

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. ASSOUD

Espaces p -lisses. Réarrangements

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 16, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975__A15_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

ESPACES p -LISSES

REARRANGEMENTS

par P. ASSOUAD

Exposé N° XVI

12 Mars 1975

Notations. Soient E un espace de Banach réflexif, (Ω, \mathcal{O}, P) un espace de probabilité, $n \in \mathbf{N}$, Y_1, \dots, Y_n une suite finie de v.a. intégrables à valeurs dans E . Si A est une partie de $\{1, \dots, n\}$, on pose $X(A) = \sum_{j \in A} Y_j$ et $\nu(A) = \text{Card } A$

et on note $\mathcal{O}(A)$ une tribu rendant mesurables les v.a. $X(B) \quad \forall B \supset A$.

Définitions : 1) Y_1, \dots, Y_n sont dites échangeables (resp. écartables) si pour tout $r \leq n$ et pour toute injection (resp. injection croissante) $i \rightarrow j_i$ de $\{1, \dots, r\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ les v.a. (Y_1, \dots, Y_r) et $(Y_{j_1}, \dots, Y_{j_r})$ ont même loi.

2) (Y_1, \dots, Y_n) appartient à D (relativement à la famille décroissante de tribus $A \rightarrow \mathcal{O}(A)$) si pour tout couple d'intervalles non vides (A, B) , $A \subset B$ on a $E\left(\frac{X(A)}{\nu(A)} \mid \mathcal{O}(B)\right) = \frac{X(B)}{\nu(B)}$.

Exemples : a) Soit y_1, \dots, y_n des éléments de E . Soit (Ω, \mathcal{O}, P) l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ muni de la loi uniforme. On pose $Y_j(\omega) = y_{\omega(j)}$. Alors Y_1, \dots, Y_n sont échangeables.

b) Soit Y_1, \dots, Y_n échangeables. Soit $Y'_j = Y_j - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$.

Alors Y'_1, \dots, Y'_n sont échangeables.

c) Soit Y_1, \dots, Y_n écartables (resp. échangeables) avec $\sum_{j=1}^n Y_j = 0$.

Soit $\mathcal{O}(A)$ la tribu engendrée par $(Y_j)_{j \notin A}$ (resp. des événements symétriques en $(Y_j)_{j \in A}$).

Alors (Y_1, \dots, Y_n) appartient à D (relativement aux $\mathcal{O}(A)$).

En effet, soit $A \subset B$ deux intervalles de $\{1, \dots, n\}$. Comme (Y_1, \dots, Y_n) sont écartables (resp. échangeables), on a :

$$\forall i \in B, j \in B \quad E(Y_i - Y_j \mid \mathcal{O}(B)) = 0$$

Par combinaison linéaire, on trouve $E\left(\frac{X(A)}{\nu(A)} - \frac{X(B)}{\nu(B)} \mid \mathcal{O}(B)\right) = 0$.

Enfin $\frac{X(B)}{\nu(B)} = -\frac{1}{\nu(B)} \sum_{j \notin B} Y_j$ est $\mathcal{O}(B)$ mesurable. Cela donne le résultat.

Proposition 1 : Soit E un espace de Banach p -lisse, (Y_1, \dots, Y_n) une suite finie de v.a. à valeurs dans E , ϕ une fonction de Young à croissance modérée (c'est-à-dire $\exists r \frac{\phi(x)}{x}$), (a_1, \dots, a_n) des réels.

a) On suppose que Y_1, \dots, Y_n sont échangeables et que $\sum_{j=1}^n Y_j = 0$.

On a alors :

$$(i) \quad E\phi \left(\sup_{i=1, \dots, n} \left\| \sum_{j=1}^i Y_j \right\| \right) \leq C_5 E\phi \left(\sum_{j=1}^n \|Y_j\|^p \right)^{1/p}$$

b) On suppose que Y_1, \dots, Y_n sont échangeables et ϕ est convexe (resp. (Y_1, \dots, Y_n) appartient à D et $\phi(x) = x^p$) et que $\sum_{j=1}^n Y_j = 0$.

