

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

D. DACUNHA-CASTELLE

Variables aléatoires échangeables et espaces d'Orlicz (suite)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 11, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975__A10_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

VARIABLES ALEATOIRES ECHANGEABLES ET ESPACES D'ORLICZ
(suite)

par D. DACUNHA-CASTELLE

Exposé N^o XI

29 Janvier 1975

Un R-espace est un espace de Banach réticulé tel que

1. $0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$ et $x \neq y \Rightarrow \|x\| < \|y\|$
2. $\| |x| \| = \|x\|$
3. Toute suite d'éléments > 0 , décroissante est convergente.

Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de R-espaces et \mathfrak{D} un ultrafiltre sur I .

L'ultraproduit $\prod_{i \in I} B_i / \mathfrak{D}$ est alors [1] un R-espace pour l'ordre $(f_i)_{i \in I} \geq (g_i)_{i \in I}$

si $f_i \geq g_i \mathfrak{D}$ p p .

L_F désigne l'espace d'Orlicz $L_F[(0,1)]$, où $(0,1)$ est muni de la mesure de Lebesgue et F est une fonction d'Orlicz convexe modérée (voir exposé précédent).

On pose $\psi(f) = \int F(f)$ pour $f \in L_F$.

Sur $L_F^{\mathbb{N}/\mathfrak{D}}$, où \mathfrak{D} est un ultrafiltre sur \mathbb{N} , fixé une fois pour toutes (et non trivial), on pose

$$\psi((f_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{\mathfrak{D}} \psi(f_n)$$

L_F étant un R-espace, il en est de même de ses ultrapuissances.

Soit $\mathcal{A}_1 = \{(1_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}, A_n \text{ borélien}\}$.

Posons $P_1(f) = \lim_{\mathfrak{D}} P(A_n)$, si $f = (1_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

On a alors défini une mesure additive P_1 sur l'anneau \mathcal{A}_1 . Comme P_1 est σ -additive, alors le complété $\overline{\mathcal{A}}_1$ de \mathcal{A}_1 dans $L_F^{\mathbb{N}/\mathfrak{D}}$ est un σ -anneau sur lequel P_1 est σ -additive.

$(\overline{\mathcal{A}}_1, P_1)$ sera interprété comme une probabilité sur une σ -algèbre isomorphe au quotient d'une σ -algèbre de parties d'un ensemble par le σ -idéal des éléments P_1 -nuls, ou simplement comme une σ -algèbre des parties d'un ensemble Ω_1 .

Soit alors R'_1 l'espace vectoriel des éléments étagés sur $(\Omega_1, \overline{\mathcal{A}}_1, P_1)$.

Lemme 1 : Le complété de R'_1 est l'espace R_1 engendré par $\{(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (F(f_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ équiintégrable}\}$.

En effet, notant g^K la variable tronquée $g \cdot 1_{(|g| < K)}$; si (f_n) est équi-intégrable, $\|f_n - f_n^K\| < \varepsilon$, ε fixé, K assez grand.

Fixons m , $2^{-m} \leq \varepsilon$, $A_{jn} = \left\{ \frac{j}{2^m} \leq f_n < \frac{j+1}{2^m} \right\}$ pour $|j| \leq 2^m \cdot K$.

Si $f_{n,m} = \sum_j \frac{j}{2^m} 1_{A_{jn}}$, on a $\|f_{n,m} - f_n^K\| < \varphi(\varepsilon)$

(où φ est une fonction continue convexe, $\varphi(0) = 0$ définie à partir de

$\sup_{\lambda} \frac{F(\lambda x)}{F(\lambda)}$, cf. [1]),

et donc

$$\| (f_n) - \sum_j \frac{j}{2^m} (1_{A_{jn}})_{n \in \mathbf{N}} \| \leq \varepsilon + \varphi(\varepsilon) ,$$

d'où le lemme.

$$\begin{aligned} \text{Sur } R_1', \text{ on a } \psi(\sum_j \lambda_j (1_{A_{jn}})_{n \in \mathbf{N}}) &= \sum F(\lambda_j) \lim_n P(A_{jn}) \\ &= \sum F(\lambda_j) P_1((A_{jn})_{n \in \mathbf{N}}) \\ &= \sum F(\lambda_j) P_1(A_j) \end{aligned}$$

si $(A_{jn})_{n \in \mathbf{N}} = A_j$. Donc $R_1 = L_F(\Omega_1, \mathcal{C}_1, P_1)$.

