Séminaire Samuel.
Algèbre commutative

Pierre Mazet

Caractérisation des épimorphismes par relations et générateurs

Séminaire Samuel. Algèbre commutative, tome 2 (1967-1968), exp. n° 2, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SAC_1967-1968__2__A2_0>

CARACTÉRISATION DES ÉPIMORPHISMES PAR RELATIONS ET GÉNÉRATEURS

par Pierre MAZET

Cette caractérisation repose sur le lemme suivant (cf. BOURBAKI, Algèbre Commutative, ch. I, § 2, n° 11, lemme 10).

LEMME. - Soient A un anneau unitaire, E un A-module à droite et F un A-module à gauche ; $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de générateurs de E , $(x_i)_{i\in I}$ une famille de générateurs de F , et $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille à support fini de vecteurs de F ; alors

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes f_\lambda = 0$$

équivaut à :

Il existe $(a_{\lambda,i})_{\lambda,i\in\Lambda\times I}$, famille à support fini de scalaires telle que :

$$(\forall\ \lambda \in \Lambda)\quad (f_\lambda = \sum_{i\in I} a_{\lambda,i}\, x_i)$$

et

$$(\forall\ i \in I)\quad (\sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda\, a_{\lambda,i} = 0)\quad .$$

La condition est évidemment suffisante car

$$e_\lambda \otimes f_\lambda = \sum e_\lambda\, a_{\lambda,i} \otimes x_i\quad .$$

La condition est nécessaire :

Soient X_λ les vecteurs de la base canonique de A-module à droite $A_d^{(\Lambda)}$, et φ le morphisme de $A_d^{(\Lambda)}$ dans E défini par $\varphi(X_\lambda) = e_\lambda$. On a la suite exacte

$$\operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{i} A_d^{(\Lambda)} \xrightarrow{\varphi} E \longrightarrow 0\quad ,$$

d'où la suite exacte

$$\operatorname{Ker}\varphi \otimes F \xrightarrow{j} A_d^{(\Lambda)} \otimes F \xrightarrow{\psi} E \otimes F \longrightarrow 0\quad ,$$

où $j = i \otimes \mathrm{Id}_F$, $\psi = \varphi \otimes \mathrm{Id}_F$, et

$$\psi(\sum X_\lambda \otimes f_\lambda) = \sum x_\lambda \otimes f_\lambda = 0\quad ,$$

donc

$$\sum X_\lambda \otimes f_\lambda \in \operatorname{Im} j \quad .$$

Il existe donc $(\nu_i)_{i\in I}$, famille à support fini de vecteurs de $\operatorname{Ker} \varphi$, telle que

$$\sum X_\lambda \otimes f_\lambda = j(\sum \nu_i \otimes x_i) \quad .$$

Or l'on a une décomposition

$$i(\nu_i) = \sum_{\lambda\in\Lambda} X_i \cdot a_{\lambda,i}$$

$(a_{\lambda,i})_{\lambda,i\in\Lambda\times I}$ à support fini, et

$$\sum X_\lambda \otimes f_\lambda = \sum X_\lambda \otimes a_{\lambda,i}\, x_i \quad .$$

(X_λ) étant une base de $A_d^{(\Lambda)}$, on a , pour tout λ , $f_\lambda = \sum a_{\lambda,i}\, x_i$, et $\nu_i \in \operatorname{Ker} \varphi$ s'écrit

$$\sum e_\lambda\, a_{\lambda,i} = 0 \quad .$$

C. Q. F. D.

Dans la suite, les anneaux considérés seront toujours commutatifs et unitaires.

Soient alors A un anneau, et B une A-algèbre unitaire (on ne suppose ni l'associativité, ni la commutativité de B).

Pour tout A-module M , désignons par $\mathcal{E}_A(B , M)$ la partie de $B \otimes_A M$ formée par les vecteurs z tels que, pour toute double flèche de A-algèbres (unitaires)

$$B \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} C \quad ,$$

on ait, dans $C \otimes_A M$,

$$\varphi \otimes \mathrm{Id}_M\ (z) = \psi \otimes \mathrm{Id}_M\ (z) \quad .$$

Il est clair que $\mathcal{E}_A(B , M)$ est un sous-A-module de $B \otimes_A M$ et qu'il contient $1_B \otimes x$ pour tout x de M (nous noterons $1_B \otimes M$ le sous-module des $1_B \otimes x$).

