Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Beauzamy

Le théorème de Dvoretzky

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 26, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A25_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

LE THEOREME DE DVORETZKY

par B. BEAUZAMY

Exposé N° XXVI

6 Juin 1973

Le théorème de Dvoretzky a été utilisé à plusieurs reprises au cours des précédents exposés de ce séminaire ; il permet en effet de ramener certains problèmes concernant des espaces de Banach quelconques à des questions analogues, qui portent sur l'espace l_n^2 , et que l'on sait résoudre. L'énoncé qui en avait été donné était le suivant : tout espace de Banach contient un espace l_n^2 , de dimension arbitrairement grande, presque isomorphiquement.

Les pages qui suivent sont consacrées à la démonstration de ce résultat, dont nous commencerons par donner une formulation précise. Nous suivrons dans cette exposition l'article de V. D. Milman [5], qui donne une démonstration notablement plus courte et plus simple que celle que A. Dvoretzky avait initialement créée. Nous aurons besoin de quelques lemmes, qui ont tous un intérêt propre. Le principal est le lemme de Dvoretzky-Rogers ; la démonstration que nous en donnons suit celle des auteurs (voir [2]).

Il est nécessaire tout d'abord de préciser quelques notations et de faire quelques rappels.

NOTATIONS ET RAPPELS

Les espaces vectoriels considérés seront sur le corps des réels. Dans [5], Milman assure que les méthodes qui suivent s'étendent au cas des espaces vectoriels complexes ; nous ne le vérifions pas ici, afin de ne par alourdir davantage la rédaction.

Un espace euclidien de dimension n est un espace isométrique à l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne : si $x \in \mathbb{R}^n$ a pour coordonnées $x_1, \dots, x_n$, on a $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. On notera E, F, G de tels espaces, précisant au besoin la dimension par un indice : E_n, F_n, G_n.

Un espace de Banach, muni de sa norme propre, sera noté $\mathcal{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathcal{G}$. Les indices auront la même signification que précédemment. La distance $d(\mathcal{E}_n, \mathfrak{F}_n)$ de deux espaces de Banach $\mathcal{E}$ et $\mathfrak{F}$ de même dimension n est définie par :

$$d(\mathcal{E}_n, \mathfrak{F}_n) = \inf \|T\| \; \|T^{-1}\|$$

où T est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathfrak{F}$, T^{-1} l'isomorphisme réciproque, et l'infimum est pris sur tous les isomorphismes entre $\mathcal{E}$ et $\mathfrak{F}$.

On a toujours $d(\mathcal{E},\mathfrak{F}) \geq 1$. Si $d(\mathcal{E},\mathfrak{F}) = 1$, les espaces $\mathcal{E}$ et $\mathfrak{F}$ sont isométriques. Si $d(\mathcal{E},\mathfrak{F}) \leq 1+\varepsilon$, on dira que $\mathcal{E}$ et $\mathfrak{F}$ sont ε-isométriques. On peut aussi considérer la quantité $\delta(\mathcal{E},\mathfrak{F}) = \log(d(\mathcal{E},\mathfrak{F}))$, qui possède réellement les propriétés d'une distance, mais nous n'aurons pas l'occasion de l'utiliser ici.

La boule unité d'un espace de Banach de dimension finie est un ensemble convexe, symétrique, compact, d'intérieur non vide. Un tel ensemble sera appelé corps convexe (Dvoretzky [2]).

On notera S_n la sphere unité d'un espace euclidien de dimension n. μ_n désignera la mesure de Lebesgue $n-1$ dimensionnelle sur S_n, et $\widetilde{\mu}_n$ sera la même après normalisation : $\widetilde{\mu}_n(S_n) = 1$.

$\mathcal{C}(S_n)$ sera l'ensemble des fonctions continues sur la sphère, à valeurs réelles.

Un ε-voisinage d'une courbe C sur la sphère S_n sera l'ensemble des points dont la distance géodésique à cette courbe est inférieure ou égale à ε (la distance géodésique, ou distance mesurée sur la sphère, sera notée ρ).

