SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Sur les sous-espaces de L^p, d'après H. P. Rosenthal

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 23, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A22_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1972-1973

SUR LES SOUS-ESPACES DE L^p, D'APRES H. P. ROSENTHAL

par B. MAUREY

Exposé N° XXIII

16 Mai 1973

Nous avons vu dans l'exposé XXII que $2 \in I_{L^1}$. Nous allons reprendre ce résultat pour une classe un peu plus large d'espaces, introduite par Lindenstrauss et Pelczynski [2] :

On dit qu'un espace de Banach E est un espace $\mathcal{L}^p_\lambda$, $1 \leq p \leq \infty$ $1 \leq \lambda < \infty$, si pour tout sous-espace X de dimension finie de E, il existe un entier n, et un sous-espace Y de E de dimension n, contenant X, et tel que $d(Y, l^p_n) \leq \lambda$.

<u>Théorème 1</u> : Pour tout nombre réel p tel que $-1 < p \leq 2$, il existe une constante C_p telle que la propriété suivante soit réalisée :

Pour tout opérateur linéaire continu v d'un espace $\mathcal{L}^1_\lambda$ dans un espace quasi-normé F, on a :

$$\pi_p(v) \leq \lambda\, C_p\, \pi_2(v)$$

<u>Démonstration</u> : Nous avons vu dans l'exposé XXII que $2 \in I_{l^1}$. Soit p tel que $-1 < p \leq 2$. Par un argument standard, il existe une constante C_p telle que l'on ait pour tout F et pour tout $v \in \pi_2(l^1, F)$:

$$\pi_p(v) \leq C_p\, \pi_2(v)$$

Soit maintenant v un opérateur linéaire 2-sommant d'un espace $\mathcal{L}^1_\lambda$ E dans un espace quasi-normé F. Soient $(x_1, \ldots, x_m)$ des éléments de E, X le sous-espace de dimension finie de E engendré par ces vecteurs, n un entier et Y un sous-espace de E, de dimension n, contenant X, et tel que $d(Y, l^1_n) \leq \lambda$. Soit j un isomorphisme de l^1_n sur Y, tel que $\|j\|\,\|j^{-1}\| \leq \lambda$, et désignons par v_1 la restriction de v à Y. Considérons la factorisation suivante pour v_1 :

$$Y \xrightarrow{j^{-1}} l^1_n \xrightarrow{i} l^1 \xrightarrow{\pi} l^1_n \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{v_1} F ,$$

où i et π sont les injections et projections canoniques. On aura

$$\begin{aligned}\pi_p(v_1) &\leq \|j^{-1}\|\, \pi_p(v_1 \circ j \circ \pi) \leq C_p\, \|j^{-1}\|\, \pi_2(v_1 \circ j \circ \pi) \\ &\leq C_p \|j^{-1}\|\, \|j\|\, \pi_2(v_1) \leq \lambda C_p \pi_2(v)\end{aligned}$$

On peut donc écrire pour les éléments (x_i), contenus dans Y :

$$(\Sigma\|v(x_i)\|^p)^{1/p} \leq \lambda C_p\, \pi_2(v) \sup_{\|\xi\|\leq 1} (\Sigma|<x_i,\xi>|^p)^{1/p},$$

Soit $\pi_p(v) \leq \lambda\, C_p\, \pi_2(v)$, ce qui achève la démonstration.

__Corollaire__ : Tout opérateur linéaire continu d'un espace $\mathcal{L}^\infty_\lambda$ dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$, $0 \leq p \leq 2$, se factorise par $L^2(\Omega,\mu)$ et la multiplication par une fonction de L^r, $1/p = 1/2 + 1/r$.

(Notons qu'un espace $C(K)$ est un espace $\mathcal{L}^\infty_\lambda$ pour tout $\lambda > 1$).

__Démonstration__ : Soit E un espace $\mathcal{L}^\infty_\lambda$. D'après [3], théorème III, son dual est un espace $\mathcal{L}^1_{\lambda'}$, pour un certain λ'. Il suffit donc d'appliquer le théorème précédent, et la remarque 2 et le théorème de l'exposé XVII.

