Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Maurey

Un lemme de H. P. Rosenthal

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 21, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A20_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1972-1973

UN LEMME DE H. P. ROSENTHAL

par B. MAUREY

Exposé N° XXI

2 Mai 1973

Cet exposé est principalement consacré à la démonstration d'un lemme très important dû à H. P. Rosenthal [1], lemme 6. Pour ne pas alourdir la démonstration du lemme proprement dite, nous allons introduire dès maintenant un certain nombre de quantités, vérifiant certaines conditions. On peut donc lire ce passage en diagonale, quitte à y revenir au moment où les conditions apparaîtront dans la démonstration.

On se donne un $\varepsilon > 0$ (petit) et un entier n. On se donne d'autre part trois nombres réels p, q, r tels que $0 < p < q < +\infty$, $1/p = 1/q + 1/r$. On supposera $q \geq 1$.

Désignons par l_n^q l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $(\sum_{i=1}^{n} |c_i|^q)^{1/q}$. Puisque cet espace est de dimension finie, il est clair que l'on peut trouver un $\alpha > 0$ (petit) tel que l'on ait :

(1) Si (e_i) désigne la base canonique de l_n^q et si (x_i) est un système de vecteurs de l_n^q tel que l'on ait $\|x_i - e_i\| \leq \alpha$ pour chaque i, l'opérateur w de l_n^q dans lui-même défini par $w(e_i) = x_i$ est inversible, et $\|w^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$.

Choisissons un $\delta \in]0,1[$ (très près de 1) de façon que :

(2) $$[(n-1)(1-\delta^q) + (1-\delta)^q]^{1/q} \leq \alpha$$

Choisissons $\sigma \in]0,1[$ (petit) tel que :

(3) $$\delta < (1-\sigma)^{1/r}$$

D'après (3), on peut trouver un nombre K (grand) tel que l'on ait $(1-\sigma)^{q/r}[1 - (\frac{n}{\sigma K^p})^{q/r}] > \delta^q$. On peut alors trouver un nombre $\bar{N} \geq K$ (très grand), tel que l'on ait pour tout réel $N \geq \bar{N}$:

(4) $$(1-\sigma)^{q/r}.\ [1 - (\frac{n}{\sigma K^p})^{q/r}].N^q - K^{q-p} \geq \delta^q N^q$$

Rappelons maintenant la notation $C_{p,q}(u)$. Soient E un espace quasi-normé, et u un opérateur linéaire continu de E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$. D'après le théorème 1, exposé XV, on peut interpréter $C_{p,q}(u)$ de deux façons :

a) C'est la plus petite constante C telle que l'on ait pour toute suite (x_n) de vecteurs de E :

$$\left(\int (\Sigma |u(x_n)|^q)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} \leq C(\Sigma \|x_n\|^q)^{1/q}$$

b) C'est l'inf des constantes C telles qu'il existe une fonction $\varphi \in L^r(\Omega,\mu)$, telle que $\int |\varphi|^r d\mu = 1$, et que :

$$\forall\, x \in E,\ \left(\int \left|\frac{u(x)}{\varphi}\right|^q d\mu\right)^{1/q} \leq C\|x\|$$

Nous allons maintenant énoncer le lemme de Rosenthal. Il s'agit d'une étude très fine de ce qui se passe lorsqu'un opérateur u de E dans $L^p(\Omega,\mu)$ a tendance à ne pas se factoriser par $L^q(\Omega,\mu)$, c'est à dire que $C_{p,q}(u)$ est très grand. Les constantes qui interviennent dans l'énoncé sont celles qui ont été définies au début :

<u>Lemme de Rosenthal</u> : Soit Y un espace normé de dimension finie. S'il existe un opérateur linéaire u de Y dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, tel que $C_{p,q}(u) \geq \tilde{N}\|u\|$, il existe un opérateur linéaire u' de Y dans l_n^q, de norme $\leq 1+\varepsilon$, et n vecteurs de norme 1 dans Y, $(y_1,\ldots,y_n)$ tels que l'on ait pour chaque i :

$$u'(y_i) = e_i$$

(où (e_i) désigne la base canonique de l_n^q).

