

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

Le problème des 3 espaces : un contre-exemple de J. Lindenstrauss

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 17, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975__A16_0

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

LE PROBLEME DES 3 ESPACES :

UN CONTRE-EXEMPLE DE J. LINDENSTRAUSS

par G. PISIER

Exposé N^o XVII

19 Mars 1975

§ 1. INTRODUCTION

Soient X un espace de Banach et Y un sous-espace fermé de X , on peut considérer un troisième espace de Banach : X/Y muni de la norme quotient. Une forme générale du "problème des 3 espaces" est alors : étant donnée une propriété \mathcal{P} , si deux des trois espaces précédents ont la propriété \mathcal{P} , que peut-on dire du troisième ?

Il va sans dire que, suivant la propriété \mathcal{P} , le problème est plus ou moins intéressant. Le cas qui nous intéressera ici est celui où l'on suppose que Y et X/Y ont la propriété considérée, et l'on demande si X l'a aussi. Par exemple (cf. [1] II.4, p. 19-20) il est facile de voir que si Y et X/Y sont réflexifs, alors X est aussi réflexif.

Giesy ([3] th. II.9) a montré que si ℓ_1 n'est finiment représentable ni dans Y ni dans X/Y alors il ne l'est pas non plus dans X . Par ailleurs (cf. [2]) si Y et X/Y sont super-réflexifs, alors X l'est aussi.

Stegall ([6] cor. 6) a montré que si les duaux Y^* et $(X/Y)^*$ ont la propriété de Radon Nikodym, alors le dual X^* l'a aussi. La difficulté de ce type de problème est évidemment due à ce que Y n'est pas nécessairement complété (c'est-à-dire : n'est pas nécessairement l'image d'une projection linéaire bornée de X dans X), donc X n'est pas nécessairement linéairement homéomorphe à $Y \times X/Y$!

Le problème central (dû à Palais) a longtemps été : si Y et X/Y sont chacun isomorphes à un espace de Hilbert, est-ce que X l'est aussi ? J. Lindenstrauss a récemment résolu par la négative ce problème en prouvant le

Théorème [2] : Il existe un espace de Banach \mathcal{X} qui n'est pas isomorphe à un espace de Hilbert mais qui a un sous-espace \mathcal{Y} tel que \mathcal{Y} et \mathcal{X}/\mathcal{Y} sont chacun isométriques à un espace de Hilbert.

On trouvera néanmoins dans [2] des résultats qui prouvent que \mathcal{X} n'est pas loin d'être un espace de Hilbert et qui expliquent peut-être les estimations "logarithmiques" qui apparaissent dans la démonstration du théorème.

Notations : L'espace ℓ_n^2 désigne l'espace \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne. Pour alléger les notations, toutes les normes euclidiennes seront notées simplement $\| \cdot \|$; dans le cas général, on notera $\| \cdot \|_X$ la norme dans l'espace de Banach X . Enfin, pour toute suite d'espaces de Banach $(\mathcal{X}_n)_{n \geq 1}$, on note $\left(\sum_{n \geq 1} \mathcal{X}_n \right)_p$ (avec $1 \leq p < \infty$) l'espace de Banach formé des suites $(x_n)_{n \geq 1}$ avec $x_n \in \mathcal{X}_n$ pour chaque $n \geq 1$ et normé par $(x_n)_{n \geq 1} \rightarrow \left(\sum_{n \geq 1} \|x_n\|^p \right)^{1/p}$.

§ 2. DEMONSTRATION DU THEOREME

Pour commencer, nous allons "transformer" le problème : Soit B_n l'ensemble des fonctions continues f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^{n^2} vérifiant

$$\alpha) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

$\beta)$ Pour toute famille finie (x_i) d'éléments de \mathbb{R}^n tels que $\sum x_i = 0$, on a :

