

STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

FRANÇOIS SIMONOT

Analyse de la stabilité de systèmes de stockage par la métrique de Wasserstein

Statistique et analyse des données, tome 16, n° 3 (1991), p. 183-201

http://www.numdam.org/item?id=SAD_1991__16_3_183_0

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ANALYSE DE LA STABILITE DE SYSTEMES DE STOCKAGE PAR LA METRIQUE DE WASSERSTEIN

François SIMONOT

ESSTIN (Université de Nancy 1)

Parc R. Bentz

F- 54500 VANDOEUVRE LES NANCY

Résumé

Nous présentons une méthode de construction de majorants de la distance séparant les suites stationnaires (X_n) and (X'_n) engendrées par les relations $X_{n+1} = \max(X_n - B_n, 0) + A_n$ et $X'_{n+1} = \max(X'_n - B'_n, 0) + A'_n$ en fonction de la distance entre les séquences de contrôle (A_n, B_n) et (A'_n, B'_n) . Les distances sont évaluées en utilisant différentes métriques, en particulier celle de Wasserstein and Lévy - Prohorov. Une attention particulière est accordée au cas des séquences de contrôle constituées de v.a i.i.d.

Mots clés: Processus de Lindley , Distances entre variables aléatoires, Métriques de Wasserstein et Lévy - Prohorov , Convergence faible.

Classification A M S: 60 K 30, 90 B 05

Classification STMA: 13: 080, 13: 090

Abstract

We set out a method providing bounds for the distance between the stationary sequences (X_n) and (X'_n) generated by the relations $X_{n+1} = \max(X_n - B_n, 0) + A_n$ and $X'_{n+1} = \max(X'_n - B'_n, 0) + A'_n$ according to the distance between the controlling sequences (A_n, B_n) and (A'_n, B'_n) . These distances are appraised using various metrics, especially Wasserstein and Lévy - Prohorov metrics. Particular attention is paid to the case of i.i.d controlling sequences.

Keywords: Lindley Process, Distances between random Variables, Wasserstein and Lévy - Prohorov Metrics, weak Convergence.

1. INTRODUCTION.

Le modèle général de stockage à temps discret considéré ici, peut être décrit par le fonctionnement d'une retenue d'eau de capacité illimitée.

Soient $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$ les instants où on observe la quantité d'eau retenue par le barrage.

Soit A_n , la quantité d'eau récupérée par le barrage durant l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$. On suppose qu'à l'instant t_n^+ , une quantité d'eau B_n est demandée, cette demande est satisfaite si la réserve d'eau est suffisante, sinon la retenue d'eau est vidée.

Formellement, en posant $X_n = X(t_n)$, $M_n = X(t_n^+)$, on a:

$$X_{n+1} = \max(X_n - B_n, 0) + A_n \quad n \geq 0 \quad (1.1)$$

X_0 étant la retenue initiale.

$$M_{n+1} = \max(M_n + A_n - B_{n+1}, 0) \quad n \geq 0 \quad (1.2)$$

et la prise d'eau D_n à l'instant t_n^+ vaut:

$$D_n = \min(X_n, B_n) \quad n \geq 0 \quad (1.3)$$

Dans ce modèle, les grandeurs X_0 , A_n , B_n sont en général aléatoires, si bien que les relations précédentes engendrent des suites aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$, $(M_n)_{n \geq 0}$ et $(D_n)_{n \geq 0}$

Les équations (1.1) et (1.2) sont l'âme de nombreux problèmes de probabilité appliquée, citons entre autres:

Les problèmes d'inventaire et de stockage [Bhat, chap 14, 1984]

Les problèmes de trafic [Bhat, chap 20, 1984]

L'étude des files d'attente:

- Nombre de clients dans une file M/G/1

- Temps d'attente du nième client dans une file G/G/1

Bien entendu, le modèle de stockage présenté ici, malgré ses nombreuses applications, ne prétend pas à l'universalité. D'autres auteurs se sont penchés sur des modèles plus spécifiques, citons en particulier les travaux de Haslett [Haslett, 1980, 1982], Hooghiemstra [Hooghiemstra & Keane, 1985; Hooghiemstra & Scheffer, 1986; Greenwood & Hooghiemstra, 1988] consacrés aux modèles de stockage d'énergie du type $X_{n+1} = \max(\alpha X_n, \alpha \beta X_n + A_n)$

La relation (1.1) recouvre deux cas particuliers importants:

a) $A_n = 0$ pour tout n alors $X_{n+1} = \max(X_n - B_n, 0)$ relation du type (1.2), appelée quelquefois processus de Lindley, qui intervient notamment dans l'étude du temps d'attente du nième client d'une file G/G/1.

b) $B_n = b$ (constant), $X_{n+1} = \max(X_n - b, 0) + A_n$ qui intervient principalement dans les problèmes de trafic et de communication. [Hayes, p 120, 1986]

La donnée de la v.a X_0 et des suites $(A_n)_{n \geq 0}$, $(B_n)_{n \geq 0}$ permet d'engendrer , via la relation (1.1), les suites aléatoires $X^k = (X_{n+k})_{n \geq 1}$, pour tout $k \geq 0$.

Nous nous plaçons dans le cas où les séquences de contrôle $(A_n)_{n \geq 0}$, $(B_n)_{n \geq 0}$ sont strictement stationnaires, sous des hypothèses relativement simples et générales (qui seront précisées dans le § 2), les suites X^k convergent en loi , quand k tend vers l'infini, vers une suite stationnaire Y^0 solution de (1.1), et cela indépendamment de la v.a initiale X_0 . L'objet du présent article consiste à étudier la stabilité de la suite stationnaire Y^0 , d'un point de vue métrique, en fonction des séquences de contrôle $(A_n)_{n \geq 0}$, $(B_n)_{n \geq 0}$. Plus précisément, on se propose de calculer l'écart entre les suites stationnaires Y^0 et Y^0 engendrées par les relations de récurrence:

$$X_{n+1} = \max(X_n - B_n, 0) + A_n \quad n \geq 0$$

$$X'_{n+1} = \max(X'_n - B'_n, 0) + A'_n \quad n \geq 0$$

en fonction des écarts entre les suites (A_n) , (A'_n) et (B_n) , (B'_n) . Les écarts étant mesurés en utilisant différentes métriques, principalement celles de Wasserstein et Lévy-Prohorov.