Soit S_1 l'ensemble des éléments étrangers à R_1 .

Lemme 2 : On a
$$\begin{aligned} L_F^{\mathbf{N}/\mathfrak{D}} &= R_1 \oplus S \\ &= L_F(\Omega_1, \mathcal{C}_1, P_1) \oplus S \end{aligned}$$

En effet, soit $x = y + z$, $y \in R_1$, $0 < y < x$, et $\psi(y)$ maximal parmi toutes les valeurs obtenues dans de telles décompositions. Supposons $z = y' + z'$ avec $0 < y' \leq z'$ et $y' \in R_1$. D'après la propriété 1. des R -espaces, on aurait $\psi(y + y') > \psi(y)$ ce qui est impossible. Donc z est étranger aux éléments ≥ 0 de R_1 donc à R_1 d'où le lemme.

Lemme 3 : Soit $(f_1) = (f_1^n)_{n \in \mathbf{N}} \dots, f_k = (f_k^n)_{n \in \mathbf{N}}$ des éléments de $L_F(\Omega_1, \mathcal{C}_1, P_1)$. Soit π_n, π les lois (sur \mathbb{R}^k) de (f_1^n, \dots, f_k^n) et (f_1, \dots, f_k) . Alors $\pi = \lim_{\mathfrak{D}} \pi_i$ (pour la convergence étroite).

En effet, soit \mathcal{T} le \mathbb{R} -espace vectoriel réticulé de fonctions réelles sur \mathbb{R}^k , engendré par les fonctions $1, x_1, \dots, x_k$; si $\tau(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{T}$, on a $\tau(f_1, \dots, f_k) = (\tau(f_1^n, \dots, f_k^n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$, parce que l'ultraproduit est compatible avec les opérations de treillis et d'espace vectoriel et que $1_{\Omega} = (1_{\Omega_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Il en résulte que si $F \circ \tau$ est intégrable, on a

$$\int F(\tau(f_1, \dots, f_k)) dP_1 = \lim_{\mathcal{D}} \int F(\tau(f_1^n, \dots, f_k^n)) dP$$

Or le sous-espace \mathcal{T}_b de \mathcal{T} , formé des fonctions bornées de \mathcal{T} est dense dans $C(\mathbb{R}^k \cup \{\infty\})$ (ou $\mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ est le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R}^k), puisque c'est un sous-espace réticulé séparant les points.

En considérant des fonctions bornées ψ de la forme $F^{-1} \circ \varphi$, φ bornée, on obtient le lemme 3.

Soit B_0 un \mathbb{R} -espace (ou simplement un Banach) et $B_1, \dots, B_k \dots$ les ultrapuissances successives de B_0 , $B_1 = B_0^{\mathbb{N}/\mathcal{D}}$, \dots , $B_k = B_{k-1}^{\mathbb{N}/\mathcal{D}}$ \dots .

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B , ne contenant aucune sous-suite convergente.

Si $x \in E_{k-1}$, on note $J_{k-1,k}(x)$ l'image de x dans l'injection canonique $E_{k-1} \rightarrow E_k$, $J_{k-1,k}(x) = ((x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n = x$ pour tout n .

On note $J_{h,k}$ l'injection canonique $B_h \rightarrow B_k$, $J_{h,k} = J_{k-1,k} \circ \dots \circ J_{h,h+1}$, $h = 0, 1, \dots, k = 0, 1, \dots, h \leq k$ (les $J_{h,k}$ sont des isométries de \mathbb{R} -espaces).

Définition : La suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $e_k = (J_{0,k-1} f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle suite d'indiscernables construite au-dessus de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On peut considérer $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ comme une suite de $\prod_{k \in \mathbb{N}} B_k^{\mathcal{D}}$.

