

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Théorèmes de Nikishin : théorèmes de factorisation pour les applications linéaires à valeurs dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 10 et 11, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973___A10_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

THEOREMES DE NIKISHIN : THEOREMES DE FACTORISATION
POUR LES APPLICATIONS LINEAIRES A VALEURS
DANS UN ESPACE $L^0(\Omega, \mu)$

par B. MAUREY

§ 1. UN PREMIER THEOREME DE NIKISHIN

Si (Ω, μ) est un espace de probabilité, et A une partie de $L^0(\Omega, \mu)$, nous poserons :

$$J_\alpha(A) = \sup \{J_\alpha(f, \mu) \mid f \in A\}$$

Théorème 1 : ([1], théorème 4) Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, α un nombre réel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, et A une partie convexe de $L^0(\Omega, \mu)$, formée de fonctions positives. Il existe une partie mesurable Ω_α de Ω , telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 2\alpha$, et que :

$$\forall f \in A \quad \int_{\Omega_\alpha} f d\mu \leq 2J_\alpha(A)$$

La démonstration utilisera le lemme suivant :

Lemme 1 : Soient K un compact convexe d'un elcs E , et \mathfrak{K} un ensemble convexe de fonctions réelles scs sur K , ne prenant pas la valeur $+\infty$. On suppose que chaque fonction f de \mathfrak{K} est concave sur K , et admet un maximum ≥ 0 sur K . Il existe un point $x_0 \in K$ tel que :

$$\forall f \in \mathfrak{K}, \quad f(x_0) \geq 0$$

Démonstration du lemme : D'après le lemme (4.5) de l'exposé II, il existe une probabilité de Radon ν sur K , telle que l'on ait :

$$\forall f \in \mathfrak{K}, \quad \int f d\nu \geq 0$$

Soit x_0 le barycentre de ν , c'est-à-dire :

$$\forall \xi \in E', \quad \langle x_0, \xi \rangle = \int \langle x, \xi \rangle d\nu(x)$$

(A priori x_0 est un élément de E' . Mais comme K est compact et convexe, on a bien $x_0 \in K$)

Soit $f \in \mathcal{K}$, et soit B l'ensemble des fonctions affines continues sur E plus grandes que f . Puisque f est concave scs et ne prend pas la valeur $+\infty$, on a :

$$f = \inf \{h \mid h \in B\}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \inf \{h(x_0) \mid h \in B\} = \inf \left\{ \int h(x) \, d\nu(x) \mid h \in B \right\} \\ &\geq \int \inf \{h \mid h \in B\} \, d\nu = \int f \, d\nu \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

Démontrons maintenant le théorème. Désignons par K l'ensemble des fonctions mesurables φ sur Ω telles que :

- a) $0 \leq \varphi \leq 1$
- b) $\int \varphi \, d\mu \geq 1 - \alpha$

Il est clair que K est un convexe compact pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$. Posons $R = J_\alpha(A)$, et définissons pour chaque $f \in A$ une fonction F_f sur K de la façon suivante :

$$F_f(\varphi) = R - \int \varphi(\omega) f(\omega) \, d\mu(\omega)$$

(l'intégrale étant finie ~~ou non~~).

Chaque fonction F_f est concave scs sur K , ne prend pas la valeur $+\infty$, et l'ensemble des fonctions F_f est convexe.

De plus chaque fonction F_f a un maximum ≥ 0 sur K . En effet, si φ_f désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $\{f \leq R\}$, on a par définition de $R = J_\alpha(A)$:

$$\int \varphi_f \, d\mu = \mu\{f \leq R\} = 1 - \mu\{f > R\} \geq 1 - \alpha, \text{ donc } \varphi_f \in K, \text{ et :}$$

$$F_f(\varphi_f) = R - \int \varphi_f f \, d\mu \geq 0.$$

D'après le lemme 1, il existe une fonction $\varphi_0 \in K$, telle que

$$\forall f \in A \quad \int \varphi_0(\omega) f(\omega) d\mu(\omega) \leq R$$

Posons $\Omega_\alpha = \{\varphi_0 \geq \frac{1}{2}\}$. On aura :

$$1 - \alpha \leq \int_{\Omega_\alpha} \varphi_0 d\mu + \int_{\Omega - \Omega_\alpha} \varphi_0 d\mu \leq \mu(\Omega_\alpha) + \frac{1}{2}(1 - \mu(\Omega_\alpha)), \text{ donc :}$$

$$\mu(\Omega_\alpha) \geq 1 - 2\alpha, \text{ soit } \mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 2\alpha, \text{ et :}$$

$\forall f \in A, \int_{\Omega_\alpha} f d\mu \leq 2 \int \varphi_0 f d\mu \leq 2R$, ce qui achève la démonstration .