Malgré de nombreux travaux concernant la stabilité de l'équation (1.2) [Borovkov, 1976; Kalashnikov, 1978; Kalashnikov & Tsitsiashvili, 1972; Karr, 1975; Whitt, 1974; Zolotarev, 1975 a; 1975 b], il ne semble pas qu'une approche métrique globale consistant à évaluer la distance entre Y^0 et Y^0 ait été développée. Pourtant cette façon de voir présente des avantages:

1) Elle permet d'obtenir une relation générale du type:

$$(*) \quad W(Y^0, Y^0) \leq \lim \sup E\{g(|X_n - X'_n|)\}$$

où $g(u) = u(1 + u)^{-1}$ et W désigne la distance de Wasserstein. Cette relation permet de ramener le calcul de la métrique de Wasserstein au calcul de la distance entre les lois

marginales, domaine dans lequel on dispose de nombreux résultats susceptibles d'être exploités (cf § 4)

2) L'aspect métrique procure une évaluation quantitative de la stabilité, nécessaire aux approximations.

3) Des résultats concernant l'écart des suites Y^0 et Y^0 , on peut déduire des majorants de la distance séparant des fonctionnelles définies sur Y^0 et Y^0 .

4) Le cadre général utilisé permet des démonstrations simples.

Malheureusement la méthode présente aussi quelques inconvénients:

1) Les résultats obtenus tiennent au fait que la solution de (1.1) peut être explicitée (cf § 2), et l'extension à d'autres modèles semble difficile. Signalons à ce propos l'étude de la loi limite marginale pour un processus de stockage d'énergie de la forme : $X_{n+1} = \max(\alpha X_n, \alpha \beta X_n + A_n)$ menée par Greenwood & Hooghiemstra (1988).

2) Le calcul des écarts entre suites aléatoires exige en général des hypothèses plus fortes (cf § 4) que celles nécessaires pour assurer la convergence.

3) L'utilisation des métriques composées (cf § 2) ne peut se faire que si les v.a considérées sont définies sur le même espace probabilisé, néanmoins on peut quelquefois lever cette restriction (cf § 5).

L'exposé qui suit est découpé en quatre paragraphes, le § 2 est consacré à la description des problèmes et à la mise en place des outils nécessaires. Le § 3 montre comment on peut établir la relation (*). Le § 4 décrit l'élaboration de relations métriques variées correspondant à diverses séquences de contrôle, en suivant la voie tracée par Zolotarev [Zolotarev, 1975 b]. Quant au § 5, il traite des séquences de contrôle i.i.d.

2. DESCRIPTION ET INFRASTRUCTURE.

Soient les v.a réelles $X_0, X_0, A_n, A'_n, B_n, B'_n, n \geq 0$, définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et les suites $(X_n)_{n \geq 1}, (X'_n)_{n \geq 1}$, vérifiant les relations:

$$X_{n+1} = \max(X_n - B_n, 0) + A_n \quad n \geq 0 \quad (2.1)$$

$$X'_{n+1} = \max(X'_n - B'_n, 0) + A'_n \quad n \geq 0 \quad (2.2)$$

avec les conditions initiales X_0 et X'_0 .

Les v.a étant définies sur le même espace probabilisé nous pourrions considérer des métriques composées aussi bien que des métriques simples (cf § 2.4). De plus il n'est pas rare qu'on dispose naturellement de v.a définies sur le même espace, par exemple quand $B_n = B'_n = b$ (constant) et $A'_n = f_n(A_n)$.

2.1 Notations et hypothèses.

L'hypothèse de base sera la suivante:

$(\zeta_n) = (A_n, B_n, A'_n, B'_n)$ définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) , à valeurs dans \mathbb{R}^4 , est strictement stationnaire et prolongeable aux indices négatifs tout en conservant la stationnarité stricte (le prolongement s'effectue grâce au théorème d'extension de Kolmogorov, par translation des lois finidimensionnelles).

Posons:

$$\xi_n = A_{n-1} - B_n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{Z}$$

$$S_0 = 0 \text{ et } S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \text{ pour } n \geq 1$$

$$\sigma_0 = 0 \text{ et } \sigma_n = \xi_{-1} + \xi_{-2} + \dots + \xi_{-n} \text{ pour } n \geq 1$$

$$Z = \sup (\sigma_n ; n \geq 0) \tag{2.3}$$

$$Y_n = B_n + \sup (\xi_n, \xi_n + \xi_{n-1}, \dots, \xi_n + \xi_{n-1} + \dots + \xi_{n-j}, \dots) \tag{2.4}$$

$$X^k = (X_{n+k})_{n \geq 1}, k \geq 0 \tag{2.5}$$

$$Y^k = (Y_{n+k})_{n \geq 1}, k \geq 0 \tag{2.6}$$

Nous supposons les conditions suivantes remplies:

(C 1) σ_n tend vers moins l'infini P ps.

(C 2) S_n tend vers moins l'infini en probabilité.

La condition (C1) est remplie si $(\xi_{-k})_{k \geq 1}$ obéit à la loi forte des grands nombres avec $E(\xi_{-1}) < 0$.

La condition (C 2) est vérifiée si $(\xi_k)_{k \geq 1}$ obéit à la loi faible des grands nombres avec $E(\xi_1) < 0$.