<u>Démonstration</u> : Soit u un opérateur linéaire de Y dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, tel que $C_{p,q}(u) \geq \tilde{N}$ et $\|u\| \leq 1$. Puisque Y est de dimension finie, $C_{p,q}(u)$ est fini. Nous poserons $N = C_{p,q}(u) \geq \tilde{N}$. D'après l'interprétation b) de $C_{p,q}(u)$, on peut trouver une fonction $\varphi \in L^r(\Omega,\mu)$ telle que :

$$\int |\varphi|^r d\mu = 1,\ \text{et}\ \forall\, y \in Y,\ \int \left|\frac{u(y)}{\varphi}\right|^q d\mu \leq N^q\|y\|^q.$$

Considérons la probabilité $\nu = |\varphi|^r.\mu$. Définissons un nouvel opérateur u_1 de Y dans $L^p(\Omega,\nu)$ par :

$$u_1(y) = |\varphi|^{-r/p} u(y)$$

On vérifie facilement (en utilisant le fait que pour tout $y \in Y$, $\{|u(y)| > 0\} \subset \{|\varphi| > 0\}$) que :

(5) $$\|u_1\| = \|u\| \leq 1 \ ; \quad C_{p,q}(u_1) = C_{p,q}(u) = N.$$

De plus, on a maintenant :

(6) $$\forall\, y \in Y, \quad \int |u_1(y)|^q d\nu = \int \left|\frac{u(y)}{\varphi}\right|^q d\mu \leq N^q \|y\|^q$$

<u>Lemme 1</u> : Soit A une partie mesurable de Ω, telle que $\nu(A) \leq nK^{-p}$. Il existe une partie mesurable B de Ω et un vecteur y de norme 1 dans Y tels que :

$$B \cap A = \emptyset \ ; \quad \nu(B) \leq K^{-p} \ ; \quad \int_B |u_1(y)|^q d\nu \geq \delta^q N^q$$

<u>Démonstration</u> : Considérons la fonction :

$$\psi = \left(\frac{\sigma K^p}{n}\right)^{1/r} \chi_A + c^{1/r} \chi_{A^c} \ ; \quad c = \frac{1 - \frac{\sigma K^p}{n} \nu(A)}{1 - \nu(A)} \geq 1 - \sigma$$

[où A^c désigne le complémentaire de A].

On vérifie que $\int |\psi|^r d\nu = 1$. Il doit donc exister un vecteur y de norme 1 dans Y tel que, en posant $f = u_1(y)$, on ait :

(7) $$\int \left|\frac{f}{\psi}\right|^q d\nu \geq N^q$$

(Si un tel y n'existait pas, on verrait en utilisant la compacité de la sphère unité de Y que $C_{p,q}(u_1) < N$, ce qui contredirait (5).)

On a d'autre part d'après (5) et (6) :

$$\int |f|^p d\nu \leq 1 \ ; \quad \int |f|^q d\nu \leq N^q$$

Posons $B = A^c \cap \{|f| \geq K\}$. On aura :

$$\nu(B) \leq \nu\{|f| \geq K\} \leq K^{-p}$$

D'autre part :

$$\int_{|f|\leq K} |f|^q d\nu \leq K^{q-p} \int |f|^p d\nu \leq K^{q-p}$$

$$\int_A \left|\frac{f}{\psi}\right|^q d\nu = \left(\frac{\sigma K^p}{n}\right)^{-q/r} \int_A |f|^q d\nu \leq \left(\frac{\sigma K^p}{n}\right)^{-q/r} N^q$$

Donc d'après (7) :

$$\int_{A^c} |f|^q d\nu = c^{q/r} \int_{A^c} \left|\frac{f}{\psi}\right|^q d\nu \geq (1-\sigma)^{q/r} N^q \left[1 - \left(\frac{n}{\sigma K^p}\right)^{q/r}\right]$$

d'où finalement, en utilisant (4) :

$$\int_B |f|^q d\nu \geq (1-\sigma)^{q/r} N^q \left[1 - \left(\frac{n}{\sigma K^p}\right)^{q/r}\right] - K^{q-p} \geq \delta^q N^q,$$

ce qui démontre le lemme 1.