Nous en venons maintenant à la deuxième forme du théorème de Grothendieck :

__Théorème 2__ : (cf.[1] ou [2])

Pour tout nombre réel p tel que $-1 < p \leq \infty$, il existe une constante K_p telle que la propriété suivante soit réalisée : pour tout opérateur linéaire continu v d'un espace $\mathcal{L}^1_\lambda$ dans un espace de Hilbert H, on a :

$$\pi_p(v) \leq \lambda K_p\|v\|$$

En raisonnant comme dans le théorème 1, il est clair qu'il suffit de montrer que l'on a pour tout opérateur $v \in \mathcal{L}(l^1,H)$: $\pi_p(v) \leq K_p\|v\|$. Ce résultat découlera immédiatement du théorème 1 et du lemme suivant :

__Lemme__ : Soit γ_2 la probabilité de Gauss normale sur $\mathbb{R}$. Pour tout opérateur linéaire v de l^1 dans un espace de Hilbert, on a :

$$\pi_2(v) \leq \|\gamma_2\|_2(\|\gamma_2\|_1)^{-1}.\|v\|$$

<u>Démonstration</u> : Considérons l'espace de Hilbert H'. D'après l'exposé V, remarque 2, il existe un espace de probabilité (Ω,μ) et un opérateur linéaire continu u de H' dans $L^o(\Omega,\mu)$ tel que :

a) u est un plongement isométrique de H' dans $L^1(\Omega,\mu)$

b) u est continu de H' dans $L^2(\Omega,\mu)$ avec une norme $A_2 = \|\gamma_2\|_2(\|\gamma_2\|_1)^{-1}$.

Par transposition, on voit que ${}^t u$ identifie H à un quotient de $L^\infty(\Omega,\mu)$ et ${}^t u$ admet la factorisation :

$$L^\infty(\Omega,\mu) \xrightarrow{w_1} L^2(\Omega,\mu) \xrightarrow{w_2} H ,$$

où $\|w_2\| \leq A_2$, et w_1 est l'injection canonique. Soit maintenant v un opérateur linéaire continu de l^1 dans H, ce qui équivaut à la donnée d'une suite (x_n) d'éléments de H, telle que $\|x_n\| \leq \|v\|$ (les x_n sont les images des vecteurs de base de l^1). Puisque H s'identifie à un quotient de $L^\infty(\Omega,\mu)$, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n un vecteur $\tilde{x}_n$ de $L^\infty(\Omega,\mu)$, tel que ${}^t u(\tilde{x}_n) = x_n$, et $\|\tilde{x}_n\| \leq (1+\varepsilon)\|x_n\|$. Cette suite $\tilde{x}_n$ permet de définir un opérateur $\tilde{v}$ de l^1 dans $L^\infty(\Omega,\mu)$, tel que $v = {}^t u \circ \tilde{v}$, et $\|\tilde{v}\| \leq (1+\varepsilon)\|v\|$. On a alors :

$$\begin{aligned}\pi_2(v) &\leq \|\tilde{v}\|\pi_2({}^t u) \leq (1+\varepsilon)A_2 \|v\|\pi_2(w_1)\\ &\leq (1+\varepsilon)A_2 \|v\|,\end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui démontre le lemme.

Nous allons maintenant nous intéresser aux plongements d'espaces de Banach dans des espaces L^p, $0 \leq p \leq 2$. Nous introduisons quelques notations : si E est un espace de Banach, nous désignerons par K_E l'ensemble des réels $q \in]0,2]$ tels que E soit de type q.

Nous désignerons par J_E l'ensemble des réels $p \in]0,2]$ tels qu'il existe un espace de probabilité (Ω,μ) et un plongement u de E dans $L^p(\Omega,\mu)$ (c'est à dire que u est un isomorphisme entre E et u(E)), avec la propriété supplémentaire que sur u(E), les topologies induites par $L^p(\Omega,\mu)$ et $L^o(\Omega,\mu)$ coincident.