Enfin si $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire et ergodique avec $E(\xi_1) < 0$, (C1), (C2) sont satisfaites [Borovkov, p 16, 1976].

De plus on notera que Y_n et Z sont finies P ps et que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire. Nous utiliserons les mêmes notations comportant le signe ' et les mêmes hypothèses pour les suites (A'_n) et (B'_n) .

2.2 Solutions transitoires et solutions stationnaires.

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la solution de l'équation (2.1). Les résultats sont analogues à ceux de Borovkov [Borovkov, 1976], qui a traité les processus de Lindley.

Propriété 1.

La relation (2.1) a pour solution:

$$X_n = A_{n-1} + \max(S_{n-1} - S_0, S_{n-1} - S_1, \dots, S_{n-1} - S_{n-1}, S_{n-1} - B_0 + X_0) \quad (2.7)$$

ou encore:

$$X_n = B_n + \max(S_n - S_0, S_n - S_1, \dots, S_n - S_{n-1}, S_n - B_0 + X_0) \quad (2.8)$$

Propriété 2.

La suite strictement stationnaire $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifie $Y_{n-1} = \max(Y_n - B_n, 0) + A_n$ pour tout n de \mathbb{Z} .

Propriété 3.

Quand k tend vers l'infini, les suites $X^k = (X_{n+k})_{n \geq 1}$ convergent en loi vers la suite Y^0

2.3 L'espace métrique $(\mathbb{R}^\infty, B^\infty)$.

Nous allons considérer les suites aléatoires Y^k, X^k comme des v.a à valeurs dans $(\mathbb{R}^\infty, B^\infty)$

Soit \mathbb{R}^∞ le produit cartésien d'une infinité dénombrable de versions de \mathbb{R} muni de la topologie produit, cet espace topologique est métrisable, par exemple par la distance:

$$d(x, y) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} g(|x_n - y_n|) \text{ avec } g(u) = u(1+u)^{-1}$$

où $x = (x_n)_{n \geq 1}$ et $y = (y_n)_{n \geq 1}$ sont des suites réelles. (\mathbb{R}^∞, d) est séparable et complet, la tribu borélienne coïncide avec la tribu produit des tribus boréliennes des versions de \mathbb{R} [Métivier, p 244, 1968], il en résulte que Y^k, X^k, Y^k, X^k sont des v.a $(\mathcal{B}^\infty, \mathcal{A})$ mesurables à valeurs dans (\mathbb{R}^∞, d) .

Soit maintenant m_0 l'ensemble des v.a définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans (\mathbb{R}^∞, d) , nous considérons quelques métriques de probabilité sur m_0 qui vont permettre d'évaluer l'écart entre les v.a Y^k et Y^k .

2.4 Métriques sur m_0 .

Rappelons qu'une métrique de probabilité μ sur m_0 est une application vérifiant les propriétés suivantes:

- i) $\mu: m_0 \times m_0 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$
- ii) $P(X = Y) = 1 \Rightarrow \mu(X, Y) = 0$
 $\mu(X = Y) = 0 \Rightarrow \sup\{|P(X \in B) - P(Y \in B)|; B \in \mathcal{B}^\infty\} = 0$
- iii) $\mu(X, Y) = \mu(Y, X)$
- iv) $\mu(X, Y) \leq \mu(X, Z) + \mu(Z, Y)$ pour tous X, Y, Z dans m_0 .

On notera que cette définition est différente de la définition usuelle adoptée en topologie car $\mu(Y, X) = 0$ n'implique pas $X = Y$ P ps. Par la suite nous utiliserons les métriques suivantes:

a) Métrique de Ky-Fan

$$K(X, Y) = \inf\{\epsilon \mid P(d(X, Y) > \epsilon) < \epsilon\} \tag{2.9}$$

qui définit la convergence en probabilité dans m_0

b) Métrique de Lévy-Prohorov

$$\Pi(X, Y) = \max(\Pi_1(X, Y), \Pi_1(Y, X)) \tag{2.10}$$

$$\Pi_1(X, Y) = \inf\{\epsilon \mid P(X \in B) \leq P(X \in B^\epsilon) + \epsilon, \forall B \in \mathcal{B}^\infty\} \text{ où } B^\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^\infty \mid d(y, B) < \epsilon\}$$

c) Métrique D

$$D(X, Y) = E \{d(X, Y)\} \tag{2.11}$$

d) Métrique de Wasserstein

C'est la métrique minimale de la métrique D i.e:

$$W(X, Y) = \inf D(X, Y) = \inf E \{d(X, Y)\} \quad (2.12)$$

où inf est calculé sur l'ensemble des couples (U, V) tels que U ait même loi que X et V même loi que Y.

Entre les métriques précédentes existent des relations simples qui seront utilisées par la suite [Zolotarev, 1983]:

$$K^2(X, Y) \leq D(X, Y) \quad (2.13)$$

$$\Pi(X, Y) \leq K(X, Y) \quad (2.14)$$

$$\Pi^2(X, Y) \leq W(X, Y) \quad (2.15)$$

(2.15) s'obtenant à partir de (2.13) par passage aux métriques minimales.

Les définitions précédentes appellent une remarque:

Les métriques K et D sont des métriques composées, leur valeur dépend de la loi du couple (X, Y). Par contre les métriques W et Π sont des métriques simples, leur valeur ne dépend que des lois (marginales) de X et de Y.