On a alors :

$$(ii) \quad E\phi \left(\sup_{i=1, \dots, n} \left\| \sum_{j=1}^i a_j Y_j \right\| \right) \leq c_6 E \left[\phi \left(\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \|Y_j\|^p \right)^{1/p} + \phi \left(\frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n \|Y_j\|^p \right)^{1/p} \right) \right]$$

(où c_5, c_6 ne dépendent que de E, p et ϕ).

Démonstration : 0) Soit $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}(\{i+1, \dots, n\})$ si (Y_1, \dots, Y_n) appartient à D (relativement aux $\mathcal{O}(A)$). Si Y_1, \dots, Y_n sont échangeables on a choisi les tribus $\mathcal{O}(A)$ comme dans l'exemple c), c'est-à-dire \mathcal{O}_i est la tribu engendrée par les évènements symétriques en Y_{i+1}, \dots, Y_n .

Soit $X_i = (Y_1 + \dots + Y_i) = (n-i) E(Y_n | \mathcal{O}_i)$. Comme $i \rightarrow (n-i)$ est décroissant $(X_i)_{i=0, \dots, n-1}$ est dans $d(\varepsilon, -)$ pour tout ε et on a :

$$X_0 = 0 \quad \Delta X_i = - Y_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$$

Soit $m \in \{1, \dots, n\}$ tel que $m \geq \frac{n}{3}$ $n-m \geq \frac{n}{3}$

(cela est possible en écartant $n=1$ ou 2 où la Proposition est évidente).

Soit $V_i = E(\sum_{j=1}^m a_j Y_j \mid \mathcal{O}_i)$ $(V_i)_{i=0, \dots, n-1}$ est une martingale

$$V_0 = 0 \quad V_i = \sum_{j=1}^i a_j Y_j + \frac{a_{i+1} + \dots + a_m}{n-i} X_i$$

$$\Delta V_i = (a_i - \frac{1}{n-i+1} \sum_{j=i}^m a_j) Y_i - (\frac{a_i}{n-i} - \frac{1}{(n-i)(n-i+1)} \sum_{j=i}^m a_j) X_i$$

Enfin on pose $b = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |a_j|$.

1) On suppose que Y_1, \dots, Y_n sont échangeables et que $\sum_{j=1}^n Y_j = 0$.

On a alors (i). En effet, on a :

$(X_i)_{i=0, \dots, n-1}$ est dans $d(\varepsilon, -)$ pour tout ε , $X_0 = 0$

$$\text{et} \quad \|\Delta X_i\| \leq (\sum_{j=1}^n \|Y_j\|^p)^{1/p} \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

Or $(\sum_{j=1}^n \|Y_j\|^p)^{1/p}$ est symétrique en Y_1, \dots, Y_n donc est \mathcal{O}_0 -mesurable.

Le résultat provient donc de la Proposition 2a de l'exposé précédent.

2) On se place dans les hypothèses de c). On a alors :

$$(i') \quad E(\sup_{i=1, \dots, m} \|\sum_{j=1}^i Y_j\|^p) \leq c_5^1 E(\sum_{j=1}^n \|Y_j\|^p)$$

En effet, on a :

$$\frac{n}{3} \|E(Y_n \mid \mathcal{O}_i)\| \leq \|X_i\| \leq n \|E(Y_n \mid \mathcal{O}_i)\| \quad \forall i \in \{0, \dots, m\}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(\sup_{i=0, \dots, m} \|X_i\|^p) &\leq n^p E(\sup_{i=0, \dots, m} \|E(Y_n \mid \mathcal{O}_i)\|^p) \\ &\leq (\frac{p}{p-1})^p n^p E(\|E(Y_n \mid \mathcal{O}_m)\|^p) \quad (\text{inégalité de Doob}) \\ &\leq (\frac{3p}{p-1})^p E\|X_m\|^p \end{aligned}$$

Comme $(X_i)_{i=0, \dots, n-1}$ est dans $d(\varepsilon, -)$ pour tout ε , le résultat provient de la Proposition 1 de l'exposé précédent.