<u>Théorème 3</u> : Soit E un espace de Banach de dimension infinie plongeable dans un espace $L^o(\Omega,\mu)$. On a :

$$J_E = K_E \subset I_E,$$

Si E vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, ou si E est plongeable dans un espace $L^1(\Omega,\mu)$, on a en fait :

$$J_E = K_E = I_{E'}$$

<u>Démonstration</u> : Soit u un plongement de E dans un espace $L^o(\Omega,\mu)$. Supposons que $q \in K_E$, c'est-à-dire E de type q. D'après l'exposé XII, propositions 6 et 7, l'opérateur u admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{u_1} L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L^o(\Omega,\mu)$$

Il est clair que u_1 est un plongement de E dans $L^q(\Omega,\mu)$. D'autre part, les topologies induites sur $u_1(E)$ par $L^q(\Omega,\mu)$ et $L^o(\Omega,\mu)$ coincident. En effet, soit (x_n) une suite d'éléments de E telle que $(u_1(x_n))$ tende vers zéro en probabilité. Alors $u(x_n) = g.u_1(x_n)$ tend aussi vers zéro en probabilité, donc (x_n) tend vers zéro dans E puisque u est un plongement, donc $u_1(x_n)$ tend vers zéro dans $L^q(\Omega,\mu)$. On a donc vu que : $K_E \subset J_E$.

Supposons maintenant que $p \in J_E$. Il existe un espace de probabilité (Ω,μ), et un plongement u de E dans $L^p(\Omega,\mu)$, tel que sur u(E) les topologies de $L^p(\Omega,\mu)$ et $L^o(\Omega,\mu)$ coincident, donc aussi les topologies de $L^p(\Omega,\mu)$ et $L^{p-\varepsilon}(\Omega,\mu)$. On en déduit que u(E) est de type p d'après l'exposé X-XI, proposition 2, donc E est également de type p, puisqu'isomorphe à u(E).

On a donc : $K_E = J_E$.

Supposons à nouveau que $q \in K_E$, et soit p tel que $0 < p \leq q$. D'après l'exposé XV, théorème 2, tout opérateur linéaire continu de E dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$ et la multiplication par une fonction de $L^r(\Omega,\mu)$, $1/p = 1/q + 1/r$. On en déduit que $q \in I_{E'}$ d'après le théorème de l'exposé XVII (avec interversion des rôles de E et E' : voir la remarque 1 de cet exposé).

On a donc dans tous les cas :

$$K_E = J_E \subset I_{E'}.$$

Soit maintenant $p \in I_{E'}$, (donc $p \leq 2$ puisque E est de dimension infinie d'après la remarque 1, exposé XXII), et supposons que E vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, ou que E soit plongeable dans un espace $L^1(\Omega,\mu)$. Soit u un plongement de E dans $L^o(\Omega,\mu)$ ou dans $L^1(\Omega,\mu)$ suivant le cas.

Si $p < 2$, on peut trouver $q > p$ tel que $q \in I_{E'}$ d'après le corollaire 3, exposé XXII. Si $p = 2$, nous prendrons $q = 2$. D'après le théorème de l'exposé XVII, l'opérateur u se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$, $u = T_g \circ u_1$, et d'après un raisonnement que nous avons déjà fait, l'opérateur u_1 est un plongement de E dans $L^q(\Omega,\mu)$, donc E est de type p d'après les résultats de l'exposé X-XI, et ceci achève la démonstration.

Nous allons maintenant démontrer le théorème principal de l'article [4] de H. P. Rosenthal.

<u>Théorème 4</u> : Soient (Ω,μ) un espace mesuré (quelconque) et E un sous-espace de $L^p(\Omega,\mu)$, $1 \leq p < 2$. Une (et une seule) des conditions suivantes est réalisée :

a) Il existe un nombre $q > p$ tel que E se plonge dans $L^q(\Omega,\mu)$.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace Y de E, $(1+\varepsilon)$-isomorphe à l^p, et une projection P de norme $\leq 1+\varepsilon$ de $L^p(\Omega,\mu)$ sur Y.