3. DISTANCES ENTRE LES SUITES STATIONNAIRES.

Ce paragraphe est dédié à l'évaluation de la distance de Wasserstein entre les suites Y^0 et Y^0 qui ont déjà été définies dans le § 2.1; toutefois nous rappelons que : $Y^0 = (Y_n)_{n \geq 1}$ avec:

$$(3.1) \quad Y_n = B_n + \sup (\xi_n, \xi_n + \xi_{n-1}, \dots, \xi_n + \xi_{n-1} + \dots + \xi_{n-j}, \dots) \text{ qui s'écrit aussi:}$$

$$(3.2) \quad Y_n = B_n + S_n - \min (S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, -(\xi_0 + Z)) \text{ où } S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

$$Z = \sup(\sigma_n; n \geq 0)$$

avec une définition analogue pour Y^0

Nous poserons:

$$v(U, V) = E\{g(|U - V|)\} \text{ où } g(u) = u(1 + u)^{-1} \quad (3.3)$$

U et V étant deux v.a à valeurs réelles définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) ; v est une métrique au sens de la définition du § 2.4, définissant la convergence en probabilité, comme la métrique de Ky-Fan $K(U, V)$, [Kantorovich & Akilov, 1982]

$$\alpha_n(U_0) = P\{\min(S_0, S_1, \dots, S_n) > -\max(\xi_0 + Z, U_0)\} \quad (3.4)$$

où $U_0 = X_0 - B_0$ et de façon analogue:

$$\alpha'_n(U_0) = P\{\min(S'_0, S'_1, \dots, S'_n) > -\max(\xi'_0 + Z', U'_0)\} \quad (3.5)$$

où $U'_0 = X'_0 - B'_0$

Afin de pouvoir évaluer $D(Y^0, Y'^0)$ nous aurons besoin des deux lemmes suivants, dont les démonstrations se trouvent en annexe. Sous les hypothèses (C1) et (C2) du § 2, on a:

Lemme 1.

$$D(X^k, Y^k) \leq \alpha_k(U_0) \text{ pour tout } k \geq 0 \quad (3.6)$$

Lemme 2.

Quand k tend vers l'infini $\alpha_k(U_0)$ tend vers 0.

On en déduit immédiatement une démonstration de la convergence en loi de X^k vers Y^0 (propriété 3 du § 2.2) en effet:

Comme la convergence faible est métrisable par la métrique de Levy-Prohorov [Pollard, p 75, 1984] il suffit de voir que $\Pi(X^k, Y^0)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini. On a déjà noté que :

$(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire, si bien que Y^k, Y^0 ont même loi de probabilité et donc $\Pi(X^k, Y^0) = \Pi(X^k, Y^k)$; de $\Pi^2(X^k, Y^k) \leq D(X^k, Y^k) \leq \alpha_k(U_0)$ on déduit le résultat.

Le théorème ci-dessous établit l'inégalité (*) du § 1.

Théorème 1.

$$D(Y^0, Y'^0) \leq \limsup v(X_n, X'_n)$$

□

D étant une métrique on peut écrire $D(Y^k, Y'^k) \leq D(Y^k, X^k) + D(X^k, X'^k) + D(X'^k, Y'^k)$

$D(Y^k, X^k) + D(Y'^k, X'^k) \leq \alpha_k(U_0) + \alpha'_k(U'_0)$ d'après le lemme 1; de plus,

$$D(X^k, X'^k) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} v(X_{n+k}, X'_{n+k}) \leq \sup\{v(X_n, X'_n); n > k\}$$

La suite $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ étant strictement stationnaire le couple (Y^k, Y'^k) a même loi que (Y^0, Y'^0) , il vient alors:

$D(Y^0, Y'^0) = D(Y^k, Y'^k) \leq \alpha_k(U_0) + \alpha'_k(U'_0) + \sup\{v(X_n, X'_n); n > k\}$, soit d'après le lemme 2, $D(Y^0, Y'^0) \leq \limsup v(X_n, X'_n)$

□

Les relations (2.13), (2.14), (2.15) fournissent alors les corollaires:

Corollaire 1.

$$K^2(Y^0, Y'^0) \leq D(Y^0, Y'^0) \leq \limsup v(X_n, X'_n) \quad (3.7)$$

Corollaire 2.

$$\Pi^2(Y^0, Y'^0) \leq W(Y^0, Y'^0) \leq \limsup v(X_n, X'_n) \quad (3.8)$$

L'intérêt des résultats ci-dessus réside dans le fait que la distance entre les solutions stationnaires Y^0 et Y'^0 de (2.1) et (2.2) est majorée par la distance entre les v.a à valeurs réelles X_n et X'_n , quantité relativement facile à évaluer (cf § 4). Le résultat précédent suggère la remarque suivante:

Si on s'intéresse aux solutions transitoires X^k, X'^k il suffit de noter que:

$W(X^k, X'^k) \leq \sup\{v(X_n, X'_n); n \geq 1\}$, on a donc toujours:

$$W(X^k, X'^k) \leq \sup\{v(X_n, X'_n); n \geq 1\} \text{ pour tout } k \geq 0 \quad (3.9)$$

et même $k = \infty$, si on entend par X^∞ la suite ayant pour loi celle de Y^0 .

4. MAJORATION UNIFORME DE LA DISTANCE ENTRE LES LOIS MARGINALES .

On vient de voir le rôle joué par $\limsup v(X_n, X'_n)$ et $\sup v(X_n, X'_n)$ dans l'évaluation de $D(Y^0, Y'^0)$ et $D(X^k, X'^k)$; dans cette partie, nous utiliserons des résultats dûs à Zolotarev [Zolotarev, 1975 a] pour majorer $\sup v(X_n, X'_n)$ en fonction de $v(\xi_1, \xi'_1)$

4.1 La condition L_μ .

Soit μ une métrique de probabilité sur l'ensemble des v.a définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans \mathbb{R} . La condition L_μ est satisfaite si, pour tout $n \geq 1$, il existe des v.a définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans \mathbb{R} : X^*_n, X'^*_n, X^*, X'^* telles que (X^*_n, X'^*_n) ait même loi que (X_n, X'_n) pour tout $n \geq 1$