<u>Lemme 2</u> : Il existe n sous-ensembles (A_i) de Ω deux à deux disjoints et n vecteurs (y_i) de norme 1 dans Y tels que l'on ait pour chaque i :

$$\int_{A_i} |u_1(y_i)|^q d\nu \geq \delta^q N^q$$

<u>Démonstration</u> : Soit j un entier tel que $0 \leq j < n$. Supposons déterminés $A_1, \dots, A_j$, $y_1, \dots, y_j$, les (A_i) étant deux à deux disjoints et :

$$\|y_i\| = 1 \; ; \; \nu(A_i) \leq K^{-p} \; ; \; \int_{A_i} |u_1(y_i)|^q d\nu \geq \delta^q N^q .$$

Posons $A = A_1 \cup \dots \cup A_j$. On a $\nu(A) \leq n K^{-p}$. D'après le lemme 1, on peut trouver $A_{j+1} = B$, disjoint de A, et un vecteur y_{j+1} de norme 1 tels que :

$$\nu(A_{j+1}) \leq K^{-p} \; ; \; \int_{A_{j+1}} |u_1(y_{j+1})|^q d\nu \geq \delta^q N^q .$$

On démontre donc le lemme 2 par récurrence. (La propriété étant évidente pour j = 0).

Achevons maintenant la démonstration du lemme de Rosenthal, les (y_i) et (A_i) étant ceux du lemme 2. Posons $f_i = u_1(y_i)$. Choisissons pour chaque i une fonction φ_i, nulle hors de A_i, et telle que :

$$\int|\varphi_i|^{q'}d\nu \leq 1; \quad \delta N \leq \int f_i\varphi_i d\nu \leq N .$$

Considérons l'opérateur v de $L^q(\Omega,\nu)$ dans l_n^q défini par :

$$v(g) = \frac{1}{N}(<g,\varphi_i>)$$

On vérifie sans peine que $\|v\| \leq \frac{1}{N}$. D'autre part, on a pour $i \neq j$:

$$|<f_j,\varphi_i>| \leq (\int_{A_i} |f_j|^q d\nu)^{1/q} \leq (1 - \delta^q)^{1/q}.N,$$

d'après (6) et le lemme 2. On en déduit :

$$\|v(f_i) - e_i\| = \frac{1}{N}[\sum_{j\neq i} |<f_i,\varphi_j>|^q + |N - <f_i,\varphi_i>|^q]^{1/q}$$

$$\leq \frac{1}{N}[(n-1)(1 - \delta^q)N^q + (1 - \delta)^q N^q]^{1/q} \leq \alpha \quad \text{d'après (2).}$$

Considérons l'opérateur w de l_n^q dans lui-même défini par $w(e_i) = v(f_i)$. D'après (1), w est inversible et $\|w^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$. Il suffit maintenant de prendre $u' = w^{-1}\circ v \circ u_1$ (où u_1 est considéré comme opérateur de Y dans $L^q(\Omega,\nu)$.). On aura :

$$\|u'\| \leq (1 + \varepsilon) \ ; \ u'(y_i) = w^{-1}(v(f_i)) = e_i \ ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme de Rosenthal.

