{s} \rangle \circ \langle \boldsymbol{t} \rangle$. Sia $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{b}_3 \boldsymbol{x}_3$. Si ha subito: $\langle \boldsymbol{a}_1 \rangle \in \langle \boldsymbol{a}_2 \rangle \circ \langle \boldsymbol{a}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{b}_1 \rangle \in \langle \boldsymbol{b}_2 \rangle \circ \langle \boldsymbol{b}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle \in$ $\in \langle \boldsymbol{x}_2 \rangle \circ \langle \boldsymbol{x}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{b}_1 \rangle \in \langle \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{b}_2 \rangle \circ \langle \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{b}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{x}_1 \rangle \in \langle \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{x}_2 \rangle \circ \langle \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{x}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{x}_1 \rangle \in$ $\in \langle \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{x}_2 \rangle \circ \langle \boldsymbol{b}_3 \boldsymbol{x}_3 \rangle$. Distinguiamo alcuni casi.

(a) $\langle \boldsymbol{x}_i \rangle \neq 0$, $\langle \boldsymbol{x}_i \rangle \wedge \langle \boldsymbol{x}_j \rangle = 0$, per ogni i, j. Allora per C6 si ha: $\psi(\langle \boldsymbol{r} \rangle) \in \psi(\langle \boldsymbol{s} \rangle) \circ \psi(\langle \boldsymbol{t} \rangle)$.

(b) $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{x}_2 \rangle$, $\langle \boldsymbol{x}_3 \rangle \neq 0$, $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle \vee \langle \boldsymbol{x}_2 \rangle \vee \langle \boldsymbol{x}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{x} \rangle$. Sia $\boldsymbol{y} \in F$ tale che $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{1}$, $\langle \boldsymbol{x} \rangle \wedge \langle \boldsymbol{y} \rangle = 0$. Se $\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{x}_2)^n (\boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{b}_3 \boldsymbol{x}_3)^m$, si ha: $\langle \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{x}_1 \rangle \in$ $\in \langle (\boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{x}_2)^n \boldsymbol{y} \rangle \circ \langle (\boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{b}_3 \boldsymbol{x}_3)^m \boldsymbol{y}^{-1} \rangle$. Ora $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle \wedge \langle \boldsymbol{x}_2^n \boldsymbol{y} \rangle = 0$, così $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle \in \langle \boldsymbol{x}_2^n \boldsymbol{y} \rangle \circ$ $\circ \langle \boldsymbol{x}_3^m \boldsymbol{y}^{-1} \rangle$. ($a$) fornisce $\psi(\langle \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{x}_1 \rangle) \in \psi(\langle (\boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{x}_2)^n \boldsymbol{y} \rangle) \circ \psi(\langle (\boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{b}_3 \boldsymbol{x}_3)^n \boldsymbol{y}^{-1} \rangle)$. Analoghe relazioni si ottengono per $\psi(\langle \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{x}_2 \rangle)$, $\psi(\langle \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{b}_3 \boldsymbol{x}_3 \rangle)$. Ancora ($a$) permette ora di concludere, con l'osservazione (ii) dopo C4, che $\psi(\langle \boldsymbol{r} \rangle) \in \psi(\langle \boldsymbol{s} \rangle) \circ \psi(\langle \boldsymbol{t} \rangle)$, purchè si mostri $\psi(\langle (\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{x}_i)^s \rangle) \leqslant \psi(\langle \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{x}_i \rangle)$.

Ma questa è un'ovvia conseguenza di 3.1 (iii), e della definizione di ψ.

(c) $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle = 0$. Se $\langle \boldsymbol{x}_2 \rangle \neq 0$, ($iv$) permette immediatamente di concludere. Se $\langle \boldsymbol{x}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{x}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{x}_3 \rangle = 0$, C4 e (iv) permettono ancora di concludere, come in (b). Analogamente si mostra che $\langle \boldsymbol{r} \rangle \in \langle \boldsymbol{s} \rangle \circ$ $\circ \langle \boldsymbol{t} \rangle$ se $\psi(\langle \boldsymbol{r} \rangle) \in \psi(\langle \boldsymbol{s} \rangle) \circ \psi(\langle \boldsymbol{t} \rangle)$.

(vii) è infine una immediata conseguenza di 2.1 e di (iii), (v), (vi). ///

4. In ciò che segue, il reticolo $\mathfrak{L}$ si dirà *decomponibile* se è isomorfo al prodotto diretto di due reticoli che non siano costituiti da un solo elemento, altrimenti $\mathfrak{L}$ verrà detto *indecomponibile*; $a \in \mathfrak{L}$ si dirà *irriducibile* se $a = x \vee y$, con $x, y \in \mathfrak{L}$, implica $x = a$ oppure $y = a$.

4.1. Lemma. Sia $\mathfrak{L}$ un reticolo modulare completo, $a, b \in \mathfrak{L}$, $a \neq \neq 0 \neq b$, a irriducibile, $b/0$ indecomponibile, $a \vee b = 1$, $a \wedge b = 0$. Allora se $\mathfrak{L}$ è decomponibile si ha $\mathfrak{L} = a/0 \times b/0$.