Posons:

$$d_\mu(n) = \sup\{\mu(X_k, X'_k); 1 \leq k \leq n\} \tag{4.1}$$

$$\delta_\mu = \sup\{d_\mu(n); n \geq 1\} \tag{4.2}$$

$$c_\mu(n) = \sup\{\mu(X^*_k, X^*) + \mu(X'^*_k, X'^*); k \geq n\} \tag{4.3}$$

Soient maintenant:

$(d^*_\mu(n))_{n \geq 1}$ une suite non décroissante vérifiant $d^*_\mu(n) \geq d_\mu(n)$ pour tout $n \geq 1$

$(c^*_\mu(n))_{n \geq 1}$ une suite non croissante tendant vers 0 à l'infini avec $c^*_\mu(n) \geq c_\mu(n)$ pour tout $n \geq 1$ et

$$N^* = \max\{n ; c^*_\mu(n) \geq d^*_\mu(n)\} \tag{4.4}$$

On a le résultat suivant dû à Zolotarev [Zolotarev, 1975 a]

Théorème 2

Si la condition L_μ est satisfaite alors:

$$\delta_\mu \leq 3 c^*_\mu(N^*) \tag{4.5}$$

L'article de Zolotarev ne comportant pas de démonstration, nous en proposons une.

□

$$\mu(X^*_k, X'^*_k) \leq \mu(X^*_k, X^*) + \mu(X'^*_k, X'^*) + \mu(X^*, X'^*)$$

$$\mu(X^*, X'^*) \leq \mu(X^*, X^*_k) + \mu(X^*, X'^*_k) + \mu(X^*_k, X'^*_k) \text{ puisque } \mu \text{ est une métrique.}$$

Soit $T > N^*$, on peut écrire:

$$d_\mu(T) = \max\{d_\mu(N^*), \mu(X^*_{N^*+1}, X'^*_{N^*+1}), \dots, \mu(X^*_T, X'^*_T)\}$$

$$d_\mu(T) \leq \max\{c^*_\mu(N^*), \mu(X^*_{N^*+1}, X'^*_{N^*+1}), \dots, \mu(X^*_T, X'^*_T)\}$$

Si $N^* < k \leq T$, on a:

$$\mu(X^*_k, X'^*_k) \leq c^*_\mu(N^*) + \mu(X^*, X'^*) \leq 2 c^*_\mu(N^*) + \mu(X^*_{N^*}, X'^*_{N^*}) \leq 3 c^*_\mu(N^*), \text{ ce qui établit le résultat.}$$

□

Par exemple si $d^*_\mu(n) = n\varepsilon$ et $c^*_\mu(n) = (A/n)^\gamma$ on trouve $\delta_\mu \leq 3.2\gamma(A\varepsilon)^{\gamma/(\gamma+1)}$

Montrons que la condition L_ν correspondant à la métrique ν est vérifiée. Les solutions stationnaires des équations (2.1) et (2.2) étant indépendantes des conditions

initiales X_0 et X'_0 , on peut considérer que $X_0 = B_0$ et $X'_0 = B'_0$, ce qui nous autorise à écrire:

$$X_n = B_n + \max(S_n - S_0, S_n - S_1, \dots, S_n - S_{n-1})$$

$$X'_n = B'_n + \max(S'_n - S'_0, S'_n - S'_1, \dots, S'_n - S'_{n-1})$$

$$\text{Posons : } X^*_n = B_{-1} + \sup(\xi_{-1}, \xi_{-1} + \xi_{-2}, \dots, \xi_{-1} + \xi_{-2} + \dots + \xi_{-n}) \text{ et } X^* = Y_{-1}$$

$$X'^*_n = B'_{-1} + \sup(\xi'_{-1}, \xi'_{-1} + \xi'_{-2}, \dots, \xi'_{-1} + \xi'_{-2} + \dots + \xi'_{-n}) \text{ et } X'^* = Y'_{-1}$$

obtenues à partir de X_n et X'_n par une translation des indices de $-(n+1)$

La suite $(\zeta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ étant stationnaire strictement, il en résulte que:

$$(X^*_n, X'^*_n) \text{ a même loi que } (X_n, X'_n)$$

$$(X^*_n, X^*) \text{ a même loi que } (X_n, Y_n)$$

$$(X'^*_n, X'^*) \text{ a même loi que } (X'_n, Y'_n)$$

Si bien que $v(X_n, X'_n) = v(X^*_n, X'^*_n)$ et aussi:

$$c_v(n) = \sup\{v(X^*_k, X^*) + v(X'^*_k, X'^*); k \geq n\} = \sup\{v(X_k, Y_k) + v(X'_k, Y'_k); k \geq n\}$$

Afin de pouvoir appliquer le théorème 2 il convient de choisir les suites $(d^*_v(n))$ et $(c^*_v(n))$.

4.2 Choix de $d^*_v(n)$.

Lemme 3.

$$d_\mu(n) \leq nv_0 \text{ où } v_0 = v(A_0, A'_0) + v(B_0, B'_0) \quad (4.6)$$

On peut donc prendre $d^*_v(n) = nv_0$

4.3 Choix de $c^*_v(n)$.

Lemme 4.

$$c_v(n) \leq \sum_{k \geq n} P(S_k > 0) + \sum_{k \geq n} P(S'_k > 0) \quad (4.7)$$

En utilisant l'inégalité de Markov, il vient:

$$P(S_k > 0) \leq \frac{E|S_k - ka|^\gamma}{(k|a|)^\gamma} \quad (\text{en notant } a = E(\xi_1) < 0) \quad (4.8)$$

ce qui permet de construire simplement $c^*_v(n)$ en utilisant les majorations classiques des moments, correspondant à différents types de processus. A titre d'exemples on obtient les théorèmes ci-dessous, correspondant à divers types de dépendance des séquences de contrôle.