$$\| \sum f(x_i) \| \leq \sum \|x_i\| .$$

On peut associer à une telle fonction f un espace de Banach X_f de la manière suivante : On considère dans \mathbb{R}^{n+n^2} l'enveloppe convexe fermée \mathcal{C}_f de l'ensemble des points $(x, f(x))$ et $(0, y)$ quand x décrit la boule euclidienne de \mathbb{R}^n et y celle de \mathbb{R}^{n^2} ; on peut définir X_f comme \mathbb{R}^{n+n^2} avec pour norme la jauge de \mathcal{C}_f . Autrement dit X_f est défini de sorte que \mathcal{C}_f soit sa boule unité. On voit facilement que l'on peut écrire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}, \quad \|(x, y)\|_{X_f} = \inf \{ \sum \|x_\alpha\| + \sum \|y_\beta\| \}$$

où l'infimum porte sur les familles finies (x_α) et (y_β) respectivement de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^{n^2} telles que $\sum_{\alpha} (x_\alpha, f(x_\alpha)) + \sum_{\beta} (0, y_\beta) = (x, y)$.

Nous poserons $Y_f = \{ (0, y) \in X_f \mid y \in \mathbb{R}^{n^2} \}$.

Le lemme suivant justifie l'introduction de ce point de vue :

* que l'on va identifier à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$.

Lemme 1 : Soit f une fonction dans B_n . Alors X_f/Y_f et Y_f sont isométriques respectivement à ℓ_n^2 et ℓ_n^2 .

Démonstration : Le premier point est presque évident : si, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, on note \dot{x} l'image de $(x,0)$ par la surjection canonique de X_f sur X_f/Y_f , on a :

$$\begin{aligned} \|\dot{x}\|_{X_f/Y_f} &= \inf_{(0,y) \in Y_f} \|(x,y)\|_{X_f} \\ &= \inf_{(0,y) \in Y_f} \inf \left\{ \sum_{\alpha} \|x_{\alpha}\| + \sum_{\beta} \|y_{\beta}\| \mid \sum_{\alpha} (x_{\alpha}, f(x_{\alpha})) + \sum_{\beta} (0, y_{\beta}) = (x,y) \right\} \\ &= \inf_{\sum_{\alpha} x_{\alpha} = x} \inf_{y \in \mathbb{R}^{n^2}, \sum_{\beta} y_{\beta} = y - \sum_{\alpha} f(x_{\alpha})} \left\{ \sum_{\alpha} \|x_{\alpha}\| + \sum_{\beta} \|y_{\beta}\| \right\} \\ &= \inf_{\sum_{\alpha} x_{\alpha} = x} \sum \|x_{\alpha}\| = \|x\| . \end{aligned}$$

De même : $\forall y \in \mathbb{R}^{n^2}$

$$(1) \quad \|(0,y)\|_{X_f} = \inf_{\alpha} \left\{ \sum_{\alpha} \|x_{\alpha}\| + \sum_{\beta} \|y_{\beta}\| \mid \sum_{\alpha} (x_{\alpha}, f(x_{\alpha})) + \sum_{\beta} y_{\beta} = (0,y) \right\}$$

d'où trivialement $\|(0,y)\|_{X_f} \leq \|y\|$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} \|(0,y)\|_{X_f} &\geq \inf_{\alpha} \left\{ \sum_{\alpha} \|x_{\alpha}\| + \left\| \sum_{\beta} y_{\beta} \right\| \right\} \\ &\geq \inf_{\alpha} \left\{ \sum_{\alpha} \|x_{\alpha}\| + \left\| y - \sum_{\alpha} f(x_{\alpha}) \right\| \right\} \\ &\geq \inf_{\alpha} \left\{ \sum_{\alpha} \|x_{\alpha}\| + \|y\| - \left\| \sum_{\alpha} f(x_{\alpha}) \right\| \right\} \end{aligned}$$

où l'inf porte sur le même ensemble qu'en (1). La propriété $\beta)$ assure alors que

$$\|(0,y)\|_{X_f} \geq \|y\| ;$$

ce qui prouve que Y_f est isométrique à ℓ_n^2 .

Lemme 2 : Posons pour $f \in B_n$:

$$(2) \quad d_f = \inf_{T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n^2})} \left\{ \sup_{\|x\|=1} \|f(x) - T(x)\| \right\}$$

où $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n^2})$ est l'ensemble des opérateurs linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^{n^2} .

Alors $\max(d_f, 1)$ est égal à l'infimum de $\|\pi\|$ quand π décrit les projections de X_f sur Y_f .