Dimostrazione. Se $\mathfrak{L}$ è decomponibile, sarà $\mathfrak{L} = c/0 \times d/0$, con $c, d \in \mathfrak{L}$, $c \neq 0 \neq d$; poichè a è irriducibile, allora $a \leqslant c$ oppure $a \leqslant d$. Sia $a \leqslant c$. Per l'identità modulare, $1/a \simeq b/0$; e poichè $1/a \simeq c/a \times \times d/0$, si ha facilmente $c = a$, e infine $b = d$. ///

Un reticolo modulare completo si dirà nel seguito *uniforme* se in ogni suo intervallo finito indecomponibile due sottointervalli complementati di dimensione 2 sono isomorfi [3]).

D'ora in avanti, assumeremo che $\mathfrak{L}$ sia un PA-reticolo e che in $\mathfrak{L}$ valgano anche:

C7. $\mathfrak{L}$ è arguessiano uniforme, e ogni elemento compatto di $\mathfrak{L}$ si esprime come unione diretta di elementi ciclici infiniti e di catene finite.

C8. Siano $b \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $F \in \mathfrak{L}$, $b \wedge F = 0$, $F/0$ un GA-reticolo e siano, per $i = 1, 2, 3$, $a_i, x_i, y_i, z_i \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $a_i \leqslant b$, $x_i, y_i, z_i \leqslant F$, $z_i \in x_i * y_i$, $z_i \in z_j * z_k$, $x_i \in x_j * x_k$, $y_i \in y_j * y_k$, $\alpha_i \in a_i \circ y_i$, $a_i \in a_j \circ a_k$, $\alpha_i \in \alpha_j \circ \alpha_k$. Allora:

(i) Se $a_1 = 0 = y_1$, $x_i \wedge y_i = 0$, $y_2 \neq 0 \neq y_3$, e $\{z_2, z_3\} \neq \{x_2, x_3\}$, detto $\tilde{\alpha}_2 = (x_2 \vee a_2) \wedge (\alpha_2 \vee z_2)$, $\tilde{\alpha}_3 = (x_3 \vee a_3) \wedge (\alpha_3 \vee z_3)$, si ha $x_1 \in \tilde{\alpha}_2 \circ \tilde{\alpha}_3$.

(ii) Se $a_1 = 0 = x_2 \wedge y_2 = x_3 \wedge y_3 = y_2 \wedge y_3 \neq y_i$, e $y_1, y_3 \notin x_1 * x_3$, definiti $\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3$ come in (i), si ha $x_1 \in \tilde{\alpha}_2 \circ \tilde{\alpha}_3$.

(iii) Posto $X = \bigvee_i x_i$, $Y = \bigvee_i y_i$, se $X \wedge Y = 0 \neq y_i$, e $\alpha = \bigvee_i \alpha_i \in \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, detto $\tilde{\alpha}_i = (a_i \vee x_i) \wedge (\alpha_i \vee z_i)$ si ha: $\tilde{\alpha}_i \in \tilde{\alpha}_j \circ \tilde{\alpha}_k$:

(iv) Definiti X e Y come in (iii), se $X \wedge Y = 0$, $z_i \neq 0 \neq x_2 \neq \neq 0 \neq x_3$, $0 = z_i \wedge z_j$, ed esistono $\bar{\alpha}_i \in a_i \circ x_i$ e $\gamma_i \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$ tali che $\bar{\alpha}_i \in \in \bar{\alpha}_j \circ \bar{\alpha}_k$ e $\{\gamma_i\} = \bar{\alpha}_i \circ y_i \cap \alpha_i \circ x \cap z_i \circ a_i$, allora: $\gamma_i \in \gamma_j \circ \gamma_k$ se e solo se per ogni $u \in \mathcal{C}(F/0)$, $u \neq 0$, tale che $u \wedge X = 0$, scelto $v \in u * x_2$, e posto, in accordo con i risultati di [5], $\{v'\} = v * x_3 \wedge x_1 * u$, $\{\tilde{\alpha}_2\} = \tilde{\alpha}_2 \circ v \cap a_2 \circ u$, $\{\tilde{\alpha}_3\} = \tilde{\alpha}_3 \circ v' \cap a_3 \circ u$, si ha $a_1 \in \tilde{\alpha}_2 \circ \tilde{\alpha}_3$.

4.2. Definizione. Il reticolo $\mathfrak{L}$ si dice un G-reticolo se è un PA-reticolo che soddisfa alle condizioni C7, C8.

