J. L. KRIVINE

Théorèmes de factorisation dans les espaces réticules

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 22 et 23, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A24_0>

...YTECHNIQUE
...MATIQUES

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1973-1974

THEOREMES DE FACTORISATION DANS LES ESPACES RETICULES

par J.L. KRIVINE

Exposés N° XXII et XXIII 8 et 15 Mai 1974

Dans cet exposé on donne une généralisation et une nouvelle présentation de divers résultats de B. Maurey [2].

Nous appellerons $\mathbb{R}$-treillis un espace vectoriel L sur $\mathbb{R}$, réticulé, normé, tel que $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$ pour $x,y \in L$. Un sous-espace I de L sera appelé idéal si $x \in I$, $y \in L$, $|y| \leq |x| \Rightarrow y \in I$. L'idéal $I(a_1,\dots,a_k)$ engendré par $a_1,\dots,a_k \in L$ est donc $\{x \in L$; il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leq \lambda(|a_1| + \dots + |a_k|)\}$. Un opérateur borné $h : L \to M$ d'un $\mathbb{R}$-treillis dans un autre sera appelé homomorphisme si on a $h(x^+) = h(x)^+$ pour $x \in L$ (et donc $h(x \cup y) = h(x) \cup h(y)$ pour $x,y \in L$) ; si, de plus, la clôture de l'image de h est un idéal de M, alors h sera appelé homomorphisme fort. L'opérateur $h^* : M^* \to L^*$ est alors un homomorphisme fort, et l'image de h^* est un idéal de L^*, comme on le démontre facilement.

Les deux exemples suivants seront très utiles pour la suite :

- Soient L un $\mathbb{R}$-treillis complet et $a \in L_+$, $a \neq 0$. Sur l'idéal I(a) on définit une norme en posant

$$\|x\|_\infty = \inf \{\lambda \in \mathbb{R}_+ \ ; \ |x| \leq \lambda \frac{a}{\|a\|} \} .$$

On a évidemment $\|x\| \leq \|x\|_\infty$, et $\|a\| = \|a\|_\infty$. De plus, on vérifie aisément que $(I(a), \| \ \|_\infty)$ est un M-espace avec unité (l'unité étant $a/\|a\|$) [1] et donc que son complété est isomorphe à un espace $\mathcal{C}(S)$ pour un certain espace compact S. L'application identique de I(a) dans L se prolonge donc en un homomorphisme fort $h : \mathcal{C}(S) \to L$, $\|h\| = 1$.

- Soit, par ailleurs, t une forme linéaire ≥ 0 sur L, $\|t\| = 1$ telle que $t(a) = \|a\|$ (il en existe, puisque si $u \in L^*$, $\|u\| = 1$, $u(a) = \|a\|$, on peut prendre $t = |u|$). On définit sur L une semi-norme en posant $\|x\|_1 = t(|x|)$. On a $\|x\|_1 \leq \|x\|$, $\|a\|_1 = \|a\|$. De plus, $(L, \| \ \|_1)$ est évidemment un L-espace [1], et donc son complété est un espace L^1. L'application identique se prolonge donc en un homomorphisme fort $h : L \to L^1$, $\|h\| = 1$.

Dans l'espace réticulé des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, les applications coordonnées $x_1,\dots,x_n$ engendrent un sous-espace réticulé $\mathcal{C}_n$. Un élément de $\mathcal{C}_n$ sera appelé "terme" et noté $t(x_1,\dots,x_n)$. Autrement dit un terme est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ obtenue à partir des fonctions $x_1,\dots,x_n$ par composition avec l'addition, la multiplication par un scalaire, et les opérations $\cup$, $\cap$. C'est évidemment une fonction continue, homogène de degré 1 ($t(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n) = \lambda\, t(x_1,\dots,x_n)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$), et il existe un réel $M > 0$ tel que $|t(x_1,\dots,x_n)| \leq M(|x_1| \cup \dots \cup |x_n|)$ quels que soient $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$. Enfin il est clair que si L est un espace vectoriel réticulé sur $\mathbb{R}$, chaque terme $t(x_1,\dots,x_n)$ définit une application de $L^n \to L$.

<u>Théorème 1</u> : Soient $t(x_1,\dots,x_n)$, $u(x_1,\dots,x_n)$ deux termes tels que $t(x_1,\dots,x_n) \leq u(x_1,\dots,x_n)$ quels que soient $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$. Si L est un espace vectoriel réticulé sur $\mathbb{R}$, on a $t(x_1,\dots,x_n) \leq u(x_1,\dots,x_n)$ quels que soient $x_1,\dots,x_n \in L$.

Nous ne démontrerons ce théorème que dans le cas où L est un espace vectoriel réticulé normé sur $\mathbb{R}$. Notons également que le résultat est évident lorsque L est un espace de fonctions (c'est-à-dire un sous-espace réticulé de $\mathbb{R}^S$, où S est un ensemble quelconque.)
Soient alors $a_1,\dots,a_n \in L$; on pose $a = |a_1| + \dots + |a_n|$, $b = t(a_1,\dots,a_n)$, $c = u(a_1,\dots,a_n)$. Alors $b, c \in I(a)$, et, si $b \not\leq c$, on a $(b-c)^+ \neq 0$.
Or $(I(a), \|\ \|_\infty)$ est isomorphe à un espace de fonctions (sous-espace réticulé de $\mathcal{C}(S)$) et donc $\|(b-c)^+\|_\infty = 0$. D'où la contradiction cherchée puisque $\|(b-c)^+\| \leq \|(b-c)^+\|_\infty$.

c. q. f. d.

Soit maintenant $f(x_1,\dots,x_n)$ une fonction continue réelle sur $\mathbb{R}^n$, homogène de degré 1. On lui associe canoniquement, pour chaque $\mathbb{R}$-treillis <u>complet</u> L une fonction de L^n dans L, notée également f, de la façon suivante : il existe une suite $t_k(x_1,\dots,x_n)$ de termes telle que l'on ait

$$(*) \quad |t_k(x_1,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_n)| \leq \frac{1}{2^k} |x_1| \cup \dots \cup |x_n|$$

quels que soient $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$; en effet, si S_n est la sphère unité de l_n^∞, les termes forment un sous-espace réticulé de $\mathcal{C}(S_n)$ qui sépare les points et contient la fonction 1 (représentée par $|x_1| \cup \ldots \cup |x_n|$), donc qui est dense dans $\mathcal{C}(S_n)$. D'où une suite $t_k(x_1,\ldots,x_n)$ telle que $|t_k(x_1,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)| < \frac{1}{2^k}$ sur S_n, et on a le résultat cherché par homogénéité.

On a donc $|t_k(x_1,\ldots,x_n) - t_{k+1}(x_1,\ldots,x_n)| \leq \frac{1}{2^{k-1}} |x_1|\cup\ldots\cup|x_n|$ pour $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$, donc aussi pour $x_1,\ldots,x_n \in L$ d'après le théorème précédent. Dans ce dernier cas, on a

$$\|t_k(x_1,\ldots,x_n) - t_{k+1}(x_1,\ldots,x_n)\| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \| \; |x_1|\cup\ldots\cup|x_n| \; \|$$

ce qui montre que la suite $t_k(x_1,\ldots,x_n)$ converge dans L vers un élément noté, par définition, $f(x_1,\ldots,x_n)$. On vérifie immédiatement que cette définition de $f(x_1,\ldots,x_n)$ ne dépend pas de la suite t_k choisie satisfaisant (*), f est une fonction continue sur L^n (limite d'une suite de fonctions continues sur L^n, convergeant uniformément sur les parties bornées).

On a de plus :

Soient $f,g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continues homogènes de degré 1 telles que $f(x_1,\ldots,x_n) \leq g(x_1,\ldots,x_n)$ pour $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$. Si L est un $\mathbb{R}$-treillis complet, alors $f(x_1,\ldots,x_n) \leq g(x_1,\ldots,x_n)$ pour $x_1,\ldots,x_n \in L$.