Nous pouvons alors donner l'énoncé du théorème de Dvoretzky :

<u>Théorème</u> : Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier k, il existe un nombre $N(k,\varepsilon)$ tel que pour tout $N \geq N(k,\varepsilon)$, tout espace de Banach de dimension N contient un sous espace de dimension k, ε-isométrique à l'espace euclidien de même dimension k.

Le nombre $N(k,\varepsilon)$ peut être borné supérieurement par la quantité

$$e^{c_1 \frac{(\log 1/\varepsilon) k}{\varepsilon^2}} ,$$

où c_1 est une constante absolue, et cette estimation est exacte au sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c_2 > 0$, telle que, pour tout $k > 1$ et pour tout $N \leq e^{c_2 k}$, on puisse trouver un espace de Banach de dimension N qui ne contient pas de sous-espace de dimension k isomorphe à un espace euclidien.

La démonstration va se faire en plusieurs étapes. La première ne concerne que les espaces euclidiens :

Lemme 1 (Milman) : Soit $n \geq 3$, et f une fonction continue sur S_n. Il existe une valeur a telle que, pour tous ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ un $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$- voisinage de la courbe de niveau $\mathfrak{A} = \{f(x) = a\}$ contienne l'intersection de la sphère S_n avec un sous-espace de dimension k, où k est donné par la formule (où les crochets désignent la partie entière) :

$$k = \left[\frac{1/2\ \varepsilon_1^2\, n - \log \frac{1}{\varepsilon_2} - \log 2}{\log \frac{1}{\sin \varepsilon_{2/2}}} \right] + 2$$

Démonstration du lemme 1 : Commençons par définir la moyenne de Lévy d'une fonction f continue sur S_n : c'est la constante C (notée C_f), telle que

$$\mu_n\{x, f(x) < C\} \leq 1/2 \quad \text{et}$$
$$\mu_n\{x, f(x) > C\} \leq 1/2 \ .$$

Soit $\mathfrak{A}(f) = \{x \in S_n,\ f(x) = C_f\}$, et soit $\mathfrak{A}_\varepsilon(f)$ un ε-voisinage de $\mathfrak{A}(f)$, c'est-à-dire, comme nous l'avons défini $\mathfrak{A}_\varepsilon(f) = \{x \in S_n,\ \exists y \in \mathfrak{A}(f), \rho(x,y) \leq \varepsilon\}$.

On va utiliser un résultat dû à P. Lévy [4, III, Chap.1] : pour tout $\varepsilon > 0$, la mesure d'un ε-voisinage $\mathfrak{A}_\varepsilon(f)$ de $\mathfrak{A}(f)$ est minimale lorsque $\mathfrak{A}(f)$ est l'intersection de la sphère avec un hyperplan.

On sait que la mesure d'un ε-voisinage de l'intersection de la sphère avec un hyperplan (c'est-à-dire d'un ε-voisinage d'un grand cercle) est donnée par la formule :

$$h(\varepsilon, n) = \frac{\int_0^\varepsilon \cos^{n-2}\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta\, d\theta}$$

et que la mesure d'un ε-voisinage d'un point vaut

$$t(\varepsilon,n) = \frac{\int_0^{\varepsilon} \sin^{n-2}\theta\, d\theta}{2\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta\, d\theta}$$

La démonstration de ces formules peut être trouvée dans l'ouvrage [4] précédemment mentionné.

On va montrer que pour tout k, et pour n assez grand, $\mathfrak{U}_\varepsilon(f)$ contient l'intersection de S_n avec un sous-espace vectoriel F_k de dimension k. On considère l'ensemble des sous-espaces de dimension k de l'espace euclidien E_n ; c'est la grassmannienne $G_{n,k}$. Pour tout $F \in G_{n,k}$, $\tilde{\mu}_k$ est la mesure normalisée sur la sphère unité de F. Si M est un sous-ensemble de S_n, tel que $\tilde{\mu}_n(M) \geq a > 0$, on peut trouver $F \in G_{n,k}$ tel que $\tilde{\mu}_k(F \cap M) \geq a$.