Définition : Un terme de degré k d'un \mathbb{R} -espace est une expression $\tau(1, f_1, \dots, f_k)$ où $\tau(1, x_1, \dots, x_k)$ est un élément de l'espace vectoriel réticulé (sur \mathbb{R}) engendré par les k -variables x_1, \dots, x_k .

Définition : On dit qu'une suite d'éléments $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'un \mathbb{R} -espace (resp. d'un Banach) est écartable au-dessus d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si pour tout k ,

tout h , tout terme τ de degré $k+h$ (resp. toute combinaison linéaire de $k+h$ éléments), tout $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, on a

$$\|\tau(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_h)\| = \|\tau(e_{n_1}, \dots, e_{n_k}, f_1, \dots, f_h)\|$$

$$\text{(resp. } \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_h f_h\| = \|\lambda_1 e_{n_1} + \dots + \lambda_k e_{n_k} + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_h f_h\| \text{)}$$

On notera x tout élément $J_{h,k}(x)$ quelque soit h et k , il n'y a pas de confusion possible .

Lemme 4 : La suite d'indiscernables $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ construite au-dessus de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est formée d'éléments distincts, et est écartable au-dessus de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Démonstration : On note donc f_n par $J_{0,k}(f_n)$, par exemple,

$$\|\tau(e_{n_1}, f_1, \dots, f_h)\|_{B_{n_1}} = \|\tau(e_1, f_1, \dots, f_h)\|_{B_1}$$

En effet, les 2 quantités sont respectivement :

$$\lim_{n, \mathfrak{D}} \|\tau(J_{0,n_1}(f_n), f_1, \dots, f_h)\|_{B_{n_1}} = \lim_{n, \mathfrak{D}} \|\tau(f_n, f_1, \dots, f_h)\|_{B_0}$$

$$\text{et } \lim_{n, \mathfrak{D}} \|\tau(J_{0,1}(f_n), f_1, \dots, f_h)\|_{B_1} = \lim_{n, \mathfrak{D}} \|\tau(f_n, f_1, \dots, f_h)\|_{B_0}$$

Montrons alors par récurrence sur k que pour tout τ , tout h , on a

$$\|\tau(e_{n_1}, \dots, e_{n_k}, f_1, \dots, f_h)\|_{B_{n_k}} = \|\tau(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_h)\|_{B_k}$$

quels que soient $n_1 < \dots < n_k$.

$$\|\tau(e_{n_1}, \dots, e_{n_k}, f_1, \dots, f_h)\|_{B_{n_k}} = \lim_{\mathfrak{D}} \|\tau(e_{n_1}, \dots, e_{n_{k-1}}, f_n, f_1, \dots, f_h)\|_{B_{n_{k-1}}}$$

(par définition et parce que J_{n_k-1, n_k} est une isométrie)

$$= \lim_{\mathfrak{D}} \|\tau(e_1, \dots, e_{k-1}, f_n, f_1, \dots, f_h)\|_{B_{k-1}}$$

(par hypothèse de récurrence)

$$= \|\tau(e_1, \dots, e_{k-1}, e_k, f_1, \dots, f_h)\|_{B_k}$$

par définition (on utilise à chaque étape la compatibilité de l'ultra-puissance et de la structure de R-espace).

Enfin

$$\|e_i - e_j\| = \|e_1 - e_2\| \quad \text{si } i < j$$

$$= \lim_{m, \mathfrak{D}} \lim_{m, \mathfrak{D}} \|f_n - f_m\|_{B_0}$$

$\neq 0$ puisque $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne contient pas de sous-suite convergente.

Passons maintenant au cas des espaces d'Orlicz. On a de plus

Lemme 5 : La suite $(e_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est ψ -écartable au-dessus de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, c'est-à-dire

$$\psi(\tau(e_{n_1}, \dots, e_{n_k}, f_1, \dots, f_h)) = \psi(\tau(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_h))$$

pour tous $\tau, k, h, n_1 < n_2 < \dots < n_k$, où $\psi(f_n)_{n \in \mathbf{N}} = \lim_{\mathfrak{D}} \psi(f_n)$ permet de définir

ψ sur tous les espaces B_k , si $B_0 = L_F$. La démonstration de ce lemme est la même que celle du précédent, ψ remplaçant $\|\cdot\|$.