3) On suppose Y_1, \dots, Y_n échangeables, ϕ convexe (resp. (Y_1, \dots, Y_n) appartient à D , $\phi(x) = x^p$). On suppose de plus $\sum_{j=1}^n Y_j = 0$.

On a alors :

$$(ii)' \quad E\phi\left(\sup_{i=1, \dots, m} \left\| \sum_{j=1}^i a_j Y_j \right\|\right) \leq c'_6 E\left[\phi\left(\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \|Y_j\|^p\right)^{1/p}\right) + \phi\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n \|Y_j\|^p\right)^{1/p}\right)\right]$$

On a en effet

$$\left\| \sum_{j=1}^i a_j Y_j \right\| \leq \|V_i\| + 3b \|X_i\| \quad \forall i \in \{0, \dots, m\}$$

et

$$\|\Delta V_i\| \leq |a_i| \|Y_i\| + 3b \|Y_i\| + \frac{3}{n} |a_i| \|X_i\| + \frac{9b}{n} \|X_i\| \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

Notons $A \prec B$ si $A \leq cB$ où c ne dépend que de E , p et ϕ .

Comme $\frac{\phi(x)}{x^p}$ décroît, on a $\phi(x+y) \prec \phi(x) + \phi(y) \quad \forall x, y$.

On a

$$E\phi\left(\sup_{i=1, \dots, m} \left\| \sum_{j=1}^i a_j Y_j \right\|\right) \prec E\left[\phi\left(\sup_{i=1, \dots, m} V_i\right) + \phi\left(b \sup_{i=1, \dots, n} \|X_i\|\right)\right]$$

L'application de (i) (resp. (i')) donne donc :

$$E\phi\left(b \sup_{i=1, \dots, n} \|X_i\|\right) \prec E\phi\left(b \left(\sum_{j=1}^n \|Y_j\|^p\right)^{1/p}\right)$$

Par ailleurs, la Proposition 2b de l'exposé précédent entraîne qu'on a :

$$\begin{aligned} & E\phi\left(\sup_{i=1, \dots, m} V_i\right) \prec E\phi\left(\left(\sum_{j=1}^m \|\Delta V_j\|^p\right)^{1/p}\right) \\ & \prec E\left[\phi\left(\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \|Y_j\|^p\right)^{1/p}\right) + \phi\left(b \left(\sum_{j=1}^n \|Y_j\|^p\right)^{1/p}\right) + \phi\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p} \sup_{i=1, \dots, n} \|X_i\|\right) \right. \\ & \quad \left. + \phi\left(\frac{b}{n} n^{1/p} \sup_{i=1, \dots, n} \|X_i\|\right)\right] \end{aligned}$$

Appliquant encore (i) (resp. (i')) et remarquant qu'on a :

$$\frac{b}{n} n^{1/p} \leq b \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{1/p}$$

on en déduit (ii)'

4) A partir de (ii)' on obtient (ii) en remarquant que

$$\sup_{i=1, \dots, n} \left\| \sum_{j=1}^i a_j Y_j \right\| \leq \sup_{i=1, \dots, m} \left\| \sum_{j=1}^i a_j Y_j \right\| + 2 \sup_{i=m+1, \dots, n} \left\| \sum_{j=i}^n a_j Y_j \right\|$$

(l'espérance du second terme s'évalue en retournant le temps)

Le corollaire 1 étend un résultat de Garsia [1] valable pour des v.a. échangeables réelles et $p=2$.

Corollaire 1 : Soit E un espace de Banach p-lisse, Y_1, \dots, Y_n des v.a. échangeables à valeurs dans E avec $\sum_{j=1}^n Y_j = 0$, a_1, \dots, a_n des réels.

Alors on a :

$$(iv) \quad E \left(\sup_{i=1, \dots, n} \left\| \sum_{j=1}^i a_j Y_j \right\|^p \right) \leq c_7 E \left(\frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right) \left(\sum_{j=1}^n \|Y_j\|^p \right) \right)$$

(où c_7 ne dépend que de E et de p).