On choisit deux termes t, u tels que

$$|t(x_1,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)| \leq \varepsilon \; (|x_1|\cup\ldots\cup|x_n|) \; ,$$

$$|u(x_1,\ldots,x_n) - g(x_1,\ldots,x_n)| \leq \varepsilon \; (|x_1|\cup\ldots\cup|x_n|)$$

pour $x_1,\ldots,x_n \in L$. C'est possible par définition de f, g dans L. Si on pose $t' = t - \varepsilon(|x_1|\cup\ldots\cup|x_n|)$, $u' = u - \varepsilon(|x_1| \cup \ldots \cup |x_n|)$, on a, par hypothèse $t'(x_1,\ldots,x_n) \leq u'(x_1,\ldots,x_n)$ quels que soient $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$, donc aussi dans L. D'où $f(x_1,\ldots,x_n) - 2\varepsilon(|x_1| \cup \ldots \cup |x_n|) \leq g(x_1,\ldots,x_n) + 2\varepsilon(|x_1| \cup \ldots \cup |x_n|)$ pour $x_1,\ldots,x_n \in L$, et on a le résultat cherché puisque ε est un réel > 0 quelconque. c. q. f. d.

Si $h : L \to M$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-treillis complet, on a

$$h\,f(x_1,\ldots,x_n) = f(hx_1,\ldots,hx_n)$$

pour $x_1,\ldots,x_n \in L$, f étant une fonction continue homogène de degré 1.

<u>L'espace des puissances $p^{\text{ièmes}}$ d'éléments d'un $\mathbb{R}$-treillis complet L.</u>

Soit p un réel >0 ; pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^p = |x|^p\mathrm{sgn}(x)$. Dans L on définit les opérations $x \oplus y = (x^p + y^p)^{1/p}$, $\lambda * x = \lambda^{1/p}x$ pour $x,y \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie aisément que L muni de ces opérations et de l'opération $(x,y) \to x \cup y$ (inchangée) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel réticulé qu'on désignera par $L^{(p)}$ et qu'on appellera l'espace des puissances $p^{\text{ièmes}}$ d'éléments de L. Lorsque $a \in L$ sera considéré comme élément de $L^{(p)}$, on le notera a^p ; cela permet d'écrire la somme $a^p + b^p$ et le produit par un réel λa^p.

<u>Proposition 1</u> : Soient p un réel ≥ 1, et T une forme linéaire ≥ 0 sur l'espace réticulé $L^{(p)}$. Pour $x \in L$, on pose $\|x\|_T = T(|x|^p)^{1/p}$. Alors $\|\ \|_T$ est une semi-norme sur L et le complété du $\mathbb{R}$-treillis $(L,\|\ \|_T)$ est un espace L^p.

On a immédiatement $\|\lambda x\|_T = |\lambda|\ \|x\|_T$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in L$. Pour l'inégalité triangulaire, on note que si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha^q + \beta^q = 1$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, on a

$$|\alpha x + \beta y| \leq (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$$

pour $x,y \in L$ (car cette inégalité est vraie pour $x,y \in \mathbb{R}$). Donc, dans $L^{(p)}$, on a $|\alpha x + \beta y|^p \leq |x|^p + |y|^p$ soit $|x+y|^p \leq \frac{1}{\alpha^p}\,|x|^p + \frac{1}{\beta^p}\,|y|^p$; puisque T est une forme linéaire ≥ 0, on a $T(|x+y|^p) \leq \frac{1}{\alpha^p}\,T(|x|^p) + \frac{1}{\beta^p}\,T(|y|^p)$.

Si on pose $\alpha^q = \dfrac{\|x\|_T}{\|x\|_T + \|y\|_T}$, $\beta^q = \dfrac{\|y\|_T}{\|x\|_T + \|y\|_T}$, on trouve

$$\|x+y\|_T \leq \|x\|_T + \|y\|_T .$$

Pour voir que $(L, \| \ \|_T)$ est un espace L^p, il suffit de vérifier que, si $x,y \in L_+$, on a $\|x\|_1^p \geq \|x\|_T^p + \|y\|_T^p \geq \|x \cup y\|_T^p$ ([3] ou [4]).

Or, si $x,y \in L$, on a $|x| + |y| \geq (|x|^p + |y|^p)^{1/p} \geq |x| \cup |y|$ (car ces inégalités sont vraies dans $\mathbb{R}$). On a donc, dans $L^{(p)}$:

$$(|x| + |y|)^p \geq |x|^p + |y|^p \geq (|x| \cup |y|)^p$$

et il suffit d'appliquer T aux trois membres pour obtenir le résultat.

c. q. f. d.

Opérateurs de type $\leq p$ et $\geq p$.

Soient E un espace de Banach, L un $\mathbb{R}$-treillis complet et $1 \leq p \leq \infty$. Un opérateur $\mathcal{U} : E \to L$ est dit de type $\geq p$ s'il existe $K > 0$ tel que

$$\| (|\mathcal{U}x_1|^p + \dots + |\mathcal{U}x_n|^p)^{1/p} \| \leq K (\|x_1\|^p + \dots + \|x_n\|^p)^{1/p}$$

pour $x_1,\dots,x_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$. La plus petite constante K possible sera notée $K^{(p)}(\mathcal{U})$. Si $\mathcal{U}$ n'est pas de type $\geq p$, on pose $K^{(p)}(\mathcal{U}) = +\infty$. Evidemment $K^{(p)}(\mathcal{U}) \geq \|\mathcal{U}\|$ et $K^{(1)}(\mathcal{U}) = \|\mathcal{U}\|$.

Un opérateur $V : L \to E$ sera dit de type $\leq p$ s'il existe $K > 0$ tel que

$$(\|Vx_1\|^p + \dots + \|Vx_n\|^p)^{1/p} \leq K \|(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}\|$$

pour $x_1,\dots,x_n \in L$, $n \in \mathbb{N}$. La plus petite valeur de K possible est notée $K_{(p)}(V)$; si V n'est pas de type $\leq p$, on pose $K_{(p)}(V) = +\infty$.

On a $K_{(p)}(V) \geq \|V\|$ et $K_\infty(V) = \|V\|$. Un $\mathbb{R}$-treillis L est dit de type $\geq p$ (resp. $\leq p$) si l'identité $i_L : L \to L$ est de ce type. On pose $K^{(p)}(L) = K^{(p)}(i_L)$ et $K_{(p)}(L) = K_{(p)}(i_L)$ par définition. Pour $p' \geq p$ (resp. $p' \leq p$) les espaces $L^{p'}$ sont de type $\geq p$ (resp. $\leq p$) avec 1 comme constante.

Théorème 2 : Soient E,F des espaces de Banach, L un $\mathbb{R}$-treillis complet, $\mathcal{U} : E \to L$ un opérateur de type $\geq p$, $V : L \to F$ un opérateur de type $\leq p$

et I l'idéal de L engendré par l'image de $\mathcal{U}$. Il existe alors une semi-norme $\|\mathcal{U}\|_p$ sur I telle que le complété de $(I, \|\mathcal{U}\|_p)$ soit un espace L^p et telle que $\|\mathcal{U}\|_p \leq K^{(p)}(\mathcal{U})$, $\|V\|_p \leq K_{(p)}(V)$ ($\|\mathcal{U}\|_p$, $\|V\|_p$ sont les normes des opérateurs $\mathcal{U} : E \to (I, \|\mathcal{U}\|_p)$, $V : (I, \|\mathcal{U}\|_p) \to F$).