Notons $B(\gamma, B)$ l'ensemble des v.a ξ vérifiant: $m_\gamma = E|\xi - E(\xi)|^\gamma \leq B |E(\xi)|^\gamma$

Condition (K).

La suite $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifie la condition (K) si les v.a $\omega_k = \xi_k - E(\xi_k)$ satisfont à:

$$|E(\omega_{j-u}\omega_j\omega_k\omega_{k+v})| \leq m_4 \min\{\tau(u), \tau(v)\}; \quad j \leq k; \quad u \geq 0; \quad v \geq 0; \quad \text{avec } \tau(j) \leq 1 \text{ et } \sum_{j \geq 1} j\tau(j) \leq K$$

[Borovkov, p 48, 1976].

Théorème 3.

Si ξ_1 et ξ'_1 appartiennent à $B(4, B)$ et si $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(\xi'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifient la condition (K) alors:

$$\delta_v \leq C v_0^{1/2} \quad \text{avec } C = 6(12B(8K+1))^{1/2} \quad (4.9)$$

□

La condition (K) assure: $E(S_k - ka)^4 \leq 3 m_4(8K + 1)k^2$ [Borovkov, p 49, 1976], si bien que:

$$\sum_{k \geq n} P(S_k > 0) \leq 6B(8K + 1) n^{-1} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Appliquons le théorème 2 avec $d^*_v(n) = nv_0$ et $c^*_v(n) = An^{-1}$, où $A = 12B(8K + 1)$. Il vient d'après l'exemple: $\delta_v \leq 6(Av_0)^{1/2}$

□

Théorème 4.

Si ξ_1 et ξ'_1 appartiennent à $B(\gamma, B)$ avec $\gamma > 2$, si les v.a ξ_n sont i.i.d, ainsi que les v.a ξ'_n alors il existe une constante C, ne dépendant que de B et γ telle que:

$$\delta_v \leq C v_0^{1-2/\gamma} \quad (4.10)$$

□

En utilisant l'inégalité de Marcinkiewicz - Zygmund [Chow et Teicher, 1988, p 367] on peut écrire:

$E|S_k - ka|^\gamma \leq A k^{\gamma/2} E|\xi_1 - a|^\gamma$, A étant une constante ne dépendant que de γ . Si bien que

$P(S_k > 0) \leq ABk^{-\gamma/2}$, puis:

$$\sum_{k \geq n} P(S_k > 0) \leq 2^{\gamma/2} ABn^{1-\gamma/2} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Posons $K = 2^{1+\gamma/2} AB$, puis appliquons le théorème 2 avec:

$$d^*_v(n) = nv_0$$

$$c^*_v(n) = Kn^{1-\gamma/2}$$

ce qui fournit: $\delta_v \leq 3 \cdot 2^{-1+\gamma/2} K^{2\gamma} v_0^{1-2\gamma}$ qui correspond bien au résultat annoncé.

□

Remarque:

En utilisant les majorants fournis par le lemme 4, on peut déduire d'autres résultats en tenant compte de la dépendance particulière des séquences de contrôle, ou de la nature des lois marginales des séquences de contrôle.

Les corollaires du § 3 se traduisent maintenant par ceux - ci:

Corollaire 1.

Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 3, on a:

$$K^2(Y^0, Y^0) \leq D(Y^0, Y^0) \leq C v_0^{1/2} \tag{4.11}$$

$$\Pi^2(Y^0, Y^0) \leq W(Y^0, Y^0) \leq C v_0^{1/2} \tag{4.12}$$

où C est donnée dans le théorème 2.

Corollaire 2.

Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 4, on a:

$$(4.13) \quad K^2(Y^0, Y^0) \leq D(Y^0, Y^0) \leq C v_0^{1-2\gamma}$$

$$(4.14) \quad \Pi^2(Y^0, Y^0) \leq W(Y^0, Y^0) \leq C v_0^{1-2\gamma} \quad \text{où C est donnée dans le théorème 4.}$$

Remarques:

1) En ce qui concerne la métrique v définie par $v(U,V) = E\{g(|U-V|)\}$ où U et V sont des v.a à valeurs réelles, on a les relations simples suivantes:

Puisque $K(U,V) = \inf \{\epsilon \mid P(|U-V| > \epsilon) < \epsilon\}$ on constate que:

$$(4.15) \quad K^2(U,V) \leq 4 v(U,V) \leq 8 K(U,V)$$

$$(4.16) \quad v(U,V) \leq g(E|U-V|)$$

Ces relations sont parfois utiles pour évaluer v_0 , de plus elles fournissent de nouveaux majorants des distances entre Y^0 et Y'^0 . Par exemple, sous les hypothèses du théorème 3 on peut écrire:

$$K(Y^0, Y'^0) \leq C' [K(\xi'_1, \xi_1)]^{1/4}, \quad C' \text{ étant une constante.}$$

2) La distance des séquences de contrôle $\xi = (\xi_n)_{n \geq 1}$ et $\xi' = (\xi'_n)_{n \geq 1}$ s'exprime par:

$$D(\xi, \xi') = v(\xi'_1, \xi_1) \leq v_0.$$

5. SEQUENCES DE CONTROLE I.I.D.

Revenons aux suites $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(X'_n)_{n \geq 1}$ engendrées par les relations (2.1) et (2.2):

$$X_{n+1} = \max(0, X_n - B_n) + A_n \text{ et } X_0 = 0, \text{ pour } n \geq 0 \quad (2.1)$$

$$X'_{n+1} = \max(0, X'_n - B'_n) + A'_n \text{ et } X'_0 = 0, \text{ pour } n \geq 0 \quad (2.2)$$

Nous nous plaçons dans le cas où:

