MARIO MIRANDA

Diseguaglianze isoperimetriche e diseguaglianze di Sobolev

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 97 (1997), p. 187-191
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1997__97__187_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 97 (1997)

Diseguaglianze isoperimetriche e diseguaglianze di Sobolev.

MARIO MIRANDA (*)

ABSTRACT - The Sobolev inequality is proven in Euclidean spaces. Such a proof can be used to prove the inequality on Riemannian manifolds.

Negli spazi euclidei R^n con $n > 1$, vale la diseguaglianza isoperimetrica classica:

$$[H^n(E) \cap H^n(R^n - E)]^{(n-1)/n} \leqslant [n\omega_n^{1/n}]^{-1} H^{n-1}(\partial E);$$

per ogni insieme $E \subset R^n$, con il seguente significato dei simboli:

H^n, H^{n-1} sono le misure di Hausdorff n- ed $(n-1)$-dimensionale in R^n,

$$a \cap b = \text{minimo}\{a, b\},$$

$$\omega_n = H^n(\{x \in R^n \mid |x| < 1\}),$$

$$\partial E \text{ è la frontiera di } E.$$

Tale diseguaglianza è conseguenza dei risultati di Ennio De Giorgi sul perimetro degli insiemi misurabili di R^n (v. [1], [2] e [3]); e delle osservazioni di Herbert Federer (v. [4]).

(*) Indirizzo dell'A.: Facoltà di Scienze, I-38050 Povo (TN).
E-mail: miranda@science.unitn.it

Le diseguaglianze di Sobolev, che dedurremo, come fece lo stesso De Giorgi in [5], dalla diseguaglianza isoperimetrica, sono:

$$\left(\int_{R^n} |g(x)|^{p\alpha}\, dH^n(x)\right)^{1/\alpha} \leq (n\omega_n^{1/n})^{-p}\cdot 2^{(n-1)p}\cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} [k^p 2^{k(n-p-n/\alpha)}][H^n(\operatorname{spt} g)]^{1/\alpha + p/n - 1}\cdot \int_{R^n} |Dg(x)|^p\, dH^n(x),$$

$$\forall g \in C_0^1(R^n),\ \forall p \in [1, n],\ \forall \alpha \in \left[1, \frac{n}{n-p}\right);$$

con il seguente significato dei simboli:

$$\operatorname{spt} g = \{x \in R^n \,|\, |g(x)| > 0\}, \qquad Dg(x) = (\text{gradiente } g)(x).$$

Osserveremo infine come ad R^n possa sostituirsi una varietà riemanniana M^n.

1. - Fissata $g \in C_0^1(R^n)$, $n > 1$, $p \in [1, n]$ ed $\alpha \in [1, n/(n-p))$ poniamo

$$E_\lambda = \{x \in R^n \,|\, |g(x)| > \lambda\},$$

$$\lambda_h = \min\{\lambda \,|\, H^n(E_\lambda) \leq 2^{-nh} H^n(E_0)\},$$

$$X_h = E_{\lambda_h}.$$

Dalla diseguaglianza di Hölder ricaviamo

$$\left(\int_{R^n} |g(x)|^{p\alpha}\, dH^n(x)\right)^{1/\alpha} \leq \sum_{h=0}^{\infty} \left(\int_{X_h - X_{h+1}} |g(x)|^{p\alpha}\, dH^n(x)\right)^{1/\alpha},$$

quindi

$$\left(\int_{R^n} |g(x)|^{p\alpha}\, dH^n(x)\right)^{1/\alpha} \leq [H^n(E_0)]^{1/\alpha} \sum_{h=0}^{\infty} [\lambda_{h+1}^p 2^{-nh/\alpha}].$$

D'altronde, osserviamo che, posto per $x \in \partial E_t$

$$ds(x) = \operatorname{dist}(x, \partial E_{t+dt})$$

abbiamo

$$dt \leqslant |Dg(x)|\, ds(x).$$

Integrando quest'ultima diseguaglianza su ∂E_t, otteniamo

$$H^{n-1}(\partial E_t)\, dt \leqslant \int_{E_t - E_{t+dt}} |Dg(x)|\, dH^n(x),$$

quindi, per quasi ogni $t > 0$:

$$H^{n-1}(\partial E_t) \leqslant \frac{d}{dt} - \int_{E_t} |Dg(x)|\, dH^n(x).$$

E, grazie alla diseguaglianza isoperimetrica

$$n\omega_n^{1/n}[H^n(E_t)]^{(n-1)/n} \leqslant \frac{d}{dt} - \int_{E_t} |Dg(x)|\, dH^n(x).$$