(C'est une propriété plus forte dans le cas des Orlicz que l'écartabilité pour la norme).

Considérons les ultrapuissances B_k de $L_F(\Omega, \mathcal{C}, P) = B_0$.

On a vu que $B_1 = R_1 \oplus S_1$, $R_1 = L_F(\Omega_1, \mathcal{C}_1, P_1)$.

On a de même $R_1^{\mathbb{N}/\mathfrak{D}} = L_F(\Omega_2, \mathcal{C}_2, P_2) \oplus S'_2$

$$= R_2 \oplus S'_2 .$$

Posant $S_2 = S'_2 \oplus S_1^{\mathbb{N}/\mathfrak{D}}$, on a $B_2 = R_2 \oplus S_2$.

On voit par induction que $B_k = R_k \oplus S_k$ où $R_k = L_F(\Omega_k, \mathcal{O}_k, P_k)$
 $R_{k-1}^{\mathbb{N}/\mathcal{D}} = R_k \oplus S'_k$
 $S_k = S'_k \oplus S_{k-1}^{\mathbb{N}/\mathcal{D}}$

De plus, il s'agit d'une ψ -somme directe, c'est-à-dire si $x \in B_k$, $x = y+z$,
 $y \in R_k$, $z \in S_k$, alors $\psi(x) = \psi(y) + \psi(z)$.

Lemme 6 : On a $J_{h,k}(R_h) \subset R_k$ pour tout h, k , et en particulier $(\mathcal{O}_{k-1}, P_{k-1})$
est une sous σ -algèbre mesurée de (\mathcal{O}_k, P_k) . Ce lemme est immédiat et montre
en particulier que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équiintégrable sur (\mathcal{O}, P) $(J_{o,k}(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$
est équiintégrable sur (\mathcal{O}_k, P_k) .

On note $(\mathcal{O}_\infty, P_\infty) = \bigvee_n (\mathcal{O}_n, P_n)$. Nous aurons besoin du lemme général suivant
sur les R-espaces.

Lemme 7 : Soient $(g_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (g_n^\ell)_{n \in \mathbb{N}}$ ℓ suites d'un R-espace B_o , et soient
 $(e_k^1)_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (e_k^\ell)_{k \in \mathbb{N}}$ les indiscernables construits respectivement au-dessus
de ces suites. Soit $u_n = \tau(g_n^1, \dots, g_n^\ell)$ un terme de B_o , alors la suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$
des indiscernables construits au-dessus de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée par
 $t_k = \tau(e_k^1, \dots, e_k^\ell)$, $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration : $J_{o,k}$ est une isométrie de R-espace, donc

$$\tau(J_{ok}(g_n^1), \dots, J_{ok}(g_n^\ell)) = J_{ok}(\tau(g_n^1, \dots, g_n^\ell))$$

On a alors en revenant aux espaces d'Orlicz

$$e_1 = r_1 + s_1, \quad r_1 \in R_1, \quad s_1 \in S_1$$

d'où une décomposition (non unique) de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = (g_n)_{n \in \mathbb{N}} + (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(g_n)_{n \in \mathbb{N}} = r_1, \quad (h_n)_{n \in \mathbb{N}} = s_1$$

$(r_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(s_k)_{k \in \mathbf{N}}$ désignant les indiscernables au-dessus de $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on a, d'après le lemme 7, $e_k = r_k + s_k$ et

- Lemme 8 :
1. $r_i \cap s_j = 0 \quad i, j \in \mathbf{N}$
 2. $(r_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires échangeables dans $(\mathcal{O}_\infty, P_\infty)$
 3. $s_i \cap s_j = 0, i \neq j$, et les (s_i) engendrent dans $\prod_{k \in \mathbf{N}} B_k / \mathcal{D}$ un espace d'Orlicz \mathcal{L}_f .