4.3. Lemma. *Nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano le condizioni* C7, C8 *sono soddisfatte.*

Dimostrazione. C7, e (i), (ii), (iv) in C8 sono facilmente verificate nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano. (iii) è immediata se $y_j \wedge y_k = 0$. Altrimenti, $y = \bigvee_i y_i \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, e possiamo supporre $b = \bigvee_i a_i$. È subito chiaro che $\alpha \in y \circ b$. Ma $\alpha_i \leqslant \alpha \wedge (a_i \vee y_i) \in a_i \circ y_i$ per cui $\alpha_i = \alpha \wedge (a_i \vee y_i)$. Se ora $\langle \boldsymbol{y} \rangle = y$, $\langle \boldsymbol{b} \rangle = b$, in modo che $\langle \boldsymbol{by} \rangle = \alpha$, si ha subito: $\alpha_i = \langle (\boldsymbol{by})^{h_i} \rangle$, per un opportuno h_i. Ma $\langle (\boldsymbol{by})^{h_i} \rangle \in \langle \boldsymbol{b}^{h_i} \rangle \circ \langle \boldsymbol{y}^{h_i} \rangle$, e si ha subito $\langle \boldsymbol{y}^{h_i} \rangle = y_i$, $\langle \boldsymbol{b}^{h_i} \rangle = a_i$, e quindi la tesi: infatti $y_i \in y_j * y_k$, e così $h_i = h_i \pm h_k$. ///

4.4. Teorema. *Sia $\mathfrak{L}$ un G-reticolo, $1_{\mathfrak{L}} = b \vee x \vee y$, con b, x, $y \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $x \neq 0 \neq y$ senza torsione, $b \wedge (x \vee y) = x \wedge (b \vee y) = y \wedge (b \vee x) = 0$, e sia b una catena finita di lunghezza l. Allora esiste un gruppo abeliano $\boldsymbol{G}$ il cui reticolo dei sottogruppi è isomorfo a $\mathfrak{L}$.*

Dimostrazione. Per C3, posto $F = x \vee y$, si ha che $F/0$ è un GA-reticolo. In virtù dei risultati in [5], esiste un gruppo abeliano $\boldsymbol{F}$ libero su due generatori e un isomorfismo $\varphi\colon \mathfrak{L}(\boldsymbol{F}) \to F/0$; senza perdita di generalità, supporremo $\boldsymbol{F} = \langle \boldsymbol{x} \rangle \times \langle \boldsymbol{y} \rangle$, $\varphi(\langle \boldsymbol{x} \rangle) = x$, $\varphi(\langle \boldsymbol{y} \rangle) = y$; per semplicità di notazione, porremo $\varphi(\langle \boldsymbol{x}^s \boldsymbol{y}^t \rangle) = x^s y^t$.

L'unico atomo a di $b/0$ è l'unico atomo di $\mathfrak{L}$: infatti, se c è un atomo di $\mathfrak{L}$, $(c \vee b) \wedge F = 0$, perchè $c \vee b$ ha dimensione finita. Per l'identità modulare, $c \leqslant b$, e $c = a$. Se $0 \neq u \leqslant F$, e $u \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, per C3 $(u \vee a)/0$ non è distributivo. Quindi esiste $z \leqslant a \vee u$ tale che $z \ngeqslant a$, $z \nleqslant u$. Così $z \wedge a = 0$, e $z/0 \simeq z/(z \wedge a) \simeq (z \vee a)/a \lesssim (u \vee a)/a \simeq u/0$, dunque $z \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$. Sia ora $u^n = (z \vee a) \wedge u$; è chiaro che $z \in u^n \circ a$, e che $z \wedge u \leqslant u^n$. Inoltre $u^n/(z \wedge u) = u^n/(z \wedge u_n) \simeq (u^n \vee z)/z = (z \vee a)/z \simeq a/0$, e così $z \wedge u = u^{pn}$ per un opportuno numero primo p. Sia $0 \neq v \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $v \leqslant F$, tale che $u \wedge v = 0$. È chiaro che $u \wedge (a \vee v) = 0$, poichè $u \wedge (a \vee v) \leqslant F \wedge (a \vee v) = v$. Per 3.1, si ha $w_1 = (a \vee v) \wedge (z \vee u^n v) \in a \circ v$, $w_2 = (a \vee u) \wedge (w_1 \vee uv) \in a \circ u$, e così $a \circ u \neq \emptyset$. Siano $\alpha, \beta \in a \circ u$, e, come prima, siano p, q numeri primi tali che $\alpha \wedge u = u^p$, $\beta \wedge u = u^q$. Per 4.1, l'intervallo

$(u\vee a)/u^{pq}$ è indecomponibile, e per C7 si ha $p=q$. Se poi $\alpha\in a\circ u$, $\beta\in a\circ v$, $\alpha\wedge u=u^p$, ancora per C7, per la indecomponibilità di $(a\vee u\vee \vee v)/(u^p\vee v^p)$, ottenuta come prima da 4.1, e per quanto appena visto, si ottiene $\beta\wedge v=v^p$; inoltre $|a\circ u|=|a\circ v|=p-1$. Riassumendo:

(i) $a\circ u$ contiene $p-1$ elementi, per un opportuno primo p, indipendente dalla scelta di $u\leqslant F$, $0\neq u\in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, e tale che se $\alpha\in a\circ u$, allora $\alpha\wedge u=u^p$.