Décomposons $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. S'il n'existait aucune section de S_n par un s.e.v. F_k telle que $S_k = F_k \cap S_n \subset \mathfrak{U}_\varepsilon(f)$, cela signifierait que pour tout $F_k \in G_{n,k}$, il existerait un $x \in F_k \cap S_n$ tel que $\rho(x, \mathfrak{U}_{\varepsilon_1}(f)) > \varepsilon_2$. Donc, sur F_k, l'ensemble $\mathfrak{U}_{\varepsilon_1}(f) \cap F_k$ serait disjoint d'un ε_2-voisinage V_{ε_2} du point x, et on aurait :

$$\tilde{\mu}_k(F_k \cap \mathfrak{U}_{\varepsilon_1}) + \tilde{\mu}_k(V_{\varepsilon_2}) < 1$$

(puisqu'il s'agit d'ensembles fermés).

Or on sait que, pour un certain F_k, on a

$$\tilde{\mu}_k(F_k \cap \mathfrak{U}_{\varepsilon_1}) \geq \tilde{\mu}_n[\mathfrak{U}_{\varepsilon_1}(f)] \geq h(\varepsilon_1; n)$$

et on a noté $t(\varepsilon_2,k)$ la quantité $\tilde{\mu}_k(V_{\varepsilon_2})$. Par conséquent, si l'on montre que

$$h(\varepsilon_1,n) + t(\varepsilon_2,k) \geq 1,$$

on aura obtenu une contradiction, et on pourra trouver un F_k tel que tout point de S_k soit à une distance inférieure a ε_2 de l'ensemble $F_k \cap \mathfrak{U}_{\varepsilon_1}(f)$, et, par conséquent, on aura $S_k \subset \mathfrak{U}_\varepsilon(f)$, si $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

On veut donc montrer que :

$$\frac{\int_o^{\varepsilon_1} \cos^{n-2}\theta\, d\theta}{\int_o^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta\, d\theta} + \frac{\int_o^{\varepsilon_2} \sin^{k-2}\theta\, d\theta}{2\int_o^{\pi/2} \cos^{k-2}\theta\, d\theta} \geq 1$$

d'où

$$\frac{\int_{\varepsilon_1}^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta\, d\theta}{\int_o^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta\, d\theta} \leq \frac{\int_o^{\varepsilon_2} \sin^{k-2}\theta\, d\theta}{2\int_o^{\pi/2} \cos^{k-2}\theta\, d\theta}$$

Notons $I_n = \int_o^{\pi/2} \cos^n \theta\, d\theta$. Pour simplifier les calculs, on va remplacer n - 2 par n et k - 2 par k. L'inégalité précédente devient

$$\frac{1}{I_n} \int_{\varepsilon_1}^{\pi/2} \cos^n \theta\, d\theta \leq \frac{1}{2I_k} \int_o^{\varepsilon_2} \sin^k \theta\, d\theta \quad .$$

On va employer l'estimation

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \geq I_k \sqrt{k} \geq \left(\frac{\pi}{2} \frac{k}{k+1}\right)^{1/2}$$

(voir [4] p.209).

On peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\,I_k} \int_o^{\varepsilon_2} \sin^k\theta\, d\theta &\geq \frac{1}{2I_k} \int_{\varepsilon_2/2}^{\varepsilon_2} \sin^k \theta\, d\theta \\ &\geq \frac{1}{I_k} \frac{\varepsilon_2}{4} \sin^k \frac{\varepsilon_2}{2} \\ &\geq \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2}\, \frac{\varepsilon_2}{4} \sin^k \frac{\varepsilon_2}{2} \quad .\end{aligned}$$

Pour l'autre membre, on pose $\theta = \frac{\tau}{\sqrt{n}}$, et on remarque que

$$\cos^n\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) \leq e^{-\tau^2/2} \quad , \; n \geq 1, \; 0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{n} \; .$$

[Démonstration de cette inégalité : Il faut montrer que $\frac{\tau^2}{2} \leq -n \log \cos \frac{\tau}{\sqrt{n}}$

Soit $\varphi(n) = -n \log \cos \frac{\tau}{\sqrt{n}}$, $0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{n}$. On a

$$\varphi'(n) = -\log \cos \frac{\tau}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \frac{\tau}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{\tau}{\sqrt{n}} ,$$

et $\varphi'(n) \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

D'autre part, $\varphi''(n) = \frac{\tau}{8n^{3/2}} \frac{2\tau/\sqrt{n} - \sin(2\tau/\sqrt{n})}{\cos(2\tau/\sqrt{n})}$ et donc $\varphi''(n) \geq 0$ pour $0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{n}$.