Démonstration : Soit π une projection de X_f sur Y_f , il est facile de lui associer un opérateur $T_\pi \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n^2})$ tel que

$$\forall (x, y) \in X_f \quad \pi(x, y) = (0, y - T_\pi x) \quad .$$

On peut écrire :

$$\|\pi\| = \sup_{z \in C_f} \|\pi z\|$$

donc par convexité :

$$\begin{aligned} \|\pi\| &= \sup \left[\max (\|\pi(x, f(x))\|, \|\pi(0, y)\|) \mid (x, y) \in X_f, \|x\| = \|y\| = 1 \right] \\ &= \sup \left[\|f(x) - T_\pi x\| \vee 1 \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1 \right] \quad . \end{aligned}$$

La conclusion résulte alors de la surjectivité de $\pi \rightarrow T_\pi$ qui est évidente. Le lemme précédent montre que plus d_f est grand, moins f est linéaire et moins X_f est hilbertien. Il est donc naturel de considérer le nombre

$$D_n = \sup_{f \in B_n} d_f \quad .$$

Le point crucial de la démonstration du théorème est alors le

$$\text{Lemme 3} : \forall n \in \mathbb{N}, \quad D_{2n}^2 \geq D_n^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}} \right)^2 \quad .$$

Pour démontrer ce lemme, on va introduire une application $f \rightarrow g_f$ de B_n dans B_{2n} . g_f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n$

$$g_f(x, y) = \left(f(x), f(y), x \frac{\|y\|}{(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}}, 0 \right) \quad \blacklozenge$$

♦ La quatrième composante ne jouera aucun rôle ...

où l'on a identifié au premier membre \mathbb{R}^{2n} à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et au second \mathbb{R}^{4n^2} à $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ et où (pour la troisième composante) on considère \mathbb{R}^n comme plongé dans \mathbb{R}^{n^2} .

Sous-lemme 1 : Si $f \in B_n$ alors $g_f \in B_{2n}$.

Cela résultera de l'inégalité élémentaire

$$(3) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \right)^2 \leq 2 \left[\sqrt{1+a^2} \sqrt{1+b^2} - (1+ab) \right]^2.$$

Celle-ci se voit aisément : si on ajoute $\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \right)^2$ au premier membre, on trouve si on développe : $\frac{2}{\sqrt{1+a^2} \sqrt{1+b^2}} \left[\sqrt{1+a^2} \sqrt{1+b^2} - (1+ab) \right]^2$ qui est inférieur au deuxième membre.

Preuve du sous-lemme 1 : Il suffit évidemment de montrer que g_f vérifie β).

Soit donc (x_i, y_i) une famille finie dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ telle que

$$\sum_i (x_i, y_i) = (0, 0).$$

On a :

$$(4) \quad \left\| \sum_i g_f(x_i, y_i) \right\|^2 = \left\| \sum_i f(x_i) \right\|^2 + \left\| \sum_i f(y_i) \right\|^2 + \left\| \sum_i x_i \lambda_i \right\|^2$$

avec $\lambda_i = \frac{\|y_i\|}{\sqrt{\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2}}$; puisque $\sum x_i = 0$ et $\sum y_i = 0$ et $f \in B_n$ on a

$$(5) \quad \left\| \sum_i f(x_i) \right\|^2 \leq \left(\sum \|x_i\| \right)^2$$

$$(6) \quad \left\| \sum_i f(y_i) \right\|^2 \leq \left(\sum \|y_i\| \right)^2.$$

D'autre part on peut écrire pour tout nombre c :

$$\left\| \sum_i x_i \lambda_i \right\|^2 = \left\| \sum_i x_i (\lambda_i - c) \right\|^2 \leq \left(\sum \|x_i\| \right) \left(\sum |\lambda_i - c| \right)^2$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(7) \quad \left\| \sum_i x_i \lambda_i \right\|^2 \leq \left(\sum \|x_i\| \right) \cdot \left(\sum \|x_i\| |\lambda_i - c|^2 \right) ;$$

si l'on pose $c = \sum \|x_i\| \lambda_i / \sum \|x_i\|$, alors le deuxième membre de (7) est égal à :