Se ora $b=a$, si ha $b\circ u\neq\emptyset$. Sia allora $b>c\geqslant a$. $(b\vee u)/u^r$ è indecomponibile, per 4.1; per C7, esiste allora $k\in\mathcal{L}$ tale che $k\neq u\vee c$, $k\neq u^p\vee b$, $u^p\vee c\leqslant k\leqslant u\vee b$. Sia $z\in\mathcal{C}(\mathcal{L})$ tale che $z\vee c\vee u^p=k$; z esiste certamente per C1. Se fosse $(z\vee u)\wedge b\leqslant c$, si avrebbe $c=c\vee\big((z\vee u)\wedge b\big)=(c\vee z\vee u)\wedge b=(k\vee u)\wedge b=b$, assurdo; perciò $b< < z\vee u$. Così $z\in b\circ\big((z\vee b)\wedge u\big)$. Se ora $v\leqslant F$, $0\neq v\in\mathcal{C}(\mathcal{L})$, $u\wedge v=0$, ragionando come prima si ottiene $b\circ v\neq\emptyset$, e infine in ogni caso $b\circ u\neq\emptyset$. Con argomento analogo a quello usato per ottenere (i), e per induzione su l, si dimostra facilmente:

(ii) se p è il primo determinato in (i), si ha che $b\circ u$ contiene $p^{l-1}(p-1)$ elementi, e che se $\beta\in b\circ u$ allora $\beta\wedge u=u^{p^l}$.

Fissiamo ora una volta per tutte $\beta_x\in b\circ x$; per 3.1 $\beta_x\circ x^{-1}y\cap b\circ y$ contiene un unico elemento, che denoteremo β_y. Si ha $b/\big(b\wedge(\beta_x\vee x^n)\big)\simeq \simeq(b\vee\beta_x\vee x^n)/(\beta_x\vee x^n)=(x\vee\beta_x\vee x^n)/(\beta_x\vee x)\simeq x/\big(x\wedge(\beta_x\vee x^n)\big)=x/(x^{p^l}\vee x^n)$ e analogamente $b/\big(b\wedge(\beta_y\vee y^n)\big)\simeq y/(y^{p^l}\vee y^n)$. Ma $x/(x^{p^l}\vee x^n)\simeq y/(y^{p^l}\vee \vee y^n)$, e quindi

(iii) $b\wedge(\beta_x\vee x^n)=b\wedge(\beta_y\vee y^n)=:b^n$.

Definiamo $\beta_x^n=\beta_x\wedge(b\cap x^n)$, $\beta_y^n=\beta_y\wedge(b\vee y^n)$. Una facile applicazione dell'identità modulare mostra:

(iv) $\beta_x^n\in x^n\circ b^n$, $\beta_y^n\in y^n\circ b^n$.

Definiamo ancora $b^nx^s=(\beta_y^n\vee y^{-n}x^s)\wedge(b^n\vee x^s)$, $b^ny^t=(\beta_x^n\vee x^{-n}y^t)\wedge \wedge(b^n\vee y^t)$. Usando 3.1, se $n\neq 0$, si verifica facilmente che in ogni caso

(v) b^nx^s, $b^ny^t\in\mathcal{C}(\mathcal{L})$.

Supponiamo adesso che sia $s\neq 0$, e $b^nx^s=b^mx^s=z$, per qualche scelta di $m\neq n$. Per C3, z è senza torsione, e, poichè $s\neq 0$, $z\neq 0$; inoltre $z\wedge\beta_y=0$. Per 3.1 si ha che

$$|\beta_y^n\circ\beta_y^m\cap y^{-n}x^s\circ y^{-m}x^s|=1\ .$$

Ma $y^{-n}x^s \wedge y^{-m}x^s = 0$, poichè $s \neq 0$, $n \neq m$; così $y^{-n}x^s \circ y^{-m}x^s = y^{-n}x^s * * y^{-m}x^s = \{y^{m-n}, \; y^{-m-n}x^{2s}\}$. Ora $y^{-m-n}x^{2s} \wedge \beta_y = 0$, e $y^{-m-n}x^{2s} \neq 0$; così deve essere $y^{m-n} \in \beta_y^n \circ \beta_y^m$, e quindi $y^{m-n} \leqslant \beta_y$. Per (ii), $p^l | m-n$. Siamo ora in grado di mostrare:

(vi) se $b' \leqslant b$, e $s \neq 0$, ogni elemento di $b' \circ x^s$ è della forma $b^i x^s$ per un opportuno $0 \leqslant i \leqslant p^l - 1$, e $b^n x^s = b^m x^s$ se e solo se $n \equiv m$ (modulo p^l).

Si è infatti già visto che, per $0 \leqslant i \leqslant p^l - 1$, gli elementi $b^i x^s$ sono distinti. Basta ora osservare che, per (ii), $\left| \bigcup_{b' \leqslant b} b' \circ x^s \right| = p^l$, e si ha immediatamente la tesi.

(vii) $b^m = b^n$ se e solo se $(p^l, m) = (p^l, n)$.