Démonstration : 1) Si $i = j$, $\|r_i \cap s_i\| = \|r_1 \cap s_1\|$, (écartabilité et lemme)
 $= 0$

$$\text{Si } i < j, \quad \|r_i \cap s_j\| = \lim_n \lim_m \|g_n \cap h_m\|$$

Or $\lim_m \|g_n \cap h_m\| = 0$ car $(h_m)_{m \in \mathbf{N}} \in S_1$

on a $\lim_m \|g \cap h_m\| = 0$ pour tout $g \in L_F$.

$$\begin{aligned} \text{Si } i > j, \quad \|r_i \cap s_j\| &= \|r_2 \cap s_1\| \\ &= \lim_n \|g_n \cap s_1\| \\ &= 0 \quad \text{car } (g_n)_{n \in \mathbf{N}} \in R_1. \end{aligned}$$

2) Les variables $(r_k)_{k \in \mathbf{N}}$ sont d'après le lemme des indiscernables au sens des variables aléatoires puisque $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est équiinté-grable. 2) résulte alors de l'exposé précédent.

$$3) \text{ On a } \lim \|h_{n_0} \cap h_n\| = 0 \text{ puisque } (h_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S_1.$$

On a $\psi(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) = \lim \psi(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 h_n)$

et $s_1 \cap h_n = 0$ puisque $J_{0,1}(h_n) \in R_1$

donc
$$\psi(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 h_n) = \psi(\lambda_1 s_1) + \psi(\lambda_2 h_n)$$

Le même argument montre par induction que $\psi(\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k) = \psi(\lambda_1 s_1) + \dots + \psi(\lambda_k s_k)$.

Mais les variables (s_k) sont ψ -écartables.

Donc $\psi(\lambda s_i)$ est indépendant de i et vaut $f(\lambda)$. La convexité de ψ implique celle de f . f est donc une fonction d'Orlicz tempérée parce que ψ est tempérée, d'où 3.

Nous sommes alors en mesure d'énoncer un certain nombre de résultats.

Proposition 1 : $\sum c_i e_i$ converge dans $\prod B_k/\mathbb{D}$ si et seulement si $\sum c_i r_i$ et $\sum c_i s_i$ convergent.

Proposition 2 : Si E est un sous-espace de dimension infinie d'un espace L_F , alors il existe un espace du type $\ell_f \cap [Y_n]_F$, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables échangeables et signe-invariantes (entendu au sens topologique des suites $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergent dans ℓ_f et $[Y_n]_F$) qui se représente finiment dans E .

Proposition 2 bis : Si la boule unité E_0 de E est telle que $\{F(\xi), \xi \in E_0\}$ est équiintégrable alors il existe un espace $[Y_n]_F$ qui se représente finiment dans E .

Si la boule unité E_0 de E n'est pas équiintégrable, il existe un espace d'Orlicz ℓ_f qui se représente dans E , avec $f(\lambda)$ de la forme $\int_0^\infty F(\lambda x) dH(x)$.

Théorème 1 : Si B est un espace à base symétrique qui est isomorphe à un à un sous-espace de L_F , alors B est isomorphe à un espace du type $[Y_n]_F \cap \ell_f$ au sens de la proposition 2.

Démonstration : a) Le théorème 1 est évident si on remarque que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant la base symétrique d'un espace de Banach, alors

$$\left\| \sum_1^N \lambda_k f_k \right\| = \left\| \sum_1^N \lambda_k \ell_k \right\| ,$$

$(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}}$ étant les indiscernables construits sur $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) On sait que $B^{\mathbb{N}/\mathcal{D}}$ est finiment représentable dans B .
 Donc $\prod_{k \in \mathbb{N}} B_k/\mathcal{D}$ est finiment représentable dans B_0 .

La seule chose à montrer est que les indiscernables peuvent être construits signe-invariants. Donc, au lieu de prendre les indiscernables sur une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on prend la suite $e'_n = (e_n - e_{n-1})$ qui donne les propositions 2 et 2 bis quand on la décompose en r_k et s_k .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Dacunha-Castelle et Krivine : Application des ultraproducts à l'étude des espaces et des algèbres de Banach. *Studia Math.* t41 1972 p. 315-334.