<u>Démonstration</u> : Si E est de type p, on a $p \in I_{E'}$ d'après le théorème 3, et il existe un $q > p$ tel que $q \in I_{E'}$ d'après le corollaire 3, exposé XXII. D'après le théorème de l'exposé XVII, l'opérateur d'injection de E dans $L^p(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$, donc E se plonge dans $L^q(\Omega,\mu)$.

Supposons que E ne soit pas de type p, et que μ soit une probabilité. La condition b) est alors vérifiée d'après la proposition 4 de l'exposé XVIII. Lorsque μ est σ-finie, on se ramène immédiatement au cas précédent, car $L^p(\Omega,\mu)$ est alors isométrique à $L^p(\Omega,\nu)$, pour une certaine probabilité ν.

Supposons μ quelconque, et supposons que E ne soit pas de type p. Il existe pour tout entier n une suite $(y_i^n)_i$ de vecteurs de E (dont un nombre fini seulement sont non nuls) telle que :

$$(R_n) \qquad \left(\int \left\| \sum_i y_i^n f_i(t) \right\|^r dP(t)\right)^{1/r} \geq n\left(\sum \|y_i^n\|^p\right)^{1/p}$$

où $r \in]0,1[$ est fixé, et où (f_i) est une suite de variables aléatoires indépendantes p-stables équidistribuées. Pour chacune des fonctions y_i^n, l'ensemble $A_i^n = \{ |y_i^n| > 0\}$ est σ-fini, c'est-à-dire réunion dénombrable d'ensembles intégrables. Posons $A = \bigcup_{i,n} A_i^n$, et désignons par F le sous-espace de E formé des fonctions g telles que $\{|g| > 0\} \subset A$. Le sous-espace F n'est pas de type p d'après les relations (R_n), et la mesure $\chi_A\mu$ est σ-finie. D'après la première partie, il existe un sous-espace Y de F, (donc de E), $(1+\varepsilon)$-isomorphe à l^p, et une projection P_1 de norme $\leq (1+\varepsilon)$ de $L^p(\Omega,\chi_A\mu)$ sur Y. Mais il existe aussi une projection évidente P_2 de norme ≤ 1 de $L^p(\Omega,\mu)$ sur $L^p(\Omega,\chi_A\mu)$, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u> : L'énoncé du théorème 4 reste valable pour un sous-espace de $L^p(\Omega,\mu)$, $0 < p < 1$, à condition de supprimer dans b) l'existence d'une projection P de $L^p(\Omega,\mu)$ sur Y.

<u>Corollaire</u> : Soit (Ω,μ) un espace mesuré. Si E est un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega,\mu)$, il existe un nombre $q > 1$ tel que E se plonge dans $L^q(\Omega,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : L'espace E, étant réflexif, ne peut pas contenir un sous-espace isomorphe à l^1.

Citons également le résultat suivant :

<u>Proposition</u> : Soient (Ω,μ) un espace de probabilité, et E un espace de Banach plongeable dans $L^0(\Omega,\mu)$, vérifiant l'hypothèse d'approximation métrique, et tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{X\subset E'} d(X,l_n^\infty) = +\infty$$

Il existe alors un nombre $q > 1$ tel que E se plonge dans $L^q(\Omega,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : La condition de la proposition implique que $1 \in I_{E'}$, d'après le corollaire 1 de l'exposé XXII. Il existe donc un nombre $q > 1$ tel que $q \in I_{E'}$ d'après le corollaire 3 de l'exposé XXII. Puisque E vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, le plongement de E dans $L^0(\Omega,\mu)$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$ d'après l'exposé XVII, d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Grothendieck : Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956) p.1-79.

[2] J. Lindenstrauss et A. Pelczynski : Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968) p.275-326.

[3] J. Lindenstrauss et H. P. Rosenthal : The $\mathcal{L}_p$-spaces, Israël Journal of Math. Vol. 7 N°4 (1969) p.325-349.

[4] H. P. Rosenthal : On subspaces of L^p, Annals of Math. Vol. 97 N°2 p.344-373 (Mars 1973).