$$\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{i,j} \|x_i\| \|x_j\| (\lambda_i - \lambda_j)^2$$

qui d'après (3) est majoré par

$$\sum_{i,j} \sqrt{\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2} \sqrt{\|x_j\|^2 + \|y_j\|^2} - (\|x_i\| \|x_j\| + \|y_i\| \|y_j\|) ,$$

c'est-à-dire précisément $(\sum \|(x_i, y_i)\|)^2 - (\sum \|x_i\|)^2 - (\sum \|y_i\|)^2$; en reportant ce dernier résultat dans (4) et (5)-(6) on trouve finalement

$$\|\sum g_f(x_i, y_i)\|^2 \leq (\sum \|(x_i, y_i)\|)^2 . \quad \underline{\text{cqfd}}$$

Sous-lemme 2 : $(d_{g_f})^2 \geq (d_f)^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2$.

Démonstration : Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{4n^2})$, on peut le représenter sous la forme : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$(8) \quad T(x, y) = (Px + P'y, Rx + R'y, Sx + S'y, Ux + U'y)$$

avec P, P', R, R', S, S', U et U' dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n^2})$. Posons

$d(g_f, T) = \sup\{\|g_f(z) - Tz\| \mid z \in \mathbb{R}^{2n} \text{ } \|z\| = 1\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de d_f il existe x_0 et y_0 sur la sphère euclidienne de \mathbb{R}^n tels que

$$(9) \quad \|f(x_0) - Px_0\| \geq d_f - \varepsilon$$

$$(10) \quad \|f(y_0) - R'y_0\| \geq d_f - \varepsilon .$$

Il résulte alors de (8) que :

$$(11) \quad \|g_f(x_0, 0) - T(x_0, 0)\|^2 \geq (d_f - \varepsilon)^2 + \|R x_0\|^2 + \|S x_0\|^2 .$$

Les points $z_+ = \left(\frac{x_0}{\sqrt{2}}, \frac{y_0}{\sqrt{2}}\right)$ et $z_- = \left(\frac{x_0}{\sqrt{2}}, \frac{-y_0}{\sqrt{2}}\right)$ sont sur la sphère euclidienne de \mathbb{R}^{2n} et donc d'après (9) et (10)

$$\begin{aligned} d(g_f, T)^2 &\geq \frac{1}{2} (\|g_f(z_+) - Tz_+\|^2 + \|g_f(z_-) - Tz_-\|^2) \\ &\geq \frac{1}{2} \left[(d_f - \varepsilon)^2 + \|P'y_0\|^2 + \|Rx_0\|^2 + (d_f - \varepsilon)^2 + \left\| \frac{x_0}{\sqrt{2}} - Sx_0 \right\|^2 + \|S'y_0\|^2 \right]. \end{aligned}$$

D'où si l'on pose $\delta^2 = \|Rx_0\|^2 + \|Sx_0\|^2$:

$$\begin{aligned} d(g_f, T)^2 &\geq (d_f - \varepsilon)^2 + \frac{1}{2} \left[\|Rx_0\|^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \|Sx_0\| \right)^2 \right] \\ &\geq (d_f - \varepsilon)^2 + \frac{1}{2} \left(\|Rx_0\|^2 + \|Sx_0\|^2 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \|Sx_0\| \right) \\ &\geq (d_f - \varepsilon)^2 + \frac{1}{2} (\delta^2 - \sqrt{2} \cdot \delta + \frac{1}{2}) . \end{aligned}$$

En combinant (11) et la dernière ligne, on a :

$$d(g_f, T)^2 \geq (d_f - \varepsilon)^2 + \inf_{\delta > 0} \max \left\{ \delta^2, \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \right\}$$

c'est-à-dire : $d(g_f, T)^2 \geq (d_f - \varepsilon)^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}} \right)^2$; d'où puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire :

$$d(g_f, T)^2 \geq d_f^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}} \right)^2$$

et

$$d_{g_f}^2 = \inf_{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{4n})} d(g_f, T)^2 \geq d_f^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}} \right)^2 ,$$

ce qui est le résultat annoncé.