§ 2. ESPACES DE TYPE p, 0 < p ≤ 2.

Nous rappellerons maintenant une définition déjà utilisée dans l'exposé VII : nous appellerons suite stable d'ordre p (0 < p ≤ 2) toute suite (f_1, \dots, f_n) de variables aléatoires indépendantes sur un espace de probabilité (X, P), suivant la loi γ_p (définie par $\mathfrak{J}\gamma_p(t) = \exp(-|t|^p)$, cf exposé V).

Nous rappellerons dans un lemme une propriété bien connue des suites stables d'ordre p :

Lemme 2 : Soient r et p deux nombres réels tels que 0 < p ≤ 2, 0 < r < p* [p* = p si p < 2, p* = +∞], et (f_1, \dots, f_n) une suite stable d'ordre p sur un espace de probabilité (X, P). On a pour toute suite (c_1, \dots, c_n) de nombres réels :

$$(\sum |c_i|^p)^{1/p} = \|\gamma_p\|_r^{-1} \left(\int |\sum c_i f_i(t)|^r dP(t) \right)^{1/r}$$

et pour tout réel $\beta \in]0, 1[$:

$$(\sum |c_i|^p)^{1/p} = (J_\beta(\gamma_p))^{-1} J_\beta(\sum c_i f_i(t), dP(t)).$$

Démonstration : Dans les deux égalités à démontrer, les deux membres sont des fonctions positivement homogènes de la suite (c_1, \dots, c_n) . Il suffit donc de démontrer le résultat lorsque $\sum |c_i|^p = 1$. D'autre part, les variables (f_i) étant indépendantes, la loi de $\sum c_i f_i$ admet pour transformée de Fourier :

$$\prod \exp(- |c_i t|^p) = \exp(- \sum |c_i t|^p) = \exp(- |t|^p),$$

c'est-à-dire que la loi de $\sum c_i f_i$ est exactement γ_p . Les égalités à démontrer sont alors évidentes.

Pour abrégé, nous poserons dans la suite :

$$\|\gamma_p\|_r^{-1} = A_{r,p}, \quad (J_\beta(\gamma_p))^{-1} = A_p^\beta.$$

Nous dirons qu'un espace quasi-normé E est de type p , $0 < p \leq 2$, si pour tout $\alpha \in]0, 1[$, il existe une constante K_α telle que l'on ait pour toute suite (x_1, \dots, x_n) de vecteurs de E et pour toute suite (f_1, \dots, f_n) stable d'ordre p sur un espace de probabilité (X, P) :

$$J_\alpha(\|\sum x_i f_i(t)\|, dP(t)) \leq K_\alpha (\sum \|x_i\|^p)^{1/p}$$

Pour chaque $\alpha \in]0, 1[$, nous désignerons par $K_{\alpha,p}(E)$ la plus petite constante K_α telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

Démontrons tout d'abord une propriété générale des espaces de type p :

Proposition 1 : a) Si E est un espace de type p , tout sous-espace F de E est de type p , et l'on a pour tout $\alpha \in]0, 1[$:

$$K_{\alpha,p}(F) \leq K_{\alpha,p}(E)$$

b) Si E est un espace de type p , tout quotient F de E est de type p , et l'on a pour tout $\alpha \in]0, 1[$:

$$K_{\alpha,p}(F) \leq K_{\alpha,p}(E)$$

Démonstration : Le premier point est évident. Démontrons le second. Soient E un espace de type p , F un quotient de E , $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ une suite d'éléments de F , π la surjection canonique de E sur F et ε un nombre réel > 0 . On peut trouver une suite (x_1, \dots, x_n) d'éléments de E telle que :

$$\pi(x_i) = \bar{x}_i \quad , \quad \|x_i\| \leq (1 + \varepsilon) \|\bar{x}_i\|$$

Si maintenant (f_1, \dots, f_n) est une suite stable d'ordre p , nous aurons :

$$\begin{aligned} J_\alpha(\|\Sigma \bar{x}_i f_i(t)\|, dP(t)) &= J_\alpha(\|\pi(\Sigma x_i f_i(t))\|, dP(t)) \\ &\leq J_\alpha(\|\Sigma x_i f_i(t)\|, dP(t)) \leq K_{\alpha,p}(E) (\Sigma \|x_i\|^p)^{1/p} \leq (1 + \varepsilon) K_{\alpha,p}(E) (\Sigma \|\bar{x}_i\|^p)^{1/p}, \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque ε est arbitraire.