<u>Remarque 1</u> : Si on suppose $q < 1$, on ne peut pas faire la démonstration précédente. Néanmoins les lemmes 1 et 2 subsistent. On obtient alors facilement dans ce cas : il existe n vecteurs $(y_1,\dots,y_n)$ de norme 1 dans Y, et un opérateur u' de $[y_1,\dots,y_n]$ (sous-espace engendré par les (y_i)) dans l_n^q, tel que $u'(y_i) = e_i$, et $\|u'\| \leq 1+\varepsilon$. Cela équivaut à dire que l'on a pour toute suite (c_i) de réels :

$$\|\Sigma\, c_i\, y_i\| \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\,(\Sigma|c_i|^q)^{1/q} .$$

Or cette relation est impossible si Y est normé, $q < 1$ et n trop grand. Cela donne un résultat analogue à Nikishin, mais pour $p > 0$: si Y est un espace de Banach, et $0 < p < q < 1$, tout opérateur linéaire continu de Y dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$ et la multiplication par une fonction de $L^r(\Omega,\mu)$.

Si E est un espace de Banach, nous désignerons par I_E l'ensemble des réels $q > 0$ tels que l'on ait pour tout espace quasi-normé F :

$$\pi_q(E,F) = \pi_p(E,F), \quad \text{pour tout } p \text{ tel que } -1 < p \leq q.$$

(D'après la "conjecture de Pietsch", exposé V, il suffit qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que l'on ait pour tout F quasi-normé $\pi_q(E,F) = \pi_p(E,F)$.)

Nous allons voir que le lemme de Rosenthal permet de donner une bonne caractérisation de I_E. D'apres la "conjecture de Pietsch", on a toujours $]0,1[\subset I_E$. On ne s'intéresse donc qu'à $I_E \cap [1,+\infty[$.

<u>Théorème</u> : Soient E un espace de Banach et q un nombre réel tel que $1 \leq q < 2$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $q \notin I_E$

b) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n, il existe deux opérateurs linéaires u et v, respectivement de $l_n^{q'}$ dans E et de E dans l_n^∞, tels que :

$\|u\| \leq 1+\varepsilon$; $\|v\| \leq 1$; $v \circ u$ est l'injection canonique de $l_n^{q'}$ dans l_n^∞.

<u>Démonstration</u> : Montrons que a) $\Rightarrow$ b). Soient $\varepsilon > 0$ et n donnés, et soit $p \in]0,1[$. Soit $\overline{N}$ correspondant aux conditions (1) (2) (3) (4), pour les données ε, n, p, q. Si $q \notin I_E$, il existe un espace quasi-normé F et un opérateur linéaire de E dans F tel que :

$$\pi_q(v) \leq 1 \ ; \quad \pi_p(v) = +\infty.$$

D'après la définition des opérateurs p-sommants, on peut trouver un sous-espace de dimension finie X de E tel que l'on ait en désignant par v_1 la restriction de v à X :

$$\pi_q(v_1) \leq 1 \; ; \quad \pi_p(v_1) \geq \bar{N}$$

Soit Y le dual de X. D'après le théorème de l'exposé XVII, il existe un opérateur linéaire u de Y dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ tel que $C_{p,q}(u) \geq \bar{N}\,\|u\|$. D'après le lemme de Rosenthal, il existe un opérateur u' de Y dans l_n^q, et n vecteurs $(y_1,\ldots,y_n)$ de norme 1 dans Y, tels que :

$$\|u'\| \geq 1+\varepsilon \; ; \quad u'(y_i) = e_i$$

Soit u le transposé de u', $u \in L(l_n^{q'}, X)$. Pour chaque i, y_i est uneforme linéaire sur X. D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger y_i en une forme linéaire $\tilde{y}_i$ sur E, telle que $\|\tilde{y}_i\| = \|y_i\| = 1$. Définissons un opérateur v de E dans l_n^∞ par :

$$v(x) = (\langle x,\tilde{y}_i\rangle). \quad \text{On a } \|v\| \leq 1.$$

D'autre part :

$$v(u(e_j)) = (\langle u(e_j),\tilde{y}_i\rangle) = (\langle u(e_j),y_i\rangle) = (\langle e_j,u'(y_i)\rangle) = (\langle e_j,e_i\rangle),$$

ce qui démontre que $v \circ u$ est l'injection de $l_n^{q'}$ dans l_n^∞.