Démonstration : Soit Ω' l'espace des permutations de $\{1, \dots, n\}$. On a

$$\begin{aligned} E \left(\sup_{i=1, \dots, n} \left\| \sum_{j=1}^i a_j Y_j \right\|^p \right) &= \frac{1}{n!} \sum_{\omega' \in \Omega'} E \left(\sup_{i=1, \dots, n} \left\| \sum_{j=1}^i a_j Y_{\omega'(j)} \right\|^p \right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\omega' \in \Omega'} E \left(\sup_{i=1, \dots, n} \left\| \sum_{j=1}^i a_{\omega'^{-1}(j)} Y_j \right\|^p \right) \\ &\leq c_6 E \left[\frac{1}{n!} \left(\sum_{\omega' \in \Omega'} \sum_{j=1}^n |a_{\omega'^{-1}(j)}|^p \|Y_j\|^p \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^p} \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right) \left(\sum_{j=1}^n \|Y_j\|^p \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{1}{n!} \sum_{\omega \in \Omega^n} \sum_{j=1}^n |a_{\omega^{-1}(j)}|^p \|Y_j\|^p = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right) \left(\sum_{j=1}^n \|Y_j\|^p \right)$$

Cela donne le résultat.

Corollaire 2 : Soit E un espace de Banach p-lisse, y_1, \dots, y_n des éléments de E avec $\sum_{j=1}^n y_j = 0$. On suppose qu'il existe des constantes $A, B \in]0, \infty[$ telles que :

$$\forall \omega \text{ permutation de } \{1, \dots, n\} \quad \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

$$A \left\| \sum_{j=1}^n a_j y_j \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^n a_j y_{\omega(j)} \right\| \leq B \left\| \sum_{j=1}^n a_j y_j \right\|$$

On a alors :

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad \left\| \sum_{j=1}^n a_j y_j \right\| \leq K \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{1/p} \|y_1\|$$

(où K ne dépend que de E, p, A, B)

Démonstration : On applique le corollaire 1 aux v.a. de l'exemple a).

La proposition 2 relie ce qui précède avec la notion de type p-Rademacher.

Proposition 2 : Soit E un espace de Banach, soit $p \in]1, 2]$.

On suppose qu'il existe $K < \infty$ tel que pour toute v.a. Y_1, \dots, Y_n échangeables à valeurs dans E et de somme nulle, on ait :

$$\sup_{i=1, \dots, n} \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^i Y_j \right\|^p \leq K \mathbb{E} \sum_{j=1}^n \|Y_j\|^p$$

Alors E est de type p-Rademacher.

Démonstration : Soit $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ des v.a. de Bernouilli (ou de Rademacher) indépendantes et y_1, \dots, y_n des éléments de E avec $\sum_{j=1}^n y_j = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
 E \left\| \sum y_j \sigma_j \right\|^p &= \frac{1}{2^n} \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} \left\| \sum_{j \in A} y_j - \sum_{j \notin A} y_j \right\|^p \\
 &= 2^p \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^n \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} \left\| \sum_{j \in A} y_j \right\|^p \\
 &= 2^p \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} E \left\| \sum_{j=1}^i Y_j \right\|^p
 \end{aligned}$$

où les v.a. Y_j sont construites comme dans l'exemple a).

On a donc :

$$E \left\| \sum y_j \sigma_j \right\|^p \leq 2^p K \sum_{j=1}^n \|y_j\|^p$$

Pour se débarrasser de la restriction $\sum_{j=1}^n y_j = 0$, on applique l'inégalité obtenue à la suite $y_1, \dots, y_n, -y_1, \dots, -y_n$, ce qui donne le type p pour des variables $\sigma - \sigma'$ (σ, σ' Bernoulli indépendantes) et donc (cf. [2]) le type p -Rademacher.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Garsia : Topics in almost everywhere convergence (Chicago) 86-97
 [2] Pisier G. : Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974, exposé N° 3.