On peut supposer $K^{(p)}(\mathcal{U}) = K_{(p)}(V) = 1$. D'après la proposition 1, il suffit de trouver une forme linéaire $T \geq 0$ sur $I^{(p)}$ telle que

$T(|\mathcal{U}x|^p) \leq \|x\|^p$ pour tout $x \in E$; $T(|\xi|^p) \geq \|V\xi\|^p$ pour tout $\xi \in I$.

Comme $I^{(p)}$ est un espace réticulé et que tout élément de $I^{(p)}$ et majoré en valeur absolue par $|\mathcal{U}x_1|^p + \ldots + |\mathcal{U}x_n|^p$ pour $x_1, \ldots, x_n \in E$ (car I est l'idéal engendré par l'image de $\mathcal{U}$), on voit qu'il suffit que, quels que soient $x_1, \ldots, x_m \in E$, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in I$ tels que

$$(*) \qquad |\mathcal{U}x_1|^p + \ldots + |\mathcal{U}x_m|^p \geq |\xi_1| + \ldots + |\xi_n|^p ,$$

on ait $$\|x_1\|^p + \ldots + \|x_m\|^p \geq \|V\xi_1\|^p + \ldots + \|V\xi_n\|^p.$$

Mais, d'après (*), on a dans $\|(|\mathcal{U}x_1|^p + \ldots + |\mathcal{U}x_n|^p)^{\frac{1}{p}}\| \geq \|(|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{\frac{1}{p}}\|$ d'où la conclusion d'après les hypothèses faites sur $\mathcal{U}$ et V.

c. q. f. d.

Corollaire 1 : Soient E un espace de Banach, L un $\mathbb{R}$-treillis complet.

1) Si $\mathcal{U} : E \to L$ est de type $\geq p$ et si L est de type $\leq p$, on a la factorisation $\mathcal{U} = h \circ \mathcal{U}'$, où $\mathcal{U}'$ est un opérateur de E dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$, $\|\mathcal{U}'\| \leq K^{(p)}(\mathcal{U})$, et h un homomorphisme fort de $L^p(\Omega, \mu)$ dans L, $\|h\| \leq K_{(p)}(L)$.

2) Si $V : L \to E$ est de type $\leq p$ et L de type $\geq p$, on a la factorisation $V = V' \circ h$, où $V' : L^p(\Omega, \mu) \to E$, $\|V'\| \leq K_{(p)}(V)$, et $h : L \to L^p(\Omega, \mu)$ est un homomorphisme fort, $\|h\| \leq K^{(p)}(L)$.

Conséquence immédiate du théorème 2, en posant $\mathcal{U} = i_L \circ \mathcal{U}$, $V = V \circ i_L$, i_L étant l'identité sur L.

<u>Corollaire 2</u> : Pour qu'un $\mathbb{R}$-treillis complet L soit isomorphe à un espace $L^p(\Omega,\mu)$ (c'est-à-dire pour qu'il existe un opérateur borné $L \to L^p(\Omega,\mu)$ bijectif qui soit un homomorphisme de $\mathbb{R}$-treillis), il faut et il suffit que L soit à la fois de type $\leq p$ et $\geq p$.

La condition est évidemment nécessaire. On voit immédiatement qu'elle est suffisante en appliquant le théorème 2 avec $\mathcal{U} = i_L$, $V = i_L$.

<u>Proposition 2</u> : Soit $\mathcal{U}: L \to M$ un opérateur ≥ 0, L et M étant deux $\mathbb{R}$-treillis complets. Alors

$$\|\, (|\mathcal{U}x_1|^p + \ldots + |\mathcal{U}x_n|^p)^{1/p} \| \leq \|\mathcal{U}\| \, \|\, (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p} \|$$

quels que soient $x_1,\ldots,x_n \in L$, $p \geq 1$.

Montrons d'abord la

<u>Proposition 3</u> : Soit L un $\mathbb{R}$-treillis complet, $a_1,\ldots,a_n \in L$ et $p,q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$(|a_1|^p + \ldots = |a_n|^p)^{1/p} = \sup \{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \, ; \, \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}, |\alpha_1|^q + \ldots + |\alpha_n|^q \leq 1\}.$$

On a $(|a_1|^p + \ldots + |a_n|^p)^{1/p} \geq \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ si $|\alpha_1|^q + \ldots + |\alpha_n|^q = 1$ (car cette inégalité est vraie lorsque $a_1,\ldots,a_n$ décrivent $\mathbb{R}$).

Inversement, soit $(\alpha_1^i,\ldots,\alpha_n^i)$ $(i = 1,2,\ldots)$ une énumération des n-uplets de rationnels tels que $|\alpha_1^i|^q + \ldots + |\alpha_n^i|^q \leq 1$, et posons

$$t_j(x_1,\ldots,x_n) = \sup_{i=1}^{j} \alpha_1^i x_1 + \ldots + \alpha_n^i x_n .$$

Les t_j forment une suite croissante de fonctions continues sur S_n (sphère unité de l_n^∞) qui converge (et donc converge uniformément) vers la fonction continue $(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$.

Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc N tel que, si $j \geq N$, l'on ait

$$|t_j(x_1,\ldots,x_n) - (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}| \leq \varepsilon(|x_1| \cup \ldots \cup |x_n|)$$

quels que soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Cette inégalité est donc vraie quels que soient $x_1, \ldots, x_n \in L$. Il en résulte que si $b \in L$, $b \geq \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ quels que soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $|\alpha_1|^q + \ldots + |\alpha_n|^q \leq 1$, on a $b \geq t_j(a_1, \ldots, a_n)$ et par suite

$$b \geq (|a_1|^p + \ldots + |a_n|^p)^{1/p} - \varepsilon(|\alpha_1| \cup \ldots \cup |a_n|).$$

Comme ε est arbitraire > 0, on a $b \geq (|a_1|^p + \ldots + |a_n|^p)^{1/p}$.

c. q. f. d.

Montrons la proposition 2 : puisque $\mathcal{U} \geq 0$, et que

$$(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \geq \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R},\ \alpha_1^q + \ldots + \alpha_n^q \leq 1)$$

on a $\mathcal{U}(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p} \geq \alpha_1 \mathcal{U} x_1 + \ldots + \alpha_n \mathcal{U} x_n$, et donc (proposition 3) $\mathcal{U}(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p} \geq (|\mathcal{U} x_1|^p + \ldots + |\mathcal{U} x_n|^p)^{1/p}$.

Donc

$$\| (|\mathcal{U} x_1|^p + \ldots + |\mathcal{U} x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \| \leq \| \mathcal{U}(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p} \|$$
$$\leq \|\mathcal{U}\| \ \| (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \| .$$

c. q. f. d.

Il en résulte immédiatement que, si L, M sont deux $\mathbb{R}$-treillis complets, de types respectivement $\geq p$ et $\leq p$, tout opérateur ≥ 0, $\mathcal{U}: L \to M$ est à la fois de type $\geq p$ et $\leq p$, donc admet deux factorisations par un espace L^p, de chacun des types indiqués au corollaire 1.

Lorsque $p = 2$, le théorème suivant permet d'éliminer la restriction $\mathcal{U} \geq 0$.

<u>Théorème 3</u> : <u>(Inégalité de Grothendieck)</u>. Soient L, M deux $\mathbb{R}$-treillis complets et $\mathcal{U}: L \to M$ un opérateur borné. Alors

$$\| (|\mathcal{U} x_1|^2 + \ldots + |\mathcal{U} x_n|^2)^{\frac{1}{2}} \| \leq K_G \|\mathcal{U}\| \ \| (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} \|$$

pour $x_1,\dots,x_n \in L$ (K_G est la constante de Grothendieck).

On se ramène au cas particulier où $L = \mathcal{C}(S)$ (S espace compact) et où M est un espace L^1. On suppose connu ce cas (qui sera d'ailleurs démontré plus loin).