Donc $\varphi'(n) \leq 0$. Or, lorsque $n \to \infty$, un développement limité montre que $\varphi(n) \to -\tau/2$. On en déduit l'inégalité annoncée].

On a

$$\frac{1}{I_n}\int_{\varepsilon_1}^{\pi_2} \cos^n \theta d\theta = \frac{1}{I_n\sqrt{n}}\int_{\varepsilon_1\sqrt{n}}^{\pi_2\sqrt{n}} \cos^n\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) d\tau \leq \sqrt{\frac{n+1}{n}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\varepsilon_1\sqrt{n}}^{\pi_2\sqrt{n}} e^{-\tau^{2/2}} d\tau .$$

Posons $u = \tau - \varepsilon_1\sqrt{n}$. La borne inférieure de l'intégrale devient 0, et la borne supérieure sera majorée par l'infini. On a donc :

$$\frac{1}{I_n\sqrt{n}}\int_{\varepsilon_1}^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta \leq \sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\varepsilon_1^2 n} e^{-\varepsilon_1 u\sqrt{n}} du$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon_1^2 n}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du .$$

$$\leq \sqrt{2}\, e^{-\frac{\varepsilon_1^2 n}{2}} .$$

Pour que l'inégalité de départ soit réalisée, il suffit donc que :

$$\sqrt{2}\, e^{-\frac{\varepsilon_1^2 n}{2}} \leq \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2}\,\frac{\varepsilon_2}{4} \sin^k \frac{\varepsilon_2}{2} .$$

Or, on a $4\sqrt{\pi} < 2$, et donc $\frac{1}{4\sqrt{\pi}} > 1/2$. Il suffit donc de montrer que :

$$2e^{-\frac{\varepsilon_1^2 n}{2}} \leq \sqrt{k}\ \varepsilon_2 \sin^k \frac{\varepsilon_2}{2}$$

C'est-à-dire

$$\log 2 - \frac{\varepsilon_1^2 n}{2} \leq \frac{1}{2} \log k + \log \varepsilon_2 + k \log \sin \frac{\varepsilon_2}{2}$$

$$k \log \sin \varepsilon_{2/2} + \frac{1}{2} \log k \geq - \frac{\varepsilon_1^2 n}{2} - \log \varepsilon_2 + \log 2$$

$$k + \frac{1}{2 \log \sin \frac{\varepsilon_2}{2}} \log k \leq \frac{- \frac{\varepsilon_1^2 n}{2} + \log 2 - \log \varepsilon_2}{\log \sin \varepsilon_{2/2}}$$

et ceci sera vérifié dès que

$$k \leq \frac{1/2\ \varepsilon_1^2 n - \log 1/\varepsilon_2 - \log 2}{\log(1/\sin(\varepsilon_{2/2}))} = K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, n)$$

et ceci termine la démonstration du lemme 1.

Si S_k est la sphère unité du sous-espace dont l'existence est assuré par le lemme précédent, on a vu que tout point de S_k se trouve à une distance au plus égale à ε_2 de $\mathfrak{M}_{\varepsilon_1}(f)$.

Nous allons maintenant considérer un espace de Banach de dimension N. On va montrer que, moyennant une transformation isométrique, on peut obtenir une certaine disposition de la boule unité du Banach $\mathcal{E}$ par rapport à la boule unité d'un espace euclidien de même dimension.

<u>Lemme 2</u> (Dvoretzky-Rogers) : Soit C un corps convexe dans l'espace euclidien E_N de dimension N, avec $N = 4n^2$. Il existe une transformation linéaire T de l'espace E_N, qui laisse l'origine invariante, et qui transforme C en un corps convexe T(C) possédant les propriétés suivantes :
- $T(C) \supset B_N$ (boule unité de l'espace euclidien)
- on peut trouver un sous-espace F_n de E_N, de dimension n, dont les axes peuvent etre choisis de telle façon que $T(C) \cap F \subset 2\,Q_n$, où Q_n désigne le cube unité, centré à l'origine, construit sur les axes de F_n.