Basta osservare che, per (ii), $y^{p^l} \leqslant \beta_y$, e quindi $\beta_y \vee y^m = \beta_y \vee y^{(m, p^l)}$. Ricordando che $\beta_x \in \beta_y \circ x y^{-1}$, e che

$$\beta_x = (\beta_y \vee x^{-1}y) \wedge (b \vee x) \qquad \text{e} \qquad \beta_y = (\beta_x \vee x^{-1}y) \wedge (b \vee y) \, ,$$

si ha:

$$\begin{aligned}
&(\beta_y \wedge (b \vee y^n)) \vee (\beta_x \wedge (b \vee x^n)) = \\
&\quad = \Big(((b \vee y) \wedge (\beta_x \vee x^{-1}y)) \wedge (b \vee y^n)\Big) \vee (\beta_x \wedge (b \vee x^n)) = \\
&\quad = ((\beta_x \vee x^{-1}y) \wedge (b \vee y^n)) \vee \beta_x \wedge (b \vee x^n)) = \\
&\quad = (\beta_x \vee x^{-1}y) \wedge \Big((b \vee y^n) \vee (\beta_x \wedge (b \vee x^n))\Big) = \\
&\quad = (\beta_x \vee x^{-1}y) \wedge \Big(y^n \vee ((b \vee \beta_x) \wedge (b \vee x^n))\Big) = (\beta_x \vee x^{-1}y) \wedge (y^n \vee b \vee x^n) \, ,
\end{aligned}$$

ma anche:

$$\begin{aligned}
x^{-n}y^n \vee \beta_x^n &= (x^{-n}y^n \vee x^n \vee b) \wedge (\beta_y \vee x^{-1}y) = \\
&= (y^n \vee x^n \vee b) \wedge (\beta_y \vee x^{-1}y) = (y^n \vee x^n \vee b) \wedge \beta_x \vee x^{-1}y) = \\
&= (x^{-n}y^n \vee y^n \vee b) \wedge (\beta_x \vee x^{-1}y) = \beta_y^n \vee x^{-n}y^n ,
\end{aligned}$$

e quindi

(viii) $x^{-n}y^n \in \beta_x^n \circ \beta_y^n$.

In virtù di (viii), una immediata applicazione di C8 (ii) garantisce

(ix) $x^{-s}y^t \in b^n x^s \circ b^n y^t$.

Sia ora $\boldsymbol{G} = \langle \boldsymbol{b} \rangle \times \boldsymbol{F}$, dove $\langle \boldsymbol{b} \rangle$ è un gruppo ciclico di ordine p^l. Si può definire una corrispondenza $\psi\colon \mathcal{C}(\mathcal{L}(\boldsymbol{G})) \to \mathcal{C}(\mathcal{L})$ attraverso la posizione: $\psi(\langle \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{x}^s \boldsymbol{y}^t \rangle) = (b^n \vee x^s y^t) \wedge (b^n x^s \vee y^t) \wedge (b^n y^t \vee x^s)$. Cominciamo infatti con l'osservare che $\psi(0) = 0$, e $\psi(\langle \boldsymbol{b}^n \rangle) = b^n$. Se $s \neq 0$, o $t \neq 0$, per 3.1 si ha in ogni caso $\psi(\langle \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{x}^s \boldsymbol{y}^t \rangle) \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$. Usando (vi), (vii) si vede poi facilmente che ψ è ben definita.

(x) ψ è suriettiva.

Sia $c \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$. Se $c \leqslant b \vee x$ si ha $c = b^n x^s$, per n, s opportuni, in virtù di (vi); e si vede facilmente dalla definizione che $\psi(\langle \boldsymbol{b}^n \boldsymbol{x}^s \rangle) = b^n x^s$. Analogamente si tratta il caso $c \leqslant b \vee y$. Se $c \leqslant F$, allora $c = x^s y^t$, e $\psi(\langle \boldsymbol{x}^s \boldsymbol{y}^t \rangle) = x^s y^t$. Sia allora $c \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$, e siano $0 \neq x^s = x \wedge (c \vee y \vee b)$, $0 \neq y^t = y \wedge (c \vee x \vee b)$, $0 \neq \bar{b} = b \wedge (c \vee F)$. Per 1.2 possiamo scegliere il segno di t in modo che sia $(c \vee b) \wedge F = x^s y^t$. Inoltre, sempre per 1.2 si ha $(c \vee x) \wedge (b \vee y) \in \bar{b} \circ y^t$, e $(c \vee y) \wedge (b \vee x) \in \bar{b} \circ x^s$; così, per (vi), $(c \vee x) \wedge \wedge (b \vee y) = b^m y^t$, e $(c \vee y) \wedge (b \vee x) = b^n x^s$, per m, n opportuni. Per 3.1, $b^m y^t$ è l'unico elemento di $\bar{b} \circ y^t \cap x^s \circ c$; basta quindi mostrare che $b^n y^t \in x^s \circ c \cap \bar{b} \circ y^t$. Ma $\bar{b} = b^n$: infatti $b^n x^s \in \bar{b} \circ x^s$, per 1.2, e $b^n x^s \in \in b^n \circ x^s$, per (v), e $b^n = \bar{b} = b \wedge (x^s \vee b^n x^s)$, per l'identità modulare. Così $b^n y^t \in \bar{b} \circ y^t$. Ma per C8 (i) si ha anche $b^n y^t \in c \circ x^s$, tenuto conto di (ix).