Soient $a_1,\dots,a_n \in L$; on pose $a = (|a_1|^2+\dots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$, $b = (|\mathcal{U}a_1|^2+\dots+|\mathcal{U}a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.

D'après les remarques du début, il existe deux homomorphismes $h : \mathcal{C}(S) \to L$, $h' : M \to L^1(\Omega,\mu)$, $\|h\| = \|h'\| = 1$; de plus, h est l'identité sur I(a) (donc $h(a_i) = a_i$, $i = 1,\dots,n$), $\|a\|_\infty = \|a\|$, et $\|h'b\| = \|b\|$.

En appliquant l'inégalité de Grothendieck à l'opérateur $h'\circ\mathcal{U}\circ h : \mathcal{C}(S) \to L^1(\Omega,\mu)$, on trouve

$$\|(|h'\mathcal{U}h\, a_1|^2+\dots+|h'\mathcal{U}ha_n|^2)^{\frac{1}{2}}\| \le K_G \|h'\circ\mathcal{U}\circ h\| \; \|a\|_\infty .$$

Or $\|a\|_\infty = \|a\|$ et $\|h'\circ\mathcal{U}\circ h\| \le \|\mathcal{U}\|$. De plus, comme h' est un homomorphisme, le premier membre est $\|h'(|\mathcal{U}ha_1|^2+\dots+|\mathcal{U}ha_n|^2)^{1/2}\|$ donc inférieur ou égal à $\|(|\mathcal{U}ha_1|^2+\dots+|\mathcal{U}ha_n|^2)^{1/2}\|$. D'où le résultat, puisque $ha_i = a_i$.

c. q. f. d.

Il en résulte immédiatement que si L et M sont des $\mathbb{R}$-treillis respectivement de type ≥ 2 et ≤ 2, tout opérateur $\mathcal{U} : L \to M$ est à la fois de type ≤ 2 et ≥ 2. Par suite

Corollaire 3 : Si L, M sont des $\mathbb{R}$-treillis complets, de types respectivement ≥ 2 et ≤ 2, tout opérateur $\mathcal{U} : L \to M$ admet deux factorisations :

1) $\mathcal{U} = h'\circ\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}' : L \to L^2(\Omega',\mu')$, $\|\mathcal{U}'\| \le K_G \|\mathcal{U}\|\; K^{(2)}(L)$, et $h' : L^2(\Omega',\mu') \to M$, $\|h'\| \le K_{(2)}(M)$, h' étant un homomorphisme fort.

2) $\mathcal{U} = \mathcal{U}''\circ h''$, $h'' : L \to L^2(\Omega'',\mu'')$, $\mathcal{U}'' : L^2(\Omega'',\mu'') \to M$, $\|h''\| \le K^{(2)}(L)$, $\|\mathcal{U}'\| \le K_G\, K_{(2)}(M)\, \|\mathcal{U}\|$, h'' étant un homomorphisme fort.

Lemme 1 : Soient $\varphi_1(\omega),\dots,\varphi_n(\omega)$ des variables aléatoires de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable sur l'espace de probabilité (Ω,P) et $\mathcal{U} : E \to L$ un opérateur de type $\ge p$ d'un espace de Banach E dans $\mathbb{R}$-treillis complet L.

Alors quels que soient $x_1,\dots,x_n \in E$, on a

$$\Big\| \Big(\int_\Omega |\mathcal{U}x_1\varphi_1(\omega)+\dots+\mathcal{U}x_n\varphi_n(\omega)|^p P(d\omega)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\| \le K^{(p)}(\mathcal{U})\Big(\int_\Omega \|x_1\varphi_1(\omega)+\dots+x_n\varphi_n(\omega)\|^p P(d\omega)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

De même, si $V : L \to E$ est un opérateur de type $\le p$, on a

$$\Big(\int_\Omega \|Vx_1\varphi_1(\omega)+\dots+Vx_n\varphi_n(\omega)\|^p P(d\omega)\Big)^{\frac{1}{p}} \le K_{(p)}(V)\,\Big\|\Big(\int_\Omega |x_1\varphi_1(\omega)+\dots+x_n\varphi_n(\omega)|^p P(d\omega)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|$$

On montre seulement la première inégalité ; notons que la fonction $F(y_1,\dots,y_n) = \left(\int_\Omega |y_1\varphi_1(\omega)+\dots+y_n\varphi_n(\omega)|^p P(d\omega)\right)^{1/p}$ est continue homogène de degré 1 sur $\mathbb{R}^n$, ce qui permet de la définir dans L. Notons aussi que l'inégalité à démontrer est évidente lorsque $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ sont étagées, puisque l'intégrale se réduit alors à une somme finie.
On choisit alors des fonctions étagées $\psi_i(\omega)$ telles que

$$\Big(\int_\Omega |\varphi_i(\omega) - \psi_i(\omega)|^p P(d\omega)\Big)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon \qquad (i = 1,\dots,n).$$

On a alors

$$\Big| \Big(\int_\Omega \|x_1\varphi_1(\omega)+\dots+x_n\varphi_n(\omega)\|^p P(d\omega)\Big)^{\frac{1}{p}} - \Big(\int_\Omega \|x_1\psi_1(\omega)+\dots+x_n\psi_n(\omega)\|^p P(d\omega)\Big)^{\frac{1}{p}} \Big|$$

$$\le \Big(\int_\Omega \Big| \|x_1\varphi_1(\omega)+\dots+x_n\varphi_n(\omega)\| - \|x_1\psi_1(\omega)+\dots+x_n\psi_n(\omega)\| \Big|^p P(d\omega)\Big)^{\frac{1}{p}}$$

(inégalité triangulaire dans $L^p(\Omega,P)$)

$$\le \Big(\int_\Omega \|x_1(\varphi_1(\omega)-\psi_1(\omega))+\dots+x_n(\varphi_n(\omega)-\psi_n(\omega))\|^p P(d\omega)\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \|x_1\| \Big(\int_\Omega |\varphi_1(\omega)-\psi_1(\omega)|^p P(d\omega)\Big)^{\frac{1}{p}} + \dots + \|x_n\| \Big(\int_\Omega |\varphi_n(\omega)-\psi_n(\omega)|^p P(d\omega)\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \varepsilon(\|x_1\|+\dots+\|x_n\|).$$

Par ailleurs. en posant $y_i = \mathcal{U} x_i$, on a dans L :

$$\left| \left(\int_\Omega |y_1\varphi_1(\omega)+\dots+y_n\varphi_n(\omega)|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_\Omega |y_1\psi_1(\omega)+\dots+y_n\psi_n(\omega)|^p\, P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \right| \le \varepsilon(|y_1|+\dots+|y_n|)$$

(en effet, cette inégalité serait vraie pour $y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$, par la même démonstration que ci-dessus, donc est vraie pour $y_1,\dots,y_n \in L$).
Par suite , la norme du premier membre est $\le \varepsilon(\|y_1\|+\dots+\|y_n\|)$.
Comme l'inégalité à démontrer est vraie pour $\psi_1,\dots,\psi_n$ qui sont étagées, on en déduit

$$\left\| \left(\int_\Omega |y_1\varphi_1(\omega)+\dots+y_n\varphi_n(\omega)|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \right\| \le K^{(p)}(\mathcal{U})\left(\int_\Omega \|x_1\varphi_1(\omega)+\dots+x_n\varphi_n(\omega)\|^p P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\ \varepsilon\ (\|y_1\|+\dots+\|y_n\|)\ +$$

$$+\ \varepsilon\ K^{(p)}(\mathcal{U})\ (\|x_1\|+\dots+\|x_n\|)\ .$$

D'où le résultat puisque ε est un réel >0 arbitraire.

c. q. f. d.