Montrons maintenant que b) ⇒ a), en raisonnant par l'absurde. Supposons b) réalisée, et $q \in I_E$. Soit $p \in \,]0,1[$. On a alors $\pi_q(E,F) = \pi_p(E,F)$ pour tout espace quasi-normé F, et par un argument standard, on en déduit l'existence d'une constante C telle que l'on ait pour tout F et tout $v \in \pi_q(E,F)$:

$$\pi_p(v) \leq C\,\pi_q(v).$$

Soit n un entier. Considérons un opérateur diagonal α de l_n^∞ dans l_n^q. On a facilement :

$$\pi_q(\alpha) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\right)^{1/q}$$

Puisque b) est supposée réalisée, il existe deux opérateurs u et v de $l_n^{q'}$ dans E et de E dans l_n^{∞} respectivement, tels que $\|u\| \leq 2$, $\|v\| \leq 1$, et que $v \circ u$ soit l'injection de $l_n^{q'}$ dans l_n^{∞} .

Désignons par $\tilde{\alpha}$ l'opérateur diagonal α, considéré comme opérateur de $l_n^{q'}$ dans l_n^q, c'est à dire :

$$\tilde{\alpha} = \alpha \circ v \circ u.$$

On a puisque $q \in I_E$:

$$\pi_p(\alpha \circ v) \leq C\pi_q(\alpha \circ v) \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\right)^{1/q}$$

Donc :

$$\pi_p(\tilde{\alpha}) \leq 2\pi_p(\alpha \circ v) \leq 2C\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\right)^{1/q} \quad .$$

Maintenant, n est quelconque, et on déduit de l'inégalité ci-dessus, quand n tend vers l'infini, le résultat suivant : si $\tilde{\alpha}$ est un opérateur diagonal de $l^{q'}$ dans l^q :

$$\pi_p(\tilde{\alpha}) \leq 2C\left(\sum |\alpha_i|^q\right)^{1/q}$$

Or ce résultat est faux pour $q < 2$. D'après [2], exposé 26, la condition nécessaire et suffisante pour que $\tilde{\alpha}$ soit p-sommant de $l^{q'}$ dans l^q, $p \in]0,1[$, est que :

$$\sum |\alpha_i|^q \left(1 + \log \frac{1}{|\alpha_i|}\right) < +\infty \quad ,$$

ce qui achève la démonstration .

<u>Remarque 2</u> : Lorsque $q = 2$, l'implication a) $\Rightarrow$ b) reste valable. Mais dans ce cas, la propriété b) est réalisée pour tout espace de Banach de dimension infinie : c'est le lemme classique de Dvoretsky-Rogers. L'implication b) $\Rightarrow$ a) est donc fausse pour $q = 2$.

<u>Remarque 3</u> : Comme me l'a signalé J. T. Lapresté, les conditions a) et b) du théorème sont encore équivalentes (lorsque $1 \leq q < 2$) à la condition suivante :

c) Il existe un espace de Banach F, un opérateur $v \in \pi_q(E,F)$ et une probabilité cylindrique λ q-stable sur E telle que $v(\lambda)$ <u>ne</u> soit <u>pas</u> de Radon sur $\sigma(F'',F')$.

[Rappelons qu'une probabilité cylindrique λ est dite q-stable si elle est de type zéro et si pour tout $\xi \in E'$, $\xi(\lambda)$ est une homothétique de γ_q, cf. exposé V].