- les v.a A_n sont i.i.d
- les v.a B_n sont i.i.d
- les suites $(A_n)_{n \geq 0}$ et $(B_n)_{n \geq 0}$ sont indépendantes, avec A_0 de f.r F , B_0 de f.r G . De plus $E(\xi_1) < 0$; de même en ce qui concerne (2.2), A'_0 de f.r F' , B'_0 de f.r G' et $E(\xi'_1) < 0$

Comme les suites $(A_n, B_n)_{n \geq 0}$, $(A'_n, B'_n)_{n \geq 0}$ ne sont pas nécessairement définies sur le même espace probabilisé l'hypothèse du § 2 n'est pas satisfaite. On peut contourner cette restriction de la façon suivante:

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de v.a définies sur un même espace probabilisé, i.i.d selon une loi uniforme sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned} \text{Posons: } \quad A^*_n &= F^{-1}(U_{2n}); \quad A'^*_n = F'^{-1}(U_{2n}) \\ B^*_n &= G^{-1}(U_{2n+1}); \quad B'^*_n = G'^{-1}(U_{2n+1}) \end{aligned}$$

où $F^{-1}(u) = \inf\{t \mid F(t) > u\}$, si bien que:

- $A^*_n, A'^*_n, B^*_n, B'^*_n$ ont même loi que A_n, A'_n, B_n, B'_n respectivement
- les v.a $\zeta^*_n = (A^*_n, A'^*_n, B^*_n, B'^*_n)$ sont définies sur le même espace probabilisé et la suite $(\zeta^*_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire.
- les suites $(\zeta^*_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (\zeta'^*_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont strictement stationnaires, les conditions (C1) et (C2) sont vérifiées.
- les suites $(X^*_n)_{n>0}, (X'^*_n)_{n>0}$ ont même loi que $(X_n)_{n>0}, (X'_n)_{n>0}$ respectivement et aussi:

$$W(Y^{0*}, Y^{0'}) = W(Y^0, Y'^0) \text{ et } \Pi(Y^{0*}, Y^{0'}) = \Pi(Y^0, Y'^0)$$

Le corollaire 2 du § 4 affirme qu'il existe une constante C telle que:

$$\Pi^2(Y^0, Y'^0) \leq W(Y^0, Y'^0) \leq C v_0^{1-2/\gamma}$$

Il reste à évaluer $v_0 = v(A^*_0, A'^*_0) + v(B^*_0, B'^*_0)$; en utilisant la concavité de g et l'inégalité de Jensen nous tirons:

$v(A^*_0, A'^*_0) = E\{g(|A^*_0 - A'^*_0|)\} \leq g(E|A^*_0 - A'^*_0|)$; d'autre part, par construction il vient:

$$E|A^*_0 - A'^*_0| = \int_0^1 |F^{-1}(y) - F'^{-1}(y)| dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(y) - F'(y)| dy \text{ qui est la distance de}$$

Wasserstein des v.a à valeurs réelles A_0, A'_0 , [Vallander, 1973]. Il en découle :

Théorème 5.

Si ξ'_1 et ξ_1 appartiennent à $\mathbf{B}(\gamma, B)$ avec $\gamma > 2$, il existe une constante C (donnée par le théorème 4, § 4) ne dépendant que de B et γ telle que:

$$\Pi^2(Y^0, Y'^0) \leq W(Y^0, Y'^0) \leq C [g(w(A'_0, A_0) + g(w(B'_0, B_0))]^{1-2/\gamma} \quad (5.1)$$

où $w(A'_0, A_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(y) - F'(y)| dy$ et $w(B'_0, B_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(y) - G'(y)| dy$ sont les

distances de Wasserstein des v.a réelles A'_0, A_0 et B'_0, B_0 .

Annexe

Lemme 1(§3).

$$D(X^k, Y^k) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} v(X_{n+k}, Y_{n+k}) \text{ et } v(Y_{n+k}, X_{n+k}) \leq P(Y_{n+k} \neq X_{n+k})$$

D'après (3.1) on a:

$$Y_n = A_{n-1} + S_{n-1} - \min(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, -(\xi_0 + Z)), \text{ et d'après (2.7)}$$

$$X_n = A_{n-1} + S_{n-1} - \min(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, B_0 - X_0)$$

$$P(Y_{n+k} \neq X_{n+k}) = P(\min(S_0, S_1, \dots, S_{n+k-1}, -(\xi_0 + Z)) \neq \min(S_0, S_1, \dots, S_{n+k-1}, B_0 - X_0))$$

$$P(Y_{n+k} \neq X_{n+k}) \leq P(\min(S_0, S_1, \dots, S_{n+k-1}) > -\max(X_0 - B_0, \xi_0 + Z)) = \alpha_{n+k-1}(X_0 - B_0)$$

On en déduit:

$$v(Y_{n+k}, X_{n+k}) \leq \alpha_{n+k-1}(X_0 - B_0), \text{ comme la suite } \alpha_n(X_0 - B_0) \text{ est décroissante, il vient:}$$

$$v(Y_{n+k}, X_{n+k}) \leq \alpha_k(X_0 - B_0) \text{ pour tout } k \geq 1 \text{ et donc } D(X^k, Y^k) \leq \alpha_k(X_0 - B_0)$$

Lemme 2(§3).

Soient $V = -\max(U_0, \xi_0 + Z)$, et $T_n = \min(S_0, S_1, \dots, S_{n-1})$ on peut écrire:

$P(T_n > V) = P(T_n > V, V \leq a) + P(T_n > T_n, T_n > a)$ pour tout a de \mathbf{R} , ε étant donné on peut trouver un a tel que $P(V \leq a) \leq \varepsilon$, si bien que $P(T_n > V) \leq \varepsilon + P(S_n > a)$, comme S_n tend vers moins l'infini en probabilité (hypothèse C 2) le résultat est acquis.