Nous allons maintenant donner quelques exemples d'espaces de type p .

Proposition 2 : Soient p et r deux nombres réels tels que $0 < r < p \leq 2$, (Ω, μ) un espace de probabilité et E un sous-espace de $L^p(\Omega, \mu)$, tel qu'il existe une constante C telle que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| \leq C \left(\int |x(\omega)|^r d\mu(\omega) \right)^{1/r}$$

(Autrement dit, les topologies induites sur E par $L^p(\Omega, \mu)$ et $L^r(\Omega, \mu)$ coïncident).

L'espace E est alors de type p , et l'on a pour tout $\alpha \in]0, 1[$:

$$K_{\alpha,p}(E) \leq C \alpha^{-1/r} A_{r,p}^{-1}$$

Démonstration : Soient (x_1, \dots, x_n) une suite de vecteurs de E , et (f_1, \dots, f_n) une suite stable d'ordre p . Nous aurons pour tout $\alpha \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} J_\alpha(\|\Sigma x_i f_i(t)\|, dP(t)) &\leq \alpha^{-1/r} \left(\int \|\Sigma x_i f_i(t)\|^r dP(t) \right)^{1/r} \\ &\leq C \alpha^{-1/r} \left(\int \|\Sigma x_i f_i(t)\|_{L^r}^r dP(t) \right)^{1/r} = C \alpha^{-1/r} \left(\int |\Sigma x_i(\omega) f_i(t)|^r d\mu(\omega) dP(t) \right)^{1/r} \end{aligned}$$

$$= C \alpha^{-1/r} \left(\int d\mu(\omega) \left(\int |\sum x_i(\omega) f_i(t)|^r dP(t) \right) \right)^{1/r}$$

D'après le lemme 2, cette quantité est encore égale à :

$$\begin{aligned} & C \alpha^{-1/r} A_{r,p}^{-1} \left(\int (\sum |x_i(\omega)|^p)^{r/p} d\mu(\omega) \right)^{1/r} \leq C \alpha^{-1/r} A_{r,p}^{-1} \left(\int \sum |x_i(\omega)|^p d\mu(\omega) \right)^{1/p} \\ & = C \alpha^{-1/r} A_{r,p}^{-1} (\sum \|x_i\|^p)^{1/p}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 1 : Nous démontrerons plus tard la réciproque de la proposition 2 : si E est un sous-espace de $L^p(\Omega, \mu)$ qui est de type p , sa topologie coïncide avec la topologie induite par $L^r(\Omega, \mu)$, pour tout $r < p$.

Corollaire 1 : Soient p et q deux nombres réels tels que $0 < p < q \leq 2$, et (Y, ν) un espace mesuré quelconque. L'espace $L^q(Y, \nu)$ est de type p , et l'on a pour tout $\alpha \in]0, 1[$, et tout réel r tel que $0 < r < p$:

$$K_{\alpha,p}(L^q(Y, \nu)) \leq \alpha^{-1/r} A_{p,q}^{-1} A_{r,q} A_{r,p}^{-1}$$

Démonstration : D'après l'exposé V, la fonction $x \rightarrow \|x\|^q$ est de type négatif sur $L^q(Y, \nu)$. On en déduit (exposé V, remarque 2) l'existence d'un espace de probabilité (Ω, μ) et d'un opérateur linéaire u de $L^q(Y, \nu)$ dans $L^0(\Omega, \mu)$ tel que :

$$\forall r \in]0, q^*[, \forall x \in L^q(Y, \nu) \quad \|x\| = A_{r,q} \left(\int |u(x)|^r d\mu \right)^{1/r}$$

(On remarquera qu'il s'agit de la généralisation du lemme 2)

Considérons l'opérateur $v = A_{p,q}^{-1} u$. C'est une isométrie de $L^q(Y, \nu)$ dans $L^p(\Omega, \mu)$. Désignons par E l'image de $L^q(Y, \nu)$ par v , et soit r un nombre réel tel que $0 < r < p$.