Démonstration du lemme 2 : On inscrit dans C un ellipsoïde de centre 0 et de volume maximal (il s'agit du volume N-dimensionnel). On transforme cet ellipsoïde en la boule unité B_N au moyen d'une transformation linéaire T_1 qui laisse 0 invariant. On va montrer que $T_1(C)$ et B_N possèdent N points de contatc $a_1 \ldots a_N$, et que, après une nouvelle transformation T_2 de E_N (qui sera une rotation), ces N points vérifient pour $j = 1,\ldots,N$

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} & a_j = (a_{j1},\ldots,a_{j,j}, 0,\ldots,0) \\ & a_{j1}^2 + \ldots + a_{j,j-1}^2 = 1 - a_{j,j}^2 \leq \frac{j-1}{N} \end{aligned}$$

Nous allons démontrer ce fait par récurrence. Il est clair que l'on peut trouver un point de contact de $T_1(C)$ et B_N ; on choisira le premier axe passant par ce point.

Supposons qu'on ait trouvé r-1 points a_j, $j = 1,\ldots,r$, $r-1 < N$ vérifiant les conditions précédentes. Montrons qu'on peut en trouver r.

Considérons l'ellipsoïde défini par l'équation

$$(1+\varepsilon)^{N-r+1}(x_1^2 + \ldots + x_{r-1}^2) + (1+\varepsilon+\varepsilon^2)^{-r+1}(x_r^2 + \ldots + x_N^2) \leq 1$$

Pour $\varepsilon > 0$, cet ellipsoïde a un volume supérieur à celui de la boule unité B_N. Il ne contient pas la boule B_N, puisque le point $(1, 0\ldots0)$ appartient à la boule, mais non à l'ellipsoïde.

Donc cet ellipsoïde, qui ne peut être strictement inclus dans $T_1(C)$ puisque $T_1(C)$ ne peut contenir un ellipsoïde de volume supérieur à celui de la sphère, rencontre la frontière de $T_1(C)$. Donc il existe dans l'ellipsoïde un point $a(\varepsilon)$ appartenant à la frontière de $T_1(C)$.

Soient $a_1,\ldots,a_N$ les coordonnées de ce point. On a $a_1^2 + \ldots + a_N^2 \geq 1$, et par conséquent

$$(1+\varepsilon)^{N-r+1}(a_1^2 + \ldots + a_{r-1}^2) + (1+\varepsilon+\varepsilon^2)^{-r+1}(a_2^2 + \ldots + a_N^2) \leq a_1^2 + \ldots + a_N^2$$

et :

$$[(1+\varepsilon)^{N-r+1} - 1]\,(a_1^2 + \ldots + a_{r-1}^2) + [(1+\varepsilon+\varepsilon^2)^{-r+1} - 1][a_2^2 + \ldots + a_N^2] \leq 0$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, les points $a(\varepsilon)$ convergent vers un point a_r, qui est nécessairement un point de contact de B_N et de la frontière de $T_1(C)$. A la limite, on obtient, en divisant par ε l'inégalité précédente :

$$(N-r+1)(a_{r,1}^2+\dots+a_{r,r-1}^2)+(-r+1)(a_{r,r}^2+\dots+a_{r,N}^2)\leq 0 .$$

On va faire une rotation des $N-r+1$ derniers axes, afin de rendre nulles les $N-r$ dernières coordonnées de a_r. Les coordonnées des points $a_1,\dots,a_{r-1}$ ne sont pas modifiées. On obtient, pour les coordonnées de a_r :

$$a_{r,1}^2+\dots+a_{r,r}^2=1 ,$$

et l'inégalité précédente s'écrit :

$$(N-r+1)[a_{r,1}^2+\dots+a_{r,r-1}^2]+(1-r)[1-(a_{r,1}^2+\dots+a_{r,r-1}^2)]\leq 0$$

d'où :

$$N[a_{r,1}^2+\dots+a_{r,r-1}^2]+1-r\leq 0$$

et

$$a_{r,1}^2+\dots+a_{r,r-1}^2\leq\frac{r-1}{N}$$

On a donc démontré le résultat cherché. On va l'utiliser pour démontrer la seconde partie du lemme.