Dans la suite $f_1^{(p)}(\omega),\dots,f_n^{(p)}(\omega)$ (p réel, $0<p\le 2$) désignent des variables aléatoires indépendantes p-stables sur (Ω,P), telles que

$$\int_\Omega \exp\ i(\lambda_1 f_1^{(p)}(\omega)+\dots+\lambda_n f_n^{(p)}(\omega))P(d\omega) = \exp\ (-|\lambda_1|^p-\dots-|\lambda_n|^p).$$

On écrira $f_i(\omega)$ au lieu de $f_i^{(2)}(\omega)$, on pose $\gamma_q = \left(\int_\Omega |f_i(\omega)|^q\ P(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}}$ pour tout réel $q>0$,
et $\gamma_{p,q} = \left(\int_\Omega |f_i^{(p)}(\omega)|^q\ P(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}}$ pour $0<q<p<2$.

<u>Lemme 2</u> : Soient L un $\mathbb{R}$-treillis complet et $x_1,\dots,x_n \in L$. Alors

$$\left(\int_\Omega |x_1f_1(\omega)+\dots+x_nf_n(\omega)|^q P(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}} = \gamma_q(|x_1|^2+\dots+|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout $q>0$;

$$\left(\int_\Omega |x_1 f_1^{(p)}(\omega)+\dots+x_n f_n^{(p)}(\omega)|^q P(d\omega)\right)^{\frac{1}{q}} = \gamma_{p,q}\left(|x_1|^p+\dots+|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

pour $0 < q < p \leq 2$.

Cela résulte immédiatement du fait que ces égalités sont vraies pour $x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}$.

<u>Théorème 4</u> : Soient p un réel ≥ 2 , M un $\mathbb{R}$-treillis complet de type $\leq p$ et ≥ 2 et E un sous-espace de M. Alors tout opérateur $\mathcal{U}: E \to L$, où L est un $\mathbb{R}$-treillis complet, est de type ≥ 2 et

$$K^{(2)}(\mathcal{U}) \leq \|\mathcal{U}\| \; K_{(p)}(M) \; K^{(2)}(M) \; \frac{\gamma_p}{\gamma_1} .$$

Soient $x_1,\dots,x_n \in E$; on a $\gamma_1 \; \|(|\mathcal{U}x_1|^2+\dots+|\mathcal{U}x_n|^2)^{\frac{1}{2}}\| =$

$$= \left\|\int_\Omega |\mathcal{U}x_1 f_1(\omega)+\dots+\mathcal{U}x_n f_n(\omega)| \, P(d\omega)\right\| \text{(lemme2)} \leq \int_\Omega \|\mathcal{U}x_1 f_1(\omega)+\dots+\mathcal{U}x_n f_n(\omega)\| \; P(d\omega)$$

$$\leq \|\mathcal{U}\| \int_\Omega \|x_1 f_1(\omega)+\dots+x_n f_n(\omega)\| \; P(d\omega) \leq \|\mathcal{U}\| \; \left(\int_\Omega \|x_1 f_1(\omega)+\dots+x_n f_n(\omega)\|^p \, P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|\mathcal{U}\| \quad K_{(p)}(M) \quad \left\|\left(\int_\Omega |x_1 f_1(\omega)+\dots+x_n f_n(\omega)|^p \; P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}}\right\| \qquad \text{(lemme 1)}$$

$$= \|\mathcal{U}\| \; K_{(p)}(M) \; \gamma_p \quad \|(|x_1|^2+\dots+|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}\| \qquad \text{(lemme 2)}$$

$$\leq \|\mathcal{U}\| \quad K_{(p)}(M) \; \gamma_p \; K^{(2)}(M) \; \left(\|x_1\|^2+\dots+\|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

c. q. f. d.

<u>Corollaire 4</u> : Si E est un sous-espace d'un $\mathbb{R}$-treillis M de type ≥ 2 et $\leq p$ $(p \geq 2)$, alors tout opérateur $\mathcal{U}: E \to L$, où L est un $\mathbb{R}$-treillis de type ≤ 2 admet la factorisation $\mathcal{U} = h \circ \mathcal{U}'$, $\mathcal{U}' : E \to L^2(\mu)$, $h : L^2(\mu) \to L$, h étant un homomorphisme fort.

En particulier les seuls espaces de Banach isomorphes à la fois à un sous-espace de L et un sous-espace de M sont des espaces de Hilbert.

<u>Théorème 4.1</u> : Soient $1 \le p < q \le 2$, et E un sous-espace d'un L^q. Alors tout opérateur de E dans un $\mathbb{R}$-treillis complet L est de type $\ge p$.

On montre d'abord qu'on a pour $x_1,\dots,x_n \in L^q$:

$$\int_\Omega \|x_1 f_1^{(p)}(\omega)+\dots+x_n f_n^{(p)}(\omega)\| \; P(d\omega) \le K\,(\|x_1\|^p+\dots+\|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Pour une certaine constante K dépendant de p, q. Pour cela, on utilise le fait qu'il existe un espace de probabilité (Ω',P') et une isométrie $J : L^q \to L^p(\Omega',P')$, telle que, si $h : L^p(\Omega',P') \to L^1(\Omega',P')$ est l'application identique, $\frac{\gamma_{q,p}}{\gamma_{q,1}}\, h \circ J$ soit aussi une isométrie (J est le plongement isométrique de L^q dans $L^p(\Omega',P')$ défini au moyen de variables q-stables [4]).

On a alors

$$\frac{\gamma_{q,1}}{\gamma_{q,p}} \int_\Omega \|x_1 f_1^{(p)}(\omega)+\dots+x_n f_n^{(p)}(\omega)\| \; P(d\omega) =$$

$$= \int_\Omega \|hJx_1 f_1^{(p)}(\omega)+\dots+hJx_n f_n^{(p)}(\omega)\|_1 \; P(d\omega) =$$

$$= \left\| \int_\Omega |hJx_1 f_1^{(p)}(\omega)+\dots+hJx_n f_n^{(p)}(\omega)| \; P(d\omega) \right\|_1 \quad \text{(théorème de Fubini)} =$$

$$= \gamma_{p,1} \left\| (|hJx_1|^p+\dots+|hJx_n|^p)^{\frac{1}{p}} \right\|_1 \quad \text{(lemme 2)}$$

$$= \gamma_{p,1} \left\| h\,(|Jx_1|^p+\dots+|Jx_n|^p)^{\frac{1}{p}} \right\|_1 \quad \text{(h est un homomorphisme)}$$

$$\le \gamma_{p,1} \left\| (|Jx_1|^p+\dots+|Jx_n|^p)^{\frac{1}{p}} \right\|_p$$

$$= \gamma_{p,1}\,(\|Jx_1\|^p+\dots+\|Jx_n\|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{car } Jx_i \in L^p)$$

$$= \gamma_{p,1} \left(\|x_1\|^p + \dots + \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

D'où le résultat annoncé avec $K = \gamma_{q,p} \dfrac{\gamma_{q,1}}{\gamma_{p,1}}$.

On a alors, si $U : E \to L$:

$$\gamma_{p,1} \left\| \left(|Ux_1|^p + \dots + |Ux_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| = \left\| \int_\Omega \left(|Ux_1 f_1^{(p)}(\omega) + \dots + Ux_n f_n^{(p)}(\omega)| \right) P(d\omega) \right\|$$

(lemme 2)

$$\leq \int_\Omega \| Ux_1 f_1^{(p)}(\omega) + \dots + Ux_n f_n^{(p)}(\omega) \| \; P(d\omega)$$

$$\leq \|U\| \int_\Omega \| x_1 f_1^{(p)}(\omega) + \dots + x_n f_n^{(p)}(\omega) \| \; P(d\omega)$$

$$\leq K \|U\| \left(\|x_1\|^p + \dots + \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

c. q. f. d.

Dualité des opérateurs de type $\geq p$ et $\leq q$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$.