(xi) $b^{n_1} x^{s_1} \in b^{n_2} x^{s_2} \circ b^{n_3} x^{s_3}$ se e solo se $\langle \boldsymbol{b}^{n_1} \boldsymbol{x}^{s_1} \rangle \in \langle \boldsymbol{b}^{n_2} \boldsymbol{x}^{s_2} \rangle \circ \langle \boldsymbol{b}^{n_3} \boldsymbol{x}^{s_3} \rangle$,
$b^{n_1} y^{t_1} \in b^{n_2} y^{t_2} \circ b^{n_3} y^{t_3}$ se e solo se $\langle \boldsymbol{b}^{n_1} \boldsymbol{y}^{t_1} \rangle \in \langle \boldsymbol{b}^{n_2} \boldsymbol{y}^{t_2} \rangle \circ \langle \boldsymbol{b}^{n_3} \boldsymbol{y}^{t_3} \rangle$.

Se $\langle \boldsymbol{b}^{n_1} \boldsymbol{x}^{s_1} \rangle \in \langle \boldsymbol{b}^{n_2} \boldsymbol{x}^{s_2} \rangle \circ \langle \boldsymbol{b}^{n_3} \boldsymbol{x}^{s_3} \rangle$, esistono interi r, h, k tali che $n_1 + + rp^l = n_2 h + n_3 k$, $s_1 = s_2 h + s_3 k$. Ricordando che $b^{n_1 + rp^l} x^{s_1} = b^{n_1} x^{s_1}$ si può assumere senza perdita di generalità che esistano h, k tali che $n_1 = n_2 h + n_3 k$, $s_1 = s_2 h + s_3 k$. Qunindi $y^{n_1} \in y^{n_2 h} * y^{n_3 k}$, $x^{s_1} \in x^{s_2 h} * x^{s_3 k}$. Ora $y^{-n_1} x^{s_1} \in (y^{-n_2} x^{s_2})^h * (y^{-h_3} x^{s_3})^k$, e si verifica facilmente, in virtù dell'indennità modulare, che $\beta_y^{n_1} \in \beta_y^{n_2 h} \circ \beta_y^{n_3 k}$, $b^{n_1} \in b^{n_2 h} \circ b^{n_3 k}$. In ogni caso, per C8 (i), C8 (iii), $b^{n_1} x^{s_1} \in b^{n_2 h} x^{s_2 h} \circ b^{n_3 k} x^{s_3 k}$, e $b^{n_1} x^{s_1} \leqslant b^{n_2 h} x^{s_2 h} \vee b^{n_3 k} x^{s_3 k} \leqslant \leqslant b^{n_2} x^{s_2} \vee b^{n_3} x^{s_3}$. Si conclude facilmente, ripetendo il medesimo argomento, che $b^{n_1} x^{s_1} \in b^{n_2} x^{s_2} \circ b^{n_3} x^{s_3}$.

Viceversa, se $b^{n_1} x^{s_1} \in b^{n_2} x^{s_2} \circ b^{n_3} x^{s_3}$, si ha che $b^{n_1} x^{s_1} \leqslant b^{n_2} x^{s_2} \vee b^{n_3} x^{s_3}$. Osservando che

$$\begin{aligned}(b^{n_1} x^{s_1} \vee \beta_y) \wedge (x \vee y) &= \big((p_y^{n_1} \vee y^{-n_1} x^{s_1}) \wedge (b^{n_1} \vee x^{s_1})\big) \vee (\beta_y^{n_1} \vee \beta_y) \wedge (x \vee y) = \\ &= \Big(\big((\beta_y^{n_1} \vee y^{-n_1} x^{s_1}) \wedge (b^{n_1} \vee x^{s_1} \vee \beta_y^{n_1})\big) \vee \beta_y\Big) \wedge (x \vee y) = \\ &= (\beta_y^{n_1} \vee y^{-n_1} x^{s_1} \vee \beta_y) \wedge (x \vee y) = y^{-n_1} x^{s_1} \vee \big(\beta_y \wedge (x \vee y)\big) = \\ &\qquad = y^{-n_1} x^{s_1} \vee (\beta_y \wedge y) = y^{-n_1} x^{s_1} \vee y^{p^l},\end{aligned}$$

e così anche che

$$(b^{n_2}x^{s_2}\vee\beta_y)\wedge(x\vee y) = y^{-n_2}x^{s_2}\vee y^{p^l}, \quad (b^{n_3}x^{s_3}\vee\beta_y)\wedge(x\vee y) = y^{-n_3}x^{s_3}\vee y^{p^l},$$

si ha

$$\begin{aligned}\big((b^{n_2}x^{s_2}\vee\beta_y)\wedge(x\vee y)\big)\vee\big((b^{n_3}x^{s_3}\vee\beta_y)\wedge(x\vee y)\big) &= \\ = (x\vee y)\wedge\Big((b^{n_2}x^{s_2}\vee\beta_y)\vee\big((b^{n_3}x^{s_3}\vee\beta_y)\wedge(x\vee y)\big)\Big) &= \\ = (x\vee y)\wedge\Big(b^{n_2}x^{s_2}\vee\big((\beta_y\vee x\vee y)\wedge(b^{n_3}x^{s_3}\vee\beta_y)\big)\Big) &= \\ = (x\vee y)\wedge(b^{n_2}x^{s_2}\vee b^{n_3}x^{s_3}\vee\beta_y) &\geqslant (b^{n_1}x^{s_1}\vee\beta_y)\wedge(x\vee y),\end{aligned}$$