Soit y un élément de E . Il est de la forme $y = v(x)$, et on a :

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|x\| = A_{p,q}^{-1} A_{r,q} \left(\int |u(x)|^r d\mu \right)^{1/r} \\ &= A_{p,q}^{-1} A_{r,q} \left(\int |y(\omega)|^r d\mu(\omega) \right)^{1/r} \end{aligned}$$

Autrement dit, l'espace E vérifie l'hypothèse de la proposition, avec $C = A_{p,q}^{-1} A_{r,q}$. D'autre part, E et $L^q(Y, \nu)$ étant isométriques, on aura pour tout $\alpha \in]0, 1[$:

$$K_{\alpha,p}(E) = K_{\alpha,p}(L^q(Y, \nu)),$$

et on achève donc la démonstration en appliquant la proposition 2.

Remarque 2 : Nous verrons ultérieurement que l'espace l^q n'est pas de type q . La restriction $p < q$ est donc nécessaire dans le corollaire 1.

Corollaire 2 : a) Tout espace normé E est de type p pour tout $p \in]0, 1[$, et l'on a pour $\alpha \in]0, 1[$, $r \in]0, p[$:

$$K_{\alpha,p}(E) \leq \alpha^{-1/r} A_{p,1}^{-1} A_{r,1} A_{r,p}^{-1}$$

b) Plus généralement tout espace s -normé E ($0 < s \leq 1$) est de type p pour tout $p \in]0, s[$, et l'on a pour $\alpha \in]0, s[$, $r \in]0, p[$:

$$K_{\alpha,p}(E) \leq \alpha^{-1/r} A_{p,s}^{-1} A_{r,s} A_{r,p}^{-1}$$

Démonstration : Il suffit de démontrer le résultat lorsque E est complet (dans le cas général, E sera un sous-espace de son complété, et on utilisera la proposition 1 a.) On sait alors que tout espace s -normé complet E est un quotient d'un espace $l^s(I)$ pour un ensemble I convenable. On conclut donc d'après la proposition 1 b) et le corollaire 1.

Nous allons trouver plus facilement une classe d'espaces de type 2 :

Proposition 3 : Soient (Y, ν) un espace mesuré quelconque, et q un nombre réel tel que $2 \leq q < \infty$. L'espace $L^q(Y, \nu)$ est de type 2, et l'on a pour tout $\alpha \in]0, 1[$:

$$K_{\alpha,2}(L^q(Y, \nu)) \leq \alpha^{-1/q} A_{q,2}^{-1}$$

Démonstration : Soient (x_1, \dots, x_n) une suite d'éléments de $L^q(Y, \nu)$, et (f_1, \dots, f_n) une suite stable d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
& J_{\alpha}(\|\Sigma x_i f_i(t)\|, dP(t)) \leq \alpha^{-1/q} (\int \|\Sigma x_i f_i(t)\|^q dP(t))^{1/q} \\
& = \alpha^{-1/q} (\int |\Sigma x_i(u) f_i(t)|^q dP(t) dv(u))^{1/q} = \alpha^{-1/q} A_{q,2}^{-1} (\int (\Sigma |x_i(u)|^2)^{q/2} dv(u))^{1/q} \\
& \leq \alpha^{-1/q} A_{q,2}^{-1} (\Sigma (\int |x_i(u)|^q dv(u))^{2/q})^{1/2} = \alpha^{-1/q} A_{q,2}^{-1} (\Sigma \|x_i\|^2)^{1/2}
\end{aligned}$$

§ 3. THEOREMES DE NIKISHIN

Nous allons passer maintenant à la démonstration des théorèmes de Nikishin proprement dits. Nous ne ferons que commencer cette démonstration, qui sera poursuivie dans l'exposé suivant.