Lemme 3 : Soit U un opérateur défini sur un espace de Banach E à valeurs dans $L^1(\Omega,\mu)$. Pour que $K^{(p)}(U) \leq K$, il faut et il suffit que U admette la factorisation

$$E \xrightarrow{U'} L^p(\Omega',\mu') \xrightarrow{h} L^1(\Omega,\mu), \text{ avec } \|U'\| \leq K, \; \|h\| \leq 1,$$

h étant un homomorphisme (resp. un homomorphisme fort).

La condition est évidemment nécessaire d'après le corollaire 1. Elle est suffisante car si $x_1,\dots,x_n \in E$, on a

$$\left\| \left(|Ux_1|^p + \dots + |Ux_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| = \left\| \left(|hU'x_1|^p + \dots + |hU'x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|$$

$$= \left\| h \left(|U'x_1|^p + \dots + |U'x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|$$

(puisque h est un homomorphisme)

$$\leq \| (|U'x_1|^p + \ldots + |U'x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \| = (\|U'x_1\|^p + \ldots + \|U'x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(car $U'x_i \in L^p(\Omega',\mu')$)

$$\leq K (\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

c. q. f. d.

<u>Lemme 4</u> : Soit $V : \mathcal{C}(S) \to E$ (S espace compact, E espace de Banach). Pour que $K_{(p)}(V) \leq K$, il faut et il suffit que V admette la factorisation $\mathcal{C}(S) \xrightarrow{h} L^p(\Omega,\mu) \xrightarrow{V'} E$, $\|h\| \leq 1$, $\|V'\| \leq K$, h étant un homomorphisme (resp. un homomorphisme fort).

La condition est évidemment nécessaire d'après le corollaire 1. Elle est suffisante car si $x_1,\ldots,x_n \in \mathcal{C}(S)$, on a

$$(\|Vx_1\|^p + \ldots + \|Vx_n\|^p)^{\frac{1}{p}} = (\|V'hx_1\|^p + \ldots + \|V'hx_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq K (\|hx_1\|^p + \ldots + \|hx_n\|^p)^{\frac{1}{p}} = K \| (|hx_1|^p + \ldots + |hx_n|^p)^{\frac{1}{p}} \|$$

(car $hx_i \in L^p(\Omega,\mu)$)

$$= K \|h (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \|$$

(car h est un homomorphisme)

$$\leq K \| (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \| .$$

c. q. f. d.

<u>Proposition 4</u> : Si $U : E \to L^1(\Omega,\mu)$ défini sur un espace de Banach E est de type $\geq p$, alors U^* est de type $\leq q$ et $K^{(p)}(U) = K_{(q)}(U^*)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Si $V : \mathcal{C}(S) \to E$ (S espace compact) est de type $\leq p$, alors V^* est de type $\geq q$ et $K_{(p)}(V) = K^{(q)}(V^*)$.

En effet, U admet la factorisation $E \xrightarrow{U'} L^p(\Omega',\mu') \xrightarrow{h} L^1(\Omega,\mu)$, donc U^* admet la factorisation $L^\infty(\Omega,\mu) \xrightarrow{h^*} L^q(\Omega',\mu') \xrightarrow{U'^*} E^*$. Donc U^* est de type $\leq q$ et $K_{(q)}(U^*) \leq K^{(p)}(U)$ (car $\|U'\| = K^{(p)}(U)$).

De même V^* est de type $\geq q$ et $K^{(q)}(V^*) \leq K_{(p)}(V)$.

En appliquant de nouveau ce résultat à U^* (puisque $L^\infty(\Omega,\mu)$ est un espace $\mathcal{C}(S)$), on trouve $K^{(p)}(U^{**}) \leq K_{(q)}(U^*) \leq K^{(p)}(U)$.
Or, évidemment, $K^{(p)}(U^{**}) \geq K^{(p)}(U)$ puisque U^{**} est un prolongement de U.
Il en résulte que $K^{(p)}(U^{**}) = K_{(q)}(U^*) = K^{(p)}(U)$.
De même, $K^{(q)}(V^*) = K_{(p)}(V)$.

c. q. f. d.

Théorème 5 : Soit $U : E \to L$ un opérateur de type $\geq p$ (E espace de Banach, L $\mathbb{R}$-treillis complet). Alors U^* est de type $\leq q$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1\right)$ et $K_{(q)}(U^*) = K^{(p)}(U)$.

Compte tenu du théorème suivant et du fait que $K^{(p)}(U^{**}) \geq K^{(p)}(U)$, il suffit de montrer que $K_{(q)}(U^*) \leq K^{(p)}(U)$. On suppose $K^{(p)}(U) = 1$.

Soient $t_1,\ldots,t_n \in L^*$, $t = (|t_1|^q+\ldots+|t_n|^q)^{\frac{1}{q}}$. On a à montrer que $(\|U^*t_1\|^q+\ldots+\|U^*t_n\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|t\|$; on peut supposer $\|t\| = 1$.
Sur L on met la norme définie par $\|x\|_1 = t(|x|)$. Alors le complété de $(L, \|\ \|_1)$ est un espace $L^1(\Omega,\mu)$ et l'identité est un homomorphisme fort $h : L \to L^1(\Omega,\mu)$. De plus, $K^{(p)}(h\circ U) \leq 1$ (car $\|h\| \leq 1$ et h est un homomorphisme).
D'après la proposition précédente, on a : $K_{(q)}(U^*\circ h^*) \leq 1$.
Comme l'image de $h^* : L^\infty(\Omega,\mu) \to L^*$ est un idéal de L^* (voir remarques du début) et que $h^*(1) = t$, il existe $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in L^\infty(\Omega,\mu)$ tels que $h^*\varphi_i = t_i$ $(i = 1,\ldots,n)$. On pose $\varphi = (|\varphi_1|^q+\ldots|\varphi_n|^q)^{1/q}$ et on a

$$(\|U^*h^*\varphi_1\|^q+\ldots+\|U^*h^*\varphi_n\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi\|_\infty \quad \text{(parce que } K_{(q)}(U^*\circ h^*) \leq 1) ;$$

soit $(\|U^*t_1\|^q+\ldots+\|U^*t_n\|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi\|_\infty$.

Or $\|\varphi\|_\infty = \sup\ \{<\varphi,f> ;\ f \in L^1(\Omega,\mu),\ \|f\|_1 = 1\}$

$= \sup\ \{<\varphi,hx> ;\ x \in L,\ t(|x|) = 1\}$

puisque l'image de h est dense dans $L^1(\Omega,\mu)$ (par construction de cet espace).

Or $< \varphi, hx > = < h^{*}\varphi, x > = < h^{*}(|\varphi_1|^q + \ldots + |\varphi_n|^q)^{\frac{1}{q}}, x > = < (|t_1|^q + \ldots + |t_n|^q)^{\frac{1}{q}}, x >$

(car h^{*} est un homomorphisme et $h^{*}\varphi_i = t_i$)

$= t(x)$.

Il en résulte que $\|\varphi\|_{\infty} \leq 1$.

c. q. f. d.