Il est clair également que B opère dans $B \otimes M$ de telle façon que

$$b'.(b \otimes m) = b'b \otimes m \quad .$$

Avec ces conventions, on peut alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. - Les éléments de $\mathcal{E}_A(B, M)$ sont exactement ceux qui admettent une décomposition du type $z = \sum a_{n,i} b_n z_i$, où $a_{n,i}$ est une famille à support fini de scalaires, b_n une famille d'éléments de B, z_i une famille d'éléments de $B \otimes_A M$, et, pour tout i,

$$\sum a_{n,i} b_n \in A.1_B \quad ,$$

et pour tout n,

$$\sum a_{n,i} z_i \in 1_B \otimes_A M \quad .$$

En effet, si z admet une telle décomposition, et si φ, ψ est une double flèche $B \rightrightarrows C$, alors :

$$\sum a_{n,i} b_n \in A.1_B \implies \sum a_{n,i} \varphi(b_n) = \sum a_{n,i} \psi(b_n)$$

$$\sum a_{n,i} z_i \in 1_B \otimes M \implies \sum a_{n,i} \varphi \otimes \mathrm{Id}_M(z_i) = \sum a_{n,i} \psi \otimes \mathrm{Id}_M(z_i) \quad ,$$

et alors

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \mathrm{Id}_M(z) &= \sum_n \varphi(b_n) \sum_i a_{n,i} \varphi \otimes \mathrm{Id}_M(z_i) \\ &= \sum_i \psi \otimes \mathrm{Id}_M(z_i) \sum_n a_{n,i} \varphi(b_n) \\ &= \sum a_{n,i} \psi(b_n) \psi \otimes \mathrm{Id}_M(z_i) \\ &= \psi \otimes \mathrm{Id}_M z \quad , \end{aligned}$$

donc $z \in \mathcal{E}_A(B, M)$.

Réciproquement, si $z \in \mathcal{E}_A(B, M)$, considérons l'algèbre $B \otimes_A B$ et les applications canoniques i_1 et i_2 de B dans $B \otimes_A B$ définies par

$$i_1(x) = 1_B \otimes x \qquad i_2(x) = x \otimes 1_B \quad .$$

Prenant alors pour double flèche particulière, la double flèche i_1, i_2, nous aurons

(1) $$i_1 \otimes \mathrm{Id}_M(z) = i_2 \otimes \mathrm{Id}_M(z) \quad .$$

Soit $(b_n)_{n \in \mathfrak{N}}$ une famille de générateurs du A-module B. Alors z admet une décomposition du type $z = \sum b_n \otimes x_n$, où x_n est une famille à support fini dans M, et la relation (1) s'écrit :

$$1_B \otimes z - \sum b_n \otimes 1_B \otimes x_n = 0 \quad .$$

Soit z_i est une famille de générateurs de $B \otimes_A M$; comme 1_B et les b_n engendrent B , on trouve en appliquant le lemme deux familles de scalaires $a_{n,i}$ et a_i à supports finis, telles que

$$(2) \qquad z = \sum a_i \, z_i \qquad 1_B \otimes x_n = \sum a_{n,i} \, z_i$$

et

$$(3) \qquad a_i . 1_B = \sum a_{n,i} \, b_n \quad .$$

Donc

$$z = \sum a_{n,i} \, b_n \, z_i \quad ,$$

(2) montre que $\sum a_{n,i} \, z_i \in 1_B \otimes M$, et (3) montre que $\sum a_{n,i} \, b_i \in A.1_B$.

C. Q. F. D.

Remarques. - La démonstration montre également que $\mathcal{E}_A(B , M)$ est le noyau de la double flèche

$$i_1 \otimes \mathrm{Id}_M \; , \qquad i_2 \otimes \mathrm{Id}_M \quad .$$

Un cas particulier est celui où $M = A$, alors il y a un isomorphisme canonique entre $B \otimes_A A$ et B qui identifie $\mathcal{E}_A(B , A)$ à une partie de B appelée épicentre de B , et notée $\mathcal{E}_A(B)$. C'est le noyau de la double flèche i_1 , i_2 ; c'est donc une sous-algèbre de B . Ses éléments ont une décomposition du type

$$\sum a_{m,n} \, b_n \, b'_n \quad ,$$

où $a_{m,n} \in A$, $b_m \in B$, $b'_m \in B$

$$\sum a_{m,n} \, b_m \quad \text{et} \quad \sum a_{m,n} \, b'_n \in A.1_B \quad .$$

Si B est associative ou commutative, il en est de même de $B \otimes_A B$; on peut donc reprendre la théorie en remplaçant "algèbre" par "algèbre associative" (ou commutative, ou les deux).