Nous introduisons une nouvelle définition :

Soient maintenant E un espace vectoriel, V une partie équilibrée de E et p un nombre réel tel que $0 < p \leq 2$. Nous dirons qu'une partie A de E est de type (p, V) si pour tout $\alpha \in]0, 1[$ il existe une constante K_{α} telle que l'on ait pour toute suite (x_1, \dots, x_n) d'éléments de A , toute suite $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de réels et toute suite stable d'ordre p (f_1, \dots, f_n) sur un espace de probabilité (X, P) :

$$J_{\alpha}(j_V(\Sigma \lambda_i x_i f_i(t)), dP(t)) \leq K_{\alpha} (\Sigma |\lambda_i|^p)^{1/p} \quad \bullet$$

Nous noterons $K_{\alpha, p}(V, A)$ la plus petite constante K_{α} telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

Avec cette nouvelle terminologie, dire qu'un espace quasi-normé E est de type p équivaut à dire que sa quasi-boule unité B est de type (p, B) , et :

$$K_{\alpha, p}(E) = K_{\alpha, p}(B, B)$$

Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, et $\alpha \in]0, 1[$. Nous désignerons par V_{α} le voisinage de zéro équilibré dans $L^0(\Omega, \mu)$ défini par :

$$V_{\alpha} = \{f \mid J_{\alpha}(f, \mu) \leq 1\}$$

• (j_V étant la jauge de V).

$(J_\alpha(f, \mu)$ est donc la jauge de V_α).

Proposition 4 : Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, $\alpha \in]0, 1[$, $p \in]0, 2]$ et A une partie de $L^0(\Omega, \mu)$ de type (p, V_α) .

Il existe une partie mesurable Ω_α de Ω , telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 8\alpha$, et :

$$\forall f \in A \quad \left(\int_{\Omega_\alpha} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq 2^{1/p} A^{1/2} K_{\alpha, p}(V_\alpha, A)$$

Démonstration : Nous utiliserons l'inégalité de Fubini

$$J_\gamma [J_\delta(h(t, \omega), d\mu(\omega)), dP(t)] \leq J_\alpha (J_\beta(h(t, \omega) dP(t)), d\mu(\omega)),$$

lorsque $\alpha + \beta \leq \gamma\delta$. ([2], Proposition (XXIV, 2, 4))

Soient (g_1, \dots, g_n) une suite d'éléments de A , $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une suite de nombres réels et (f_1, \dots, f_n) une suite stable d'ordre p . Nous aurons, d'après le lemme 2, l'inégalité de Fubini et la définition du type (p, V_α) :

$$\begin{aligned} J_{4\alpha} \left((\sum |\lambda_i g_i(\omega)|^p)^{1/p}, d\mu(\omega) \right) &= A_p^{1/2} J_{4\alpha} (J_{1/2}(|\sum \lambda_i g_i(\omega) f_i(t)|, dP(t)), d\mu(\omega)) \\ &\leq A_p^{1/2} J_\alpha (J_\alpha(|\sum \lambda_i g_i(\omega) f_i(t)|, d\mu(\omega)), dP(t)) \\ &= A_p^{1/2} J_\alpha (j_{V_\alpha}(\sum \lambda_i g_i f_i(t)), dP(t)) \\ &\leq A_p^{1/2} K_{\alpha, p}(V_\alpha, A) (\sum |\lambda_i|^p)^{1/p} \end{aligned}$$

Considérons l'ensemble B des fonctions de la forme $\sum |\lambda_i g_i(\omega)|^p$, où (g_1, \dots, g_n) est une suite d'éléments de A , et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une suite de réels telle que $\sum |\lambda_i|^p \leq 1$. Cet ensemble B est convexe, et formé de fonctions positives. D'autre part, l'inégalité précédente se traduit, lorsque $\sum |\lambda_i|^p \leq 1$, par :

$$\mu \{ \omega \mid \sum |\lambda_i g_i(\omega)|^p > (A_p^{1/2} K_{\alpha, p}(V_\alpha, A))^p \} \leq 4\alpha,$$

c'est-à-dire encore $J_{4\alpha}(B) \leq (A_p^{1/2} K_{\alpha,p}(V_\alpha, A))^p$

D'après le théorème 1, il existe une partie mesurable Ω_α de Ω telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 8\alpha$, et :

$$\forall f \in B \quad \int_{\Omega_\alpha} f d\mu \leq 2J_{4\alpha}(B),$$

et en particulier :

$$\forall g \in A \quad \left(\int_{\Omega_\alpha} |g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq 2^{1/p} A_p^{1/2} K_{\alpha,p}(V_\alpha, A)$$

ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. M. Nikishin : Resonance theorems and superlinear operators,
Transl. of contents of Uspekhi Mat. Nauk, Vol. XXV, N°6, Nov. Déc. 1970.
- [2] Séminaire L. Schwartz 1969-1970.
-