<u>Théorème 6</u> : Soit $V : L \to E$ un opérateur de type $\leq p$ (E espace de Banach, L $\mathbb{R}$-treillis). Alors V^{*} est de type $\geq q$ et $K^{(q)}(V^{*}) = K_{(p)}(V)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Compte tenu du résultat précédent, il suffit de montrer que $K^{(q)}(V^{*}) \leq K_{(p)}(V)$. On suppose $K_{(p)}(V) = 1$. Soient $t_1, \ldots, t_n \in E^{*}$ et $u = (|V^{*}t_1|^q + \ldots + |V^{*}t_n|^q)^{1/q}$. Comme u est une forme linéaire ≥ 0 sur L, pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut choisir $a \in L_+$, $\|a\| = 1$, $u(a) \geq \|u\| - \varepsilon$.
On a construit au début de cet exposé un espace $\mathcal{C}(S)$ et un homomorphisme fort $h : \mathcal{C}(S) \to L$, $\|h\| = 1$ tel que $h(1) = a$.
On a alors $K_{(p)}(V \circ h) \leq 1$; donc, d'après la proposition 4, $K^{(q)}(h^{*} \circ V^{*}) \leq 1$, et, par suite,

$$\| (|h^{*}V^{*}t_1|^q + \ldots + h^{*}V^{*}t_n|^q)^{\frac{1}{q}} \| \leq (\|t_1\|^q + \ldots + \|t_n\|^q)^{\frac{1}{q}} .$$

Le premier membre est $\|h^{*}u\|$ puisque h^{*} est un homomorphisme.
Or, $h^{*} : L^{*} \to \mathcal{C}(S)^{*}$ et $u \geq 0$; il en résulte que $h^{*}u$ est une mesure de Radon ≥ 0 sur S, donc $\|h^{*}u\| = < h^{*}u, 1 > = < u, h(1) > = u(a) \geq \|u\| - \varepsilon$.
Comme ε est arbitraire, on a

$$\|u\| \leq (\|t_1\|^q + \ldots + \|t_n\|^q)^{1/q} .$$

c. q. f. d.

<u>Théorème 7</u> : Soit $U : E \to L$ un opérateur borné (E espace de Banach, L $\mathbb{R}$-treillis complet). Alors $K^{(p)}(U)$ est une fonction log-convexe de $\frac{1}{p}$ entre 0 et 1 (ce qui veut dire que Log $K^{(\frac{1}{x})}(U)$ est une fonction convexe de x, $0 \leq x \leq 1$). de même si $V : L \to E$ est un opérateur borné, $K_{(p)}(V)$ est une fonction log-convexe de $\frac{1}{p}$ entre 0 et 1.

Par dualité, on voit qu'il suffit de montrer la première partie du théorème.

<u>Lemme 5</u> : Soient $x,y \in L_+$, $0 \le \theta \le 1$. Alors

$$\|x^\theta y^{1-\theta}\| \le \|x\|^\theta \|y\|^{1-\theta} .$$

Noter que $x^\theta y^{1-\theta}$ étant homogène et de degré 1 est définie dans L et on a $x^\theta y^{1-\theta} \le \theta x + (1-\theta)y$ pour $x,y \in L_+$ (car cette inégalité est vraie pour $x,y \in \mathbb{R}_+$ d'après la concavité de la fonction Log).
Donc

$$\|x^\theta y^{1-\theta}\| \le \theta \|x\| + (1-\theta) \|y\| ,$$

d'où le résultat en remplaçant x par $x/\|x\|$, y par $y/\|y\|$.

c. q. f. d.

<u>Lemme 6</u> : Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}_+$, $a_1,\ldots,a_n \in L_+$, alors

$$\|(\alpha_1 a_1^p+\ldots+\alpha_n a_n^p)^{1/p}\|$$

est une fonction log-convexe de $\frac{1}{p}$ entre 0 et 1.

Soit $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$, $p,q \ge 1$, $0 \le \theta \le 1$. On a à prouver que

$$\|(\alpha_1 a_1^r+\ldots+\alpha_n a_n^r)^{1/r}\| \le \|(\alpha_1 a_1^p+\ldots+\alpha_n a_n^p)^{1/p}\|^\theta \|\alpha_1 a_1^q+\ldots+\alpha_n^q)^{1/q}\|^{1-\theta} .$$

D'après le lemme 5, il suffit de montrer que

$$(\alpha_1 a_1^r+\ldots+\alpha_n a_n^r)^{1/r} \le (\alpha_1 a_1^p+\ldots+\alpha_n a_n^p)^{\theta/p} (\alpha_1 a_1^q+\ldots+\alpha_n a_n^q)^{1-\theta/q} .$$

Il suffit de voir que cette inégalité est vraie quels que soient $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}_+$. Or, c'est alors l'inégalité de Hölder

$$b_1 c_1+\ldots+b_n c_n \le (b_1^{p'}+\ldots+b_n^{p'})^{1/p'} (c_1^{q'}+\ldots+c_n^{q'})^{1/q'}$$

avec $\frac{1}{p'} = \frac{\theta r}{p}$, $\frac{1}{q'} = \frac{(1-\theta)r}{q}$, $b_i = (\alpha_i a_i^p)^{1/p'}$, $c_i = (\alpha_i a_i^q)^{1/q'}$.

c. q. f. d.

On montre alors le théorème 7. On a

$$K^{(p)}(U) = \sup \{ \|(|Ux_1|^p+\dots+|Ux_n|^p)^{\frac{1}{p}}\| \ ; \ x_1,\dots,x_n \in E \ , \ \|x_1\|^p+\dots+\|x_n\|^p = 1\}$$

$$= \sup \{ \|\alpha_1|Ux_1|^p+\dots+\alpha_n|Ux_n|^p)^{\frac{1}{p}}\| \ ; \ \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}_+, \ \alpha_1+\dots+\alpha_n = 1 \ ; \ x_1,\dots,x_n \in E \ , \ \|x_1\| = \dots = \|x_n\| = 1\}$$

D'où le résultat cherché d'après le lemme 6 et le fait que la borne supérieure d'une famille de fonctions log-convexe l'est aussi.

c. q. f. d.

Notons que si $p \geq q \geq 1$, et si on définit θ par $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + 1-\theta$, on a donc

$$K^{(q)}(U) \leq K^{(p)}(U)^{\theta} K^{(1)}(U)^{1-\theta} = K^{(p)}(U)^{\theta} \|U\|^{1-\theta} .$$

Comme $K^{(p)}(U) \geq \|U\|$, on voit que $K^{(p)}(U) \geq K^{(q)}(U)$. Donc <u>$K^{(p)}(U)$ est une fonction croissante de p, et de même $K_{(p)}(U)$ est fonction décroissante de p</u>.

<u>Une preuve de l'inégalité de Grothendieck</u>.

<u>Proposition 5 :</u> Soit $V : L \to M$ un opérateur de type $\leq p$, L , M étant des $\mathbb{R}$-treillis normés complets.
Alors

$$\|(|Vx_1|^2+\dots+|Vx_n|^2)^{\frac{1}{2}}\| \leq K_{(p)}(V) \frac{\gamma_p}{\gamma_1} \|(|x_1|^2+\dots+|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|$$

pour $x_1,\dots,x_n \in L$.

En effet, on a

$$\gamma_1 \|(|Vx_1|^2+\dots+|Vx_n|^2)^{\frac{1}{2}}\| = \| \int_\Omega |Vx_1 f_1(\omega)+\dots+Vx_n f_n(\omega)| \ P(d\omega)\|$$

(lemme 2)

$$\leq \int_\Omega \|Vx_1 f_1(\omega)+\dots+Vx_n f_n(\omega)\| \ P(d\omega) \leq (\int \|Vx_1 f_1(\omega)+\dots+Vx_n f_n(\omega)\|^p \ P(d\omega))^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq K_{(p)}(V) \quad \| \left(\int_\Omega |x_1 f_1(\omega)+\ldots+x_n f_n(\omega)|^p \, P(d\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \| \qquad \text{(lemme 1)}$$

$$= K_{(p)}(V) \; \gamma_p \; \| \left(|x_1|^2+\ldots |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \| \qquad \text{(lemme 2).}$$

c. q. f. d.

<u>Proposition 6</u> : Soit $V : L \to L^1(\Omega,\mu)$ un opérateur de type $\leq p$ (p réel >2, L $\mathbb{R}$-treillis complet). Alors V est de type ≤ 2 et

$$K_{(2)}(V) \leq \left(\frac{\gamma_p}{\gamma_1}\right)^{\frac{p}{p-2}} \|V\| .$$

D'après la proposition précédente, et le fait que $L^1(\Omega,\mu)$ est de type ≤ 2, on voit que V est de type ≤ 2, et que $K_2(V) \leq \frac{\gamma_p}{\gamma_1} K_{(p)}(V)$.