Integrando sull'intervallo $(\lambda_h, \lambda_{h+1})$ otteniamo

$$n\omega_n^{1/n} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{h+1}} [H^n(E_t)]^{(n-1)/n}\, dt \leqslant \int_{X_h - X_{h+1}} |Dg(x)|\, dH^n(x);$$

dalla quale si ricava

$$n\omega_n^{1/n} 2^{-(n-1)(h+1)}[H^n(E_0)]^{(n-1)/n}(\lambda_{h+1} - \lambda_h) \leqslant \int_{X_h - X_{h+1}} |Dg(x)|\, dH^n(x).$$

Applicando all'integrale la diseguaglianza di Hölder, otteniamo

$$n\omega_n^{1/n} 2^{-(n-1)(h+1)}[H^n(E_0)]^{(n-1)/n}(\lambda_{h+1} - \lambda_h) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{R^n} |Dg(x)|^p\, dH^n(x) \right)^{1/p} [H^n(E_0)]^{(p-1)/p} 2^{-nh((p-1)/p)}.$$

E da questa, elevando alla p:

$$(\lambda_{h+1} - \lambda_h)^p \leqslant$$

$$\leqslant [n\omega_n^{1/n}]^{-p}[H^n(E_0)]^{p/n-1} \cdot 2^{h(n-p)} \cdot 2^{n-1} \int_{R^n} |Dg(x)|^p\, dH^n(x).$$

Finalmente

$$\lambda_{k+1}^p \leqslant k^p \max_{0 \leqslant h \leqslant k} (\lambda_{h+1} - \lambda_h)^p \leqslant$$

$$\leqslant [n\omega_n^{1/n}]^{-p} [H^n(E_0)]^{p/n-1} 2^{n-1} 2^{k(n-p)} k^p \cdot \int_{R^n} |Dg(x)|^p \, dH^n(x).$$

Combinando questa con la stima dell'integrale

$$\left(\int_{R^n} |g(x)|^{pa} \, dH^n(x) \right)^{1/a} .$$

otteniamo

$$\left(\int_{R^n} |g(x)|^{pa} \, dH^n(x) \right)^{1/a} \leqslant [n\omega_n^{1/n}]^{-p} [H^n(E_0)]^{1/a + p/n - 1} \cdot$$

$$\cdot 2^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} [2^{k(n-p-n/a)} \cdot k^p] \int_{R^n} |Dg(x)|^p \, dH^n(x) \qquad \text{c.v.d.}$$

2. – Il procedimento di calcolo sopra esposto permette di estendere la validità delle diseguaglianze di Sobolev a situazioni diverse da quella considerata. Io stesso ho dimostrato ciò in [6] per il caso

$$M^n = \{(x, f(x)) \,|\, x \in \Omega, f\colon \Omega \to R\}$$

nell'ipotesi Ω aperto convesso di R^n, f soluzione della equazione delle superficie minime.

Un altro esempio significativo è

$$M^n = S^n = \{x \in R^{n+1} \,|\, |x| = 1\},$$

caso in cui le diseguaglianze valgono per funzioni

$$g\colon S^n \to R$$

nulle su una parte di misura positiva. Ovviamente la misura di tale parte entrerà nella diseguaglianza.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. De Giorgi, *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$*-dimensionale in uno spazio euclideo ad r dimensioni*, Ann. Mat. Pura Appl., **36** (1954), pp. 191-213.

[2] E. De Giorgi, *Nuovi teoremi relativi alle misure* $(r-1)$*-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni*, Ricerche Mat., 4 (1955), pp. 95-113.

[3] E. De Giorgi, *Sulla proprietà isoperimetrica della ipersfera nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sc. Fis. Mat. Natur. Sez. I, (8), **5** (1958), pp. 33-44.

[4] H. Federer, *A note on the Gauss-Green theorem*, Proc. Am. Math. Soc., **9** (1958), pp. 447-451.

[5] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **3** (1957), pp. 25-43.

[6] M. Miranda, *Diseguaglianze di Sobolev sulle ipersuperfici minimali*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 38 (1967), pp. 69-79.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 ottobre 1995.