Lemme 3(§4).

$$v(X_n, X'_n) = E\{g(|X_n - X'_n|)\} \text{ où } g(u) = u(1 + u)^{-1}$$

Si u_1 et u_2 sont positifs alors $g(u_1 + u_2) \leq g(u_1) + g(u_2)$, des relations (2.1) et (2.2):

$$X_{n+1} = \max(X_n - B_n, 0) + A_n \text{ avec } X_0 = B_0$$

$$X'_{n+1} = \max(X'_n - B'_n, 0) + A'_n \text{ avec } X'_0 = B'_0$$

on tire: $|X_{n+1} - X'_{n+1}| \leq |X_n - X'_n| + |A_n - A'_n| + |B_n - B'_n|$ soit encore:

$v(X_{n+1}, X'_{n+1}) \leq v(X_n, X'_n) + v_0$. Comme $v(X_1, X'_1) = v(A_0, A'_0) \leq v_0$ il vient:

$$v(X_n, X'_n) \leq nv_0$$

Lemme 4 (§4).

$$c_v(n) = \sup\{v(X^*_k, X^*) + v(X'^*_k, X'^*); k \geq n\} = \sup\{v(X_k, Y_k) + v(X'_k, Y'_k); k \geq n\}$$

$$\text{et } v(Y_k, X_k) \leq P(Y_k \neq X_k)$$

$$Y_k = A_{k-1} + S_{k-1} - \min(S_0, S_1, \dots, S_{k-1}, -(\xi_0 + Z))$$

$$X_k = A_{k-1} + S_{k-1} - \min(S_0, S_1, \dots, S_{k-1}) \text{ (on a supposé } X_0 = B_0 \text{ et } X'_0 = B'_0)$$

$$P(Y_k \neq X_k) = P(\min(S_0, S_1, \dots, S_{k-1}, -(\xi_0 + Z)) \neq \min(S_0, S_1, \dots, S_{k-1}))$$

$$P(Y_k \neq X_k) \leq P(-(\xi_0 + Z) < \min(S_0, S_1, \dots, S_{k-1})) \leq P(0 < S_{k-1} + \xi_0 + Z)$$

$$S_{k-1} + \xi_0 + Z = \sup(\xi_{k-1} + \xi_{k-2} + \dots + \xi_0, \xi_{k-1} + \xi_{k-2} + \dots + \xi_1, \dots, \xi_{k-1} + \xi_{k-2} + \dots + \xi_j, \dots)$$

$$P(Y_k \neq X_k) \leq \sum_{j \geq 0} P(\xi_{k-1} + \xi_{k-2} + \dots + \xi_j > 0) = \sum_{j \geq 0} P(S_{k+j} > 0) = \sum_{j \geq k} P(S_j > 0)$$

d'où

$$c_v(n) \leq \sum_{k \geq n} P(S_k > 0) + \sum_{k \geq n} P(S'_k > 0)$$

REFERENCES

- Bhat, U. N.** *Elements of applied stochastic Processes*, J. Wiley, 2nd Ed, 1984.
- Borovkov, A. A.** *Stochastic Processes in queueing Theory*, Springer Verlag, 1976.
- Chow, Y.S & Teicher, H.** *Probability Theory*, Springer Verlag, 1988.
- Greenwood, P. E. & Hooghiemstra, G.** An extreme type limit law for a storage process. *Math. of Op. Research*, Vol 13, n° 2, pp. 232 - 242, 1988.
- Hasslet, J.** New bounds for the thermal energy storage process with stationary input. *J. Appl. Prob.*, 19, pp. 894 - 899, 1982.

- Hasslet, J. Problems in the stochastic storage of solar thermal energy. In *Analysis and Optimization of Stochastic Systems*, ed O. L. R. JACOBS et al, Academic Press, 1980.
- Hayes, J. F. *Modeling and Analysis of Computer Communication Networks*, Plenum Pub. Co, 1986.
- Hooghiemstra, G & Keane, M. Calculation of the equilibrium distribution for a solar energy storage model. *J. Appl. Prob*, 22, pp. 852 - 864, 1985.
- Hooghiemstra, G & Scheffer, C. L. Some limit theorems for an energy storage model. *Stoch. Proc. and Appl*, 22, pp. 121 - 127, 1986.
- Kalashnikov, V. V. Estimations of convergence rates and stability for regenerative and renovative processes, in *Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai, 24. Point processes and queueing problems, Keszthely (Hungary)*, pp. 163-180, 1978.
- Kalashnikov, V. V & Tsitsiashvili, G. S. On the stability of queueing systems with respect to disturbances of their distribution functions, *Engrg Cybernet*, 10, pp. 211-217, 1972.
- Kantorovitch, L. V. & Akilov, G. P. *Functional Analysis*, Pergamon Press, 2nd edition, 1982.
- Karr, A. F. Weak convergence of a sequence of Markov chains, *Zeit für Wahrsch verw Geb*, 33 , pp 41-48, 1975.
- Métivier, M. *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Dunod, 1968.
- Pollard, D. *Convergence of stochastic Processes*, Springer Verlag, 1984.
- Vallander, S. S. Calculation of the Wasserstein distance between probability distributions on the line, *Theory Prob Applications*, 18 , pp. 784-786, 1973.
- Whitt, W. The continuity of queues, *Adv. appl. Prob*, 6, pp.175-183, 1974.
- Zolotarev, V. M. Qualitative estimates in problems of continuity of queueing systems. *Theory Prob. Applications*, 20, pp. 211-213, 1975 a.
- Zolotarev, V. M, On the continuity of stochastic sequences generated by recurrent processes, *Theory Prob. Applications*, 20, pp.819-832, 1975 b.
- Zolotarev, V. M, Probability Metrics, *Theory Prob. Applications*, 28, pp. 278-302, 1983.