Comme $K_{(p)}(V)$ est une fonction log-convexe de $\frac{1}{p}$ et que $K_\infty(V) = \|V\|$, on voit que si $\theta = \frac{2}{p}$, on a $K_{(p)}(V) \leq K_2(V)^\theta \; \|V\|^{1-\theta}$.

Donc $K_2(V) \leq \frac{\gamma_p}{\gamma_1} K_2(V)^\theta \; \|V\|^{1-\theta}$, ce qui donne le résultat cherché.

c. q. f. d.

<u>Théorème 8</u> : Pour tout opérateur $V : \mathcal{C}(S) \to L^1(\Omega,\mu)$, on a

$$K_{(2)}(V) \leq C \|V\| ,$$

$$K^{(2)}(V) \leq C \|V\|$$

où $C = \inf \{ \left(\frac{\gamma_p}{\gamma_1}\right)^{\frac{p}{p-2}} ; \; p>2\}$.

Il suffit de montrer la première inégalité (puis de l'appliquer à V^*).
En remplaçant V par V^{**}, on peut supposer que $V : L^\infty(\Omega',\mu') \to L^1(\Omega,\mu)$.
Supposons d'abord $L^\infty(\Omega',\mu')$ de dimension finie, donc $L^\infty(\Omega',\mu') = l^\infty_n$.
Alors V est de type $\leq p$ pour tout $p \geq 1$ (par exemple d'après le lemme 4 et le fait que l^∞_n et l^p_n sont isomorphes).
La proposition précédente donne alors le résultat.

Dans le cas général, soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_k \in L^\infty(\Omega',\mu')$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe des fonctions étagées $\psi_1,\ldots,\psi_k \in L^\infty(\Omega',\mu')$ telles que $\|\varphi_i-\psi_i\|_\infty \leq \varepsilon$

$(i = 1, \ldots, k)$

Donc

$$\left\| \left(|\varphi_1|^2 + \ldots + |\varphi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(|\psi_1|^2 + \ldots + |\psi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_\infty \leq \varepsilon \sqrt{k}$$

et

$$\left| \left(\|V\varphi_1\|^2 + \ldots + \|V\varphi_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\|V\psi_1\|^2 + \ldots + \|V\psi_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \leq \varepsilon \|V\| \sqrt{k} .$$

Soit Λ le sous-espace réticulé de $L^\infty(\Omega',\mu')$ engendré par $1,\psi_1,\ldots,\psi_k$. Alors Λ est un espace L^∞ de dimension finie, et on a $V : \Lambda \to L^1(\Omega,\mu)$. D'après ce qu'on vient de voir, on a

$$\left(\|V\psi_1\|^2 + \ldots + \|V\psi_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|V\| \left\| (\psi_1^2 + \ldots + \psi_n^2)^{\frac{1}{2}} \right\| .$$

Donc

$$\left(\|V\varphi_1\|^2 + \ldots + \|V\varphi_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|V\| \left\| (\varphi_1^2 + \ldots + \varphi_n^2)^{\frac{1}{2}} \right\| + \varepsilon \sqrt{k} + \varepsilon \|V\| \sqrt{k}$$

D'où le résultat puisque ε est > 0 arbitraire.

c. q. f. d.

L'inégalité de Grothendieck se déduit aisément de ce théorème : si $U : \mathcal{C}(S) \to L^1(\Omega,\mu)$, d'après le théorème 8 et le corollaire 1, U admet la factorisation $\mathcal{C}(S) \xrightarrow{h} L^2(\Omega',\mu') \xrightarrow{U'} L^1(\Omega,\mu)$, $\|h\| = 1$, $\|U'\| \leq C \|U\|$, h étant un homomorphisme.

Soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in \mathcal{C}(S)$ et $x_i = h\varphi_i$. D'après la proposition 5, appliquée à U' avec $p = 2$ (tout opérateur défini sur un espace de Hilbert est de type ≤ 2), on a

$$\left\| \left(|U'x_1|^2 + \ldots + |U'x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\| (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \right\| \|U'\| .$$

Or $U'x_i = U\varphi_i$, et, d'autre part,

$$\left\| (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \right\| = \left\| \left(|h\varphi_1|^2 + \ldots + |h\varphi_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\| = \left\| h\left(|\varphi_1|^2 + \ldots + |\varphi_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|$$

(car h est un homomorphisme)

$$\leq \left\| \left(|\varphi_1|^2 + \ldots + |\varphi_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\| .$$

On en déduit $\|(|U\varphi_1|^2+\ldots+|U\varphi_n|^2)^{\frac{1}{2}}\| \leq C\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \|U\|\ \|(|\varphi_1|^2+\ldots+|\varphi_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|$.

Notons d'autres applications du théorème 7. Si U est un opérateur d'un espace de Banach E dans un $\mathbb{R}$-treillis complet L, la fonction $K^{(p)}(U)$ étant une fonction log-convexe et décroissante de $\frac{1}{p}$ entre 0 et 1 est donc continue en tout point p au voisinage duquel elle est finie (y compris p=1). Soient alors E un sous-espace de L^p $(1 \leq p < 2)$ et U l'application identique de E dans L^p ; si $K^{(p')}(U) < +\infty$ pour un $p' > p$ (ce qui, d'après un théorème de Rosenthal [5] équivaut à dire que E ne contient pas de sous-espace isomorphe à l^p), alors $K^{(q)}(U) \to K^{(p)}(U) = 1$ quand q tend en décroissant vers p.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc $q > p$ tel que U admette la factorisation $E \xrightarrow{U'} L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{h} L^p$, $\|U'\| \leq 1+\varepsilon$, $\|h\| = 1$. Autrement dit, on a une légère amélioration du résultat de Rosenthal :

<u>Si $1 \leq p < 2$ et si E est un sous-espace de L^p, ou bien pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace X de E tel que $d(X,l^p) \leq 1+\varepsilon$, ou bien pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q > p$ et un sous-espace Y de L^q tel que $d(E,Y) \leq 1+\varepsilon$</u>.

Pour $1 \leq p,\ q \leq 2$, on peut définir $K(p,q) = \sup\{K^{(q)}(U)\ ;\ U : L^\infty \to L^p,\ \|U\| \leq 1\}$; on a $1 \leq K(p,q) \leq K_G$ et $K(p,q)$ est une fonction log-convexe décroissante de $\frac{1}{q}$, donc continue.

Comme $K(p,p) = 1$, on a montré que :

<u>Pour tout p, $1 \leq p < 2$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe q, $p < q \leq 2$ tel que tout opérateur $U : L^\infty \to L^p$ admette la factorisation $L^\infty \xrightarrow{U'} L^q \xrightarrow{h} L^p$ avec $\|U'\| \leq (1+\varepsilon)\ \|U\|$, $\|h\| = 1$, h étant un homomorphisme fort</u>.

*
***

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. KAKUTANI : Concrete representation of abstract L-spaces et Concrete representations of abstract M-spaces. Annals of Math. (42) 1941 p. 523-537 et p. 994-1024.

[2] B. MAUREY : Séminaire Maurey-Schwartz 1972-1973, exposés XV, XVII, XXII.

[3] H. NAKANO : Über normierte teilwesgeorgnete Moduln. Proc. Imp. Acad. Tokyo 17 (1941) p. 301-307.

[4] J. BRETAGNOLLE, D. DACUNHA-CASTELLE, J.L. KRIVINE : Lois stables et espaces L^p. Ann. Inst. H. Poincaré 2(1966) p. 231-259.

[5] H.P. ROSENTHAL : On subspaces of L^p. Ann. of Math. Vol 97 n°2 (1973) p. 344-373.

****