Représentation matricielle. - Soit $z = \sum a_{n,i} \, b_n \, z_i$ une décomposition d'un élément de $\mathcal{E}_A(B , M)$. Limitons les ensembles d'indice $\mathfrak{N}$ et I à des parties finies $\mathfrak{N}_0$ et I_0 de façon que $\mathfrak{N}_0 \times I_0$ supporte $a_{n,i}$. Notons B la matrice-ligne des b_n , Z la matrice-colonne des z_i , A la matrice des $a_{n,i}$, on a :

$$[z] = B\,A\,Z$$

avec les conditions : $B\,A$ à coefficients dans $A.1_B$, et $A\,Z$ à coefficients dans $1_B \otimes M$.

Mais si alors A' est une matrice équivalente à A $(A' = M\,A\,N)$ (avec M, N à coefficients dans A), posons :

$$B' = B\,M^{-1}\ , \qquad Z' = N^{-1}\,Z\ .$$

On a $[z] = B'\,A'\,Z'$ et $B'\,A' = B\,A\,N$ est à coefficients dans $A.1_B$; de même $A'\,Z' = M\,A\,Z$ est à coefficients dans $1_B \otimes M$.

<u>En particulier</u>, si A est un corps, toute matrice est équivalente à une matrice du type

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right] \ ;$$

donc les éléments de $\mathcal{E}_A(B\,,\,M)$ ont une décomposition du type :

$$z = \sum b_n\,z_n \quad \text{avec} \quad b_n \in A.1_B \quad \text{et} \quad z_n \in 1_B \otimes M\ ;$$

d'où $\mathcal{E}_A(B\,,\,M) = 1_B \otimes M$, et en particulier $\mathcal{E}_A[B] = A.1_B$.

<u>Changement d'anneau de base</u>. - Soient $A \xrightarrow{\varsigma} A'$ un morphisme d'anneaux, B une A-algèbre unitaire et M un A-module. Par extension de l'anneau de base on définit la A'-algèbre $A' \otimes_A B = B'$ et le A'-module $A' \otimes_A M = M'$.

On sait qu'il existe alors un isomorphisme canonique entre $B' \otimes_{A'} M'$ et $(B \otimes_A M) \otimes_A A'$, donc $B \otimes_A M'$.

THÉORÈME. - <u>Cet isomorphisme identifie</u> $\mathcal{E}_{A'}(B'\,,\,M')$ <u>et</u> $\mathcal{E}_A(B\,,\,M')$.

Il suffit de voir que l'on a le double diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A M' & \rightrightarrows & B \otimes_A B \otimes_A M' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' \otimes_{A'} M' & \rightrightarrows & B' \otimes_{A'} B' \otimes_{A'} M' \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les doubles flèches résultant des applications canoniques

$$B \rightrightarrows B \otimes_A B \quad \text{et} \quad B' \rightrightarrows B' \otimes_{A'} B'\ ;$$

et les flèches verticales sont les isomorphismes canoniques. Les noyaux des doubles flèches horizontales sont donc identifiés par ces isomorphismes ; or ce sont respectivement $\mathcal{E}_A(B , M')$ et $\mathcal{E}_{A'}(B' , M')$.

Applications. - Soient A un anneau , B une A-algèbre unitaire, M un A-module et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A . Désignons par K le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$ et ξ le morphisme canonique $A \to K$; il permet de définir $B' = B \otimes_A K$, $M' = M \otimes_A K$.

Si $z \in \mathcal{E}_A(B , M)$, il est clair que $z \otimes 1_K \in \mathcal{E}_A(B , M')$. Or, K étant un corps, $\mathcal{E}_K(B' , M') = 1_{B'} \otimes M'$; il existe donc un élément x' de M' tel que $z \otimes 1_K$ s'identifie à $1_{B'} \otimes x'$, c'est-à-dire

$$z \otimes 1_K = 1_B \otimes x' \quad .$$

Or tout élément x' de M' peut s'écrire $x \otimes 1/q^0$ où q^0 est la classe dans $A/\mathfrak{p}$ de q (q , élément de A , avec $q \notin \mathfrak{p}$ et $x \in M$). On a donc

$$qz \otimes 1_K = 1_B \otimes x \otimes 1_K$$

c'est-à-dire

$$[qz - (1_B \otimes x)] \otimes 1_K = 0 \quad .$$

Ceci signifie qu'il existe $r \in A - \mathfrak{p}$ avec

$$r[qz - 1_B \otimes x] \in \mathfrak{p}B \otimes M$$

en posant $rq = a$, $a \notin \mathfrak{p}$ et $rx = y$, on voit qu'il existe un $a \notin \mathfrak{p}$, avec

$$az \in 1_B \otimes M + \mathfrak{p}B \otimes M \quad .$$

En particulier si A est intègre, on peut prendre $\mathfrak{p} = \{0\}$, et il existe $a \neq 0$ tel que $az \in 1_B \otimes M$.