Démonstration du lemme 3 : $D_{2n}^2 = \sup_{g \in B_{2n}} d_g^2 \geq \sup_{f \in B_n} d_{g_f}^2$ d'après le sous-

lemme 1 ; donc $D_{2n}^2 \geq \sup_{f \in B_n} d_f^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}} \right)^2 = D_n^2 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}} \right)^2$ d'après le sous-

lemme 2.

Démonstration du théorème : On déduit du lemme 3 que pour chaque entier $n \geq 1$: $D_{2^n} \geq \frac{\sqrt{n}}{2+\sqrt{2}}$, donc qu'il existe une fonction f_n dans B_{2^n} telle que $d_{f_n} > \frac{\sqrt{n}}{4}$. On pose $\mathfrak{X} = \left(\sum_{n \geq 1} X_{f_n} \right)_2$, et $\mathfrak{Y} = \left(\sum_{n \geq 1} Y_{f_n} \right)_2$ considéré comme sous-espace de \mathfrak{X} .

Comme $\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}$ s'identifie à $\left(\sum_{n \geq 1} X_{f_n} / Y_{f_n} \right)_2$, le lemme 1 montre que \mathfrak{Y} et $\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}$ sont isométriques à des espaces de Hilbert. Soit π une projection linéaire (non nécessairement bornée) de \mathfrak{X} sur \mathfrak{Y} , alors $\pi_n \pi j_n$ est une projection de X_{f_n} sur Y_{f_n} si l'on note j_n l'injection canonique de X_{f_n} dans \mathfrak{X} et π_n la projection canonique de \mathfrak{Y} sur Y_{f_n} . Le lemme 2 implique donc que $\|\pi_n \pi j_n\| \geq d_{f_n} > \frac{\sqrt{n}}{4} \quad \forall n \geq 1$, donc $\|\pi\| \geq \|\pi_n \pi j_n\| > \frac{\sqrt{n}}{4} \quad \forall n \geq 1$ c'est-à-dire que $\|\pi\| = \infty$. Cela prouve que \mathfrak{X} n'est pas isomorphe à un espace de Hilbert puisqu'il a un sous-espace \mathfrak{Y} sur lequel il n'existe pas de projection bornée.

Remarque finale : Soit p tel que $1 < p < \infty$. L'espace $\mathfrak{X}_p = \left(\sum_{n \geq 1} X_{f_n} \right)_p$ a un sous-espace $\mathfrak{Y}_p = \left(\sum_{n \geq 1} Y_{f_n} \right)_p$ tel que \mathfrak{Y}_p et $\mathfrak{X}_p/\mathfrak{Y}_p$ sont isomorphes à ℓ_p mais \mathfrak{X}_p n'est pas un espace \mathfrak{L}_p . En effet \mathfrak{Y}_p et $\mathfrak{X}_p/\mathfrak{Y}_p$ sont isomorphes à des sous-espaces complémentés de ℓ_p et contiennent ℓ_p complémenté ; ils sont donc isomorphes à ℓ_p d'après la méthode de décomposition de Pełczyński ([5] p. 30, theorem I.2.6). Pour voir que \mathfrak{X}_p n'est pas un espace \mathfrak{L}_p on peut se ramener au cas $p \geq 2$ et utiliser un résultat de Kadec-Pełczyński : tout sous-espace hilbertien (ici \mathfrak{Y}_p) d'un espace L_p est complémenté ([4] corollary 1). On conclut alors comme pour $p = 2$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Dunford and J.T. Schwartz : Linear operators I, Interscience, New York (1958).
- [2] P. Enflo, J. Lindenstrauss and G. Pisier : On the "three space problem", à paraître dans Math. Scand. 36 (1975).
- [3] D.P. Giesy : On a convexity condition in normed linear spaces, Trans. A.M.S. 125 (1966) 114-146.
- [4] M. Kadec and A. Pełczyński : Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the space L_p , Studia Math. 21 (1962) 161-176.
- [5] J. Lindenstrauss and L. Tzaferi : Classical Banach spaces, Lect. Notes in Math. No 338, Springer Verlag.
- [6] C. Stegall : The Radon Nikodym property in conjugate Banach spaces, Trans. A.M.S. (à paraître).