On a trivialement c) $\Rightarrow$ a), car si λ est q-stable, elle est de type p pour $p < q$. Montrons que b) $\Rightarrow$ c) par l'absurde, en supposant b) et non c) réalisées. Soit (f_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi γ_q. L'hypothèse non c) implique, en utilisant les résultats de l'exposé VI :

d) Si (x_n) est une suite scalairement l^q sur E, et $v \in \pi_q(E,F)$, on a pour tout $p < q$:

$$\int \|\Sigma\, v(x_n)\, f_n(t)\|^p \, dP(t) < \infty$$

Par un argument de graphe fermé, on montre qu'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite (x_n) dans E et tout $v \in \pi_q(E,F)$:

$$\text{(d')} \qquad \left(\int \|\Sigma\, v(x_n)\, f_n(t)\|^p dP(t)\right)^{1/p} \leq C\, \pi_q(v) \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left(\Sigma\, |\langle x_n, \xi\rangle|^q\right)^{1/q}$$

Considérons maintenant un opérateur diagonal α de l_n^∞ dans l_n^q, et les opérateurs u et v vérifiant b). La suite $(f_1,\dots,f_n)$ définit une probabilité cylindrique λ_q sur $l_n^{q'}$ (cf. exposé V). L'image $u(\lambda_q)$ sur E est la loi de la variable vectorielle $\Sigma\, u(e_i) f_i$, donc d'après (d') :

$$\|\tilde{\alpha}(\lambda_q)\|_p = \|\alpha\circ v(u(\lambda_q))\|_p = (\int \| \Sigma\, \alpha\circ v(u(e_i))f_i(t)\|^p \, dP(t)\,)^{1/p}$$

$$\leq C\pi_q(v\circ\alpha) \sup_{\|\xi\|\leq 1} (\Sigma |<u(e_i),\xi>|^q)^{1/q}$$

$$\leq 2\,C\,(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q)^{1/q}$$

On en déduit par le théorème de dualité (exposé IV) :

$$\pi_p({}^t\tilde{\alpha}) \leq \|\tilde{\alpha}(\lambda_q)\|_p \,.\, {}^*\|\lambda_q\|_p \leq 2C\, \|\gamma_q\|_p^{-1} (\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q)^{1/q}$$

Mais ${}^t\tilde{\alpha}$ est identique à $\tilde{\alpha}$: on a donc trouvé une majoration de $\pi_p(\tilde{\alpha})$, qui conduit à une contradiction comme dans la démonstration de b) $\Rightarrow$ a).

On pourrait encore voir les choses de la façon suivante : soient E et F deux espaces de Banach, v un opérateur linéaire continu de E dans F, et q un réel tel que $0 < q \leq 2$. On dira que u est γ_q-sommant s'il existe $p < q$ et une constante C tels que l'on ait pour toute suite (x_n) de vecteurs de E, et pour toute suite (f_n) de variables aléatoires indépendantes suivant la loi γ_q :

$$(\int \|\Sigma\, v(x_n)\, f_n(t)\|^p \, dP(t))^{1/p} \leq C \sup_{\|\xi\|\leq 1} (\Sigma |<x_n,\xi>|^q)^{1/q}$$

(D'après l'exposé VI, on peut, quitte à modifier C, remplacer p par n'importe quel $p_1 \in \,]0,q[$.)

Désignons par $\pi_{\gamma_q}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs γ_q-sommants de E dans F. Lorsque $q < 2$, tout espace F est de cotype q (exposé VII, proposition 2), ce qui implique immédiatement :

$$\pi_{\gamma_q}(E,F) \subset \pi_q(E,F)$$

Finalement, si E est un espace de Banach et si $q \in [1,2[$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $q \in I_E$

2) Pour tout espace de Banach F,

$$\pi_{\gamma_q}(E,F) = \pi_q(E,F)$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. P. Rosenthal : On subspaces of L^p, Annals of Math. Vol. 97, N°2, p.344-373 (Mars 1973).

[2] Séminaire L. Schwartz 1969-1970.