Application à l'étude des morphismes d'anneaux. - On sait que se donner un morphisme unitaire d'un anneau A dans un anneau B équivaut à se donner une structure de A-algèbre sur B . Pour tout morphisme $\alpha : A \to B$, on peut donc parler de l'épicentre de B .

Cet épicentre permet de caractériser

- les morphismes stricts par $\mathcal{E}(B) = A.1_B$;

- les épimorphismes par $\mathcal{E}(B) = B$;

c'est évident d'après la définition de $\mathcal{E}(B)$.

Les résultats déjà obtenus montrent que :

- Pour que α soit un épimorphisme strict, il faut et il suffit que α soit surjectif.
- Pour que α soit un épimorphisme, il faut et il suffit que tout $z \in B$ admette une décomposition du type $z = M\, P\, N$, où M et N sont des matrices à coefficients dans B, et où P, MP, PN sont à coefficients dans A (ou $A.1_B$).
- Tout épimorphisme issu d'un corps est surjectif.

Remarque. - La deuxième remarque nous amène à considérer l'ensemble $\mathcal{T}$ des triplets (P, U, V) où P, U, V sont des matrices à coefficients dans A de dimensions respectives :

P	m	lignes	n	colonnes ,
U	1	ligne	n	colonnes ,
V	m	lignes	1	colonne .

Nous voyons alors que si $A \xrightarrow{\alpha} B$ est un épimorphisme, pour tout z de B, on peut trouver $(P, U, V) \in \mathcal{T}$ et X, Y matrices à coefficients dans B tels que

$$(z) = X\,P\,Y\,, \qquad X\,P = U.1_B\,, \qquad P\,Y = V.1_B\ .$$

Mais si $z' \in B$ et si X' Y' sont à coefficients dans B avec

$$(z') = X'\,P\,Y'\,, \qquad X'\,P = U.1_B\,, \qquad P\,Y' = V.1_B$$

on aura :

$$(z') = X'\,P\,Y' = X\,P\,Y' = X\,P\,Y = (z)\ .$$

Donc, si on note $\mathcal{T}_z$ la partie de $\mathcal{T}$ formée par les cléments (P, U, V) pour lesquels il existe X et Y avec $(z) = X\,P\,Y$, $X\,P = U.1_B$, $P\,Y = V.1_B$, alors les $\mathcal{T}_z$ sont deux à deux disjoints.

En outre, l'on munit $\mathcal{T}$ des deux lois $+$ et $\circ$ ainsi définies :

$$(P, U, V) + (P', U', V') = (P'', U'', V'')$$

où :

$$P'' = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & P' \end{array}\right) \qquad U'' = (U \mid U') \qquad V'' = \left(\frac{V}{V'}\right)$$

et $(P, U, V) \circ (P', U', V') = (P \otimes P', U \otimes U', V \otimes V')$, après avoir fait une convention sur l'ordre à prendre pour les vecteurs de la base du produit tensoriel.

On voit que, pour z et z' dans B, on a

$$\mathcal{T}_z + \mathcal{T}_{z'} \subset \mathcal{T}_{z+z'} \qquad \mathcal{T}_z \circ \mathcal{T}_{z'} \subset \mathcal{T}_{zz'}\ .$$

Ce qui montre que, si $\mathcal{C}_B = \bigcup_{z \in B} \mathcal{C}_z$, $\mathcal{C}_B$ est fermé pour les lois $+$ et $\circ$; de plus, les $\mathcal{C}_z$ forment une partition de $\mathcal{C}_B$, donc peuvent être considérés comme les classes modulo une certaine relation d'équivalence $\mathcal{R}$, qui est stable pour les lois $+$ et $\circ$, et donc que B s'identifie à $\mathcal{C}_B/\mathcal{R}$.

Donc tout épimorphisme de source A s'obtient comme quotient d'un sous-truc de $\mathcal{C}_B$. Ceci a deux conséquences importantes :

1° Pour tout anneau A , il existe un ensemble E d'épimorphismes de source A tel que, pour tout épimorphisme $\alpha : A \rightarrowtail B$, il existe α' de A dans B' , avec $\alpha' \in E$, et un isomorphisme $u : B' \to B$ tel que $\alpha = u \circ \alpha'$.

2° Si A est infini, comme $\mathcal{C}$ est réunion dénombrable des parties pour lesquelles les matrices du triplet ont une dimension fixée, et comme ces parties sont équipotentes à A^n pour un certain n , on conclut

$$\text{Card } \mathcal{C} = \text{Card } A \quad .$$

Donc, si $A \to B$ est un épimorphisme, on a

$$\text{Card } B \leqslant \text{Card } A \, .$$

(<u>Remarque</u> : Cette dernière assertion est encore vraie si A est fini.)