On a vu que, par construction, $T(C)=T_2\circ T_1(C)$ contient B_N. Soit F_n l'espace engendré par les n premiers axes (après la transformation T_2). Montrons que $T(C)\cap F_n\subset 2\,Q_n$.

L'hyperplan $x_1=a_{1,1}$, puisque a_1 est point de contact de $T(C)$ et B_N , est un hyperplan d'appui de $T(C)$. Plus généralement, l'hyperplan tangent à la sphère au point a_r est un hyperplan d'appui de $T(C)$; il a pour équation

$$a_{r,1}\,x_1+\dots+a_{r,r}x_r=1.$$

On a supposé C symétrique donc $T(C)$ et $T(C) \cap F_n$, sont contenus dans le parallélépipède $\mathcal{P}$ défini par les équations :

$$|a_{r,1}\, x_1 + \dots + a_{r,r}\, x_r| \leq 1 \,, \qquad r = 1, \,,\, , N$$

Nous allons montrer que $\mathcal{R} = \mathcal{P} \cap F_n \subset 2\, Q_n$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathcal{R}$, si $x = (x_1, \dots, x_n, 0 \dots 0)$, on a :

$$x_i^2 \leq 4_1, \qquad i = 1, \dots, n.$$

On va le montrer par récurrence.

- Pour $i = 1$, on a $|a_{11}\, x_1| \leq 1$, donc

$$|x_1| \leq \frac{1}{|a_{11}|} = 1.$$

- Supposons la propriété montrée pour les $m - 1 < n$ premières composantes, $n = \frac{\sqrt{N}}{2}$. On veut la montrer pour m. On a :

$$|a_{m,m}\, x_m + \sum_{j=1}^{m-1} a_{m,j}\, x_j| \leq 1$$

donc

$$|a_{m,m} x_m| - |\sum_{j=1}^{m-1} a_{m,j} x_j| \leq 1$$

et

$$|a_{m,m} x_m| \leq 1 + \sum_{j=1}^{m-1} |a_{m,j} x_j|$$

d'où

$$|x_m|^2 \leq \frac{(1 + \sum_{j=1}^{m-1} |a_{m,j} x_j|)^2}{|a_{m,m}|^2}$$

$$\leq \frac{[1 + (\sum_{j=1}^{m-1} |a_{m,j}|^2)^{1/2} (\sum_{j=1}^{m-1} |x_j|^2)^{1/2}]^2}{|a_{m,m}|^2}$$

$$\leq \frac{[1 + (\frac{m-1}{N})^{1/2} [4(m-1)]^{1/2}]^2}{1 - \frac{m-1}{N}}$$

(d'après (A) et l'hypothèse de récurrence).

Montrons que cette dernière quantité est inférieure ou égale à 4. C'est-à-dire :

$$\left[1 + \left(\frac{m-1}{N}\right)^{1/2} 2(m-1)^{1/2}\right]^2 \leq 4\left(1 - \frac{m-1}{N}\right)$$

ou

$$\left[1 + \frac{2}{\sqrt{N}}(m-1)\right]^2 \leq 4\left[1 - \frac{m-1}{N}\right]$$

$$\left[\sqrt{N} + 2(m-1)\right]^2 \leq 4N - 4(m-1)$$

ou

$$4(m-1)^2 + 4\sqrt{N}(m-1) + 4(m-1) \leq 3N$$

Or, par hypothèse, $m - 1 < n = \frac{\sqrt{N}}{2}$, donc $m - 1 \leq \frac{\sqrt{N}}{2} - 1$.

Il suffit donc de voir que :

$$4\left(\frac{\sqrt{N}}{2} - 1\right)^2 + 4\sqrt{N}\left(\frac{\sqrt{N}}{2} - 1\right) + 4\left(\frac{\sqrt{N}}{2} - 1\right) \leq 3N$$

c'est-à-dire

$$3N - 6\sqrt{N} \leq 3N ,$$

ce qui est bien vérifié .