e quindi

$$y^{-n_1}x^{s_1}\leqslant y^{-n_2}x^{s_2}\vee y^{-n_3}x^{s_3}\vee y^{p^l}.$$

Allora $\langle \boldsymbol{y}^{-n_1}\boldsymbol{x}^{s_1}\rangle\leqslant\langle\boldsymbol{y}^{-n_2}\boldsymbol{x}^{s_2}\rangle\vee\langle\boldsymbol{y}^{-n_3}\boldsymbol{x}^{s_3}\rangle\vee\langle\boldsymbol{y}^{r^l}\rangle$; così esistono numeri interi r, h, k tali che $n_1+rp = n_2h + n_3k$, $s_1 = s_2h + s_3k$. Si ha quindi

$$\langle\boldsymbol{b}^{n_1}\boldsymbol{x}^{s_1}\rangle\leqslant\langle\boldsymbol{b}^{n_2}\boldsymbol{x}^{s_2}\rangle\vee\langle\boldsymbol{b}^{n_3}\boldsymbol{x}^{s_3}\rangle.$$

Analogamente, si ottengono

$$\langle\boldsymbol{b}^{n_2}\boldsymbol{x}^{s_2}\rangle\leqslant\langle\boldsymbol{b}^{n_3}\boldsymbol{x}^{s_3}\rangle\vee\langle\boldsymbol{b}^{n_1}\boldsymbol{x}^{s_1}\rangle \quad \text{e} \quad \langle\boldsymbol{b}^{n_3}\boldsymbol{x}^{s_3}\rangle\leqslant\langle\boldsymbol{b}^{n_1}\boldsymbol{x}^{s_1}\rangle\vee\langle\boldsymbol{b}^{n_2}\boldsymbol{x}^{s_2}\rangle,$$

e quindi $\langle\boldsymbol{b}^{n_1}\boldsymbol{x}^{s_1}\rangle\in\langle\boldsymbol{b}^{n_2}\boldsymbol{x}^{s_2}\rangle\circ\langle\boldsymbol{b}^{n_3}\boldsymbol{x}^{s_3}\rangle$. Si ragiona in modo simile per ottenere la seconda parte di (xi).

Per concludere la dimostrazione, in virtù di 2.1 basterà provare che se $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\in\boldsymbol{G}$, allora $\langle\boldsymbol{g}_1\rangle\in\langle\boldsymbol{g}_2\rangle\circ\langle\boldsymbol{g}_3\rangle$ se e solo se $\psi(\langle\boldsymbol{g}_1\rangle)\in\psi(\langle\boldsymbol{g}_2\rangle)\circ\psi(\langle\boldsymbol{g}_3\rangle)$. Sia $\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{b}^{n_i}\boldsymbol{x}^{s_i}\boldsymbol{y}^{t_i}\in\boldsymbol{G}$, $\langle\boldsymbol{g}_1\rangle\in\langle\boldsymbol{g}_2\rangle\circ\langle\boldsymbol{g}_3\rangle$. Per (xi), non è restrittivo assumere $(t_1, t_2, t_3)\neq(0, 0, 0)\neq(s_1, s_2, s_3)$, e $(n_1, n_2, n_3)\not\equiv(0,0,0)$ (mod. p). Supponiamo per cominciare che sia $\bigvee_{i=1}^{3}\langle\boldsymbol{x}^{s_i}\boldsymbol{y}^{t_i}\rangle\in\mathcal{C}(\mathcal{L})$. Si potrà ragionare esattamente come in (xi), non appena si mostri che se $s\neq 0$, $\psi(\langle\boldsymbol{b}^n\boldsymbol{x}^s\boldsymbol{y}^t\rangle) = (\beta_y^n\vee y^{-n+t}x^s)\wedge(b^n\vee x^sy^t)$. Per definizione, poichè $s\neq 0$, $\psi(\langle\boldsymbol{b}^n\boldsymbol{x}^s\boldsymbol{y}^t\rangle) = (b^nx^s\vee y^t)\wedge(b^n\vee x^sy^t)$. Per C8 (i), $(b^n\vee x^sy^t)\wedge(\beta_y^n\vee y^{-n+t}x^s)\in b^nx^s\circ y^t$, quanto si voleva. Se poi $\bigvee_{i=1}^{3}\langle\boldsymbol{x}^{s_i}\boldsymbol{y}^{t_i}\rangle\notin\mathcal{C}(\mathcal{L})$, per (xi) e C8 (iv) in ogni caso $\psi(\langle\boldsymbol{g}_1\rangle)\in\psi(\langle\boldsymbol{g}_2\rangle)\circ\psi(\langle\boldsymbol{g}_3\rangle)$.