Avant d'aborder la démonstration du théorème proprement dit, nous allons maintenant donner quelques conséquences du lemme de Dvoretzky Rogers (voir [3] ou [1]).

<u>Corollaire 1</u> : Soit $\mathcal{E}$ un espace de Banach de dimension infinie. Pour tout entier n, il existe une suite finie $x_1, \dots x_n$ d'éléments de $\mathcal{E}$, de norme 1, telle que, pour toute suite finie $c_1, \dots, c_n$ de nombres réels, on ait :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right\| \leq 2 \left(\Sigma |c_i|^2\right)^{1/2}$$

<u>Démonstration</u> : Soit F le sous-espace de dimension n de $\mathcal{E}$ pour lequel, d'après le lemme, on a les injections :

$$l_n^2 \to F \to l_n^\infty$$

et on sait que la première application est de norme inférieure ou égale à 1 et la seconde de norme inférieure ou égale à 2.

Soit (Y_i) la base canonique (orthonormée) de l_n^2. Si (c_i) est une suite de n nombres réels, on a donc :

$$\| \Sigma\ c_i\ Y_i \|_{\mathcal{E}} \leq \| \Sigma\ c_i\ Y_i \|_{l_n^2} = (\Sigma |c_i|^2)^{1/2}.$$

Or on a $\|Y_i\|_{l_n^2} = \|Y_i\|_{l_n^\infty} = 1$. On a donc :

$$2\|Y_i\|_E \geq \|Y_i\|_{l_n^\infty} = 1$$

et donc

$$\|Y_i\|_E \geq 1/2$$

Il suffit donc de considérer $X_i = \dfrac{Y_i}{\|Y_i\|}$ pour avoir le résultat annoncé.

<u>Corollaire 2</u> : Soit $\mathcal{E}$ un espace de Banach de dimension infinie, et soit (α_i) une suite de l^2, formée de nombres positifs. Il existe une suite (Z_i) d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que $\|Z_i\| = \alpha_i$ et telle que la série des Z_i soit inconditionnellement convergente. (C'est-à-dire la série $\Sigma\ \varepsilon_i Z_i$ converge dans $\mathcal{E}$ pour tout choix des $\varepsilon_i = \pm 1$).

<u>Démonstration</u> : Choisissons une partition de $\mathbb{N}$ en tranches N_k, N_{k+1} telles que l'on ait

$$\Big(\sum_{N_k+1}^{N_{k+1}} |\alpha_n|^2 \Big)^{1/2} \leq 2^{-k}.$$

Lorsque n appartient à la tranche N_k, N_{k+1}, posons $Z_i = \alpha_i X_i$, où les X_i sont donnés par le corollaire précédent, et vérifient donc :

$$\left\| \sum_{N_k+1}^{N_{k+1}} c_i X_i \right\|_{\mathcal{E}} \leq 2\left(\sum_{N_k+1}^{N_{k+1}} |c_i|^2\right)^{1/2}$$

et $\|X_i\| = 1$.

On a bien $\|Z_i\| = \alpha_i$, et, pour tout choix de $\varepsilon_i = \pm 1$, on a :

$$\left\| \sum_i \varepsilon_i Z_i \right\|_{\mathcal{E}} \leq \sum_k \left\| \sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} \alpha_i \varepsilon_i X_i \right\|$$

$$\leq 2 \sum_k \sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} |\alpha_i \varepsilon_i|^2 \leq 2 \sum_k 2^{-k} < \infty$$

ce qui achève la démonstration.

La démonstration du théorème sera poursuivie dans le prochain exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Day : Normed linear spaces, Springer Verlag, n°21, 1958.

[2] A. Dvoretzky : Some results on convex bodies and Banach spaces, Proc. Intern.Sym. Linear Spaces, Jerusalem, 123-160, (1961).

[3] A. Dvoretzky et C. A. Rogers : Absolute and inconditional convergence in normed linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., 36 (1950), 192-197.

[4] P. Lévy : Problèmes concrets d'Analyse Fonctionnelle, Gauthier-Villars, 1951.

[5] V. D. Milman : New proof of the theorem of A. Dvoretzky on intersections of convex bodies, Functional Anal. Appl. 5 (1971), 288-295.