Similmente si mostra che se $\psi(\langle g_1\rangle) \in \psi(\langle g_2\rangle)\circ\psi(\langle g_3\rangle)$, allora $\langle g_1\rangle \in \langle g_2\rangle\circ\langle g_3\rangle$. ///

Siamo ora in grado di enunciare e dimostrare:

4.5. TEOREMA. Un reticolo $\mathfrak{L}$ è isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano che contiene due elementi aperiodici indipendenti se e solo se $\mathfrak{L}$ è un G-reticolo e esistono x, $y \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L})$, $x \neq 0 \neq y$, x, y senza torsione, tali che $x\wedge y = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia L un elemento compatto di $\mathfrak{L}$, tale che $L \geqslant x\vee y$. Sia $L = a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_s\vee x_1\vee x_2\vee\ldots\vee x_t$ una unione diretta, come in C7, dove a_i è una catena finita, x_i è un elemento ciclico infinito. Sia $F = \bigvee_{i=1}^{t} x_i$. Certamente $t \geqslant 2$, altrimenti, se $y\wedge x_1 = 0$, si avrebbe $y/0 \simeq \simeq (y\vee x_1)/x_1 \leqslant L/x_1 \simeq (a_1\vee\ldots\vee a_s)/0$; ma quest'ultimo intervallo è finito, mentre y è senza torsione, un assurdo. Dimostriamo ora, per induzione su t, che $F/0$ è senza torsione. Se $t = 2$, per C3 $F/0$ è un GA-reticolo, e quindi è senza torsione. Sia allora $F_1 = x_2\vee\ldots\vee x_t$, e sia $F_1/0$ senza torsione, a un atomo di $F = x_1\vee F_1$. Allora $a \nleqslant F_1$, e posto $\bar{x} = (a\vee \vee F_1)\wedge x_1$, $\tilde{x} = (a\vee x_1)\wedge F_1$, si ha $a \in \bar{x}\circ\tilde{x}$, e di nuovo facilmente una contraddizione con C3. Se u, $v \in \mathfrak{C}(F/0)$, $u \neq 0 \neq v$, e $u\vee v \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L})$, per C3 si ha $u\wedge v \neq 0$. Se poi $u\wedge v \neq 0$, si ha che $(u\vee v)/v$ è finito, e quindi $u\vee v$ è a condizione massimale; se fosse $u\vee v \notin \mathfrak{C}(\mathfrak{L})$, si avrebbe che $u\vee v$ ha torsione, per C7, che è assurdo, come appena visto; così $u\vee v \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L})$. Se $u\wedge v = 0$, $(u\vee v)/0$ è un GA-reticolo per C3, e $|u * v| = 2$; se $u\wedge v \neq 0$, per quanto appena visto, preso $w \in \mathfrak{C}(F/0)$, $w \neq 0$, tale che $w\wedge(u\vee v) = 0$, $(w\vee u\vee v)/0$ è un GA-reticolo, e $|u * v| = 2$. È ora immediato verificare, con l'uso di C2, C7, e 3.1, che $F/0$ è un GA-reticolo. Per ogni i tale che $1 \leqslant i \leqslant s$, 4.4 permette ora di costruire un gruppo abeliano $\boldsymbol{A}_i$ tale che $\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}_i) \simeq (a_i\vee x_1\vee x_2)/0$, e, se $\boldsymbol{F}$ è un gruppo abeliano libero tale che $\mathfrak{L}(\boldsymbol{F}) \simeq F/0$, per 3.6 si possono costruire $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2, \ldots \boldsymbol{G}_S = \boldsymbol{G}_L$ tali che $\mathfrak{L}(\boldsymbol{G}_i) \simeq (a_1\vee a_2\vee \ldots \vee a_i\vee F)/0$, cosicchè $\mathfrak{L}(\boldsymbol{G}_L) \simeq \simeq L/0$. In virtù di un noto teorema di Baer [2], siamo ora nelle condizioni di applicare 2.2, e la dimostrazione è conclusa. ///

BIBLIOGRAFIA

[1] S. A. ANISHCHENKO, *Representations of modular lattices by lattices of subgroups*, Mat. Zap. Krasnoyarskogo Gos. Ped. In-ta, **1** (1965), pp. 1-21.

[2] R. Baer, *The significance of the system of subgroups for the structure of the group*, Amer. J. of Math., **61** (1939), pp. 1-44.
[3] H. Ribeiro, « *Lattices* » *des groupes abeliens finis*, Comm. Math. Helv., **23** (1949), pp. 1-17.
[4] L. E. Sadovskii, *Projectivities and isomorphisms of nilpotent groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR ser. Mat., **29** (1965), pp. 171-208.
[5] C. M. Scoppola, *Sul reticolo dei sottogruppi di un gruppo abeliano senza torsione di rango diverso da* 1: *una caratterizzazione reticolare*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **65** (1981), pp. 205-221.
[6] B. V. Yacovlev, *Conditions under which a lattice is isomorphic to a lattice of subgroups of a groups*, Algebra i Logika, **13** (1974), pp. 694-712.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 aprile 1984.