B. BEAUZAMY

Points minimaux dans les espaces de Banach (suite)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 19, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A18_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y   S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

POINTS MINIMAUX DANS LES ESPACES DE BANACH
(suite)

par B. BEAUZAMY

Exposé N° XIX

16 Avril 1975

III. Ensembles optimaux.

Nous dirons qu'un ensemble est optimal s'il est égal à l'ensemble de ses points minimaux. La proposition suivante donne une condition suffisante très simple pour qu'un ensemble soit optimal ; il résulte de la proposition I.3 qu'elle est également nécessaire.

Proposition 1 : S'il existe une projection P de E sur M (c'est-à-dire une application vérifiant $P^2 = P$), satisfaisant à

$$(1) \qquad \|Px - m\| \leq \|x - m\| \qquad \forall\, m \in M,\ \forall\, x \in E$$

l'ensemble M est optimal.

En effet, si $x \notin M$, $Px \neq x$ et x n'est pas minimal par rapport à M.

Pour un ensemble M quelconque d'un espace de Banach E, nous posons $M_1 = \min M, \dots, M_k = \min M_{k-1}, \dots$. Nous obtenons ainsi une suite croissante d'ensembles. Posons finalement $M_\infty = \bigcup_{k\geq 1} M_k$, et $\mathfrak{s}(M) = \overline{M_\infty}$. Nous appellerons $\mathfrak{s}(M)$ le saturé de M.

Proposition 2 : Si E est strictement convexe, $\mathfrak{s}(M)$ est convexe fermé.

Démonstration : $\mathfrak{s}(M)$ est fermé par définition ; pour montrer qu'il est convexe, il suffit de voir que M_∞ est convexe. Soient a,b deux points de M_∞ ; il existe un indice k pour lequel a et b sont dans M_k. Puisque E est strictement convexe, tous les points du segment $[a,b]$ sont dans M_{k+1} d'après la proposition I.3, et donc sont dans M_∞.

Si l'on remarque en outre que $\mathfrak{s}(\lambda M) = \lambda \mathfrak{s}(M) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, on obtient :

Corollaire : Si M est un sous espace vectoriel de E, il en est de même de $\mathfrak{s}(M)$.

La proposition suivante montre pourquoi nous avons introduit le saturé d'un ensemble. Elle jouera un rôle essentiel.

Proposition 3 : Si E est réflexif et strictement convexe, le saturé de chaque ensemble est optimal.

Démonstration : Soit $x \notin \mathcal{S}(M)$; nous allons montrer que x n'est pas minimal par rapport à $\mathcal{S}(M)$.

D'après la proposition I.2, on peut, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, trouver un point x_k, minimal par rapport à M_{k-1} (et donc $x_k \in M_k$), tel que

$$\|x_k - m\| \leq \|x - m\| \qquad \forall\, m \in M_{k-1}$$

Choisissons un point m_o de M, on a pour tout k

$$\|x_k\| \leq \|x - m_o\| + \|m_o\|$$

et la suite (x_k) est donc une suite bornée dans E. Puisque E est réflexif, il existe une sous suite (x_{k_n}) convergente pour $\sigma(E,E')$ vers un point y de E.

Pour tout indice n_o fixé et tout $n \geq n_o$, on a :

$$\|x_{k_n} - m\| \leq \|x - m\| \qquad \forall\, m \in M_{k_{n_o}}$$

et, puisque la norme est s.c.i. pour $\sigma(E,E')$:

$$\|y - m\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_{k_n} - m\| \leq \|x - m\| \qquad \forall\, m \in M_{k_{n_o}}$$

Il en résulte que

$$\|y - m\| \leq \|x - m\|$$

pour tout point m de M_∞, et donc pour tout point m de $\mathcal{S}(M)$. Mais nous savons (proposition 1) que $\mathcal{S}(M)$ est un convexe fermé, donc faiblement fermé ; le point y est donc dans $\mathcal{S}(M)$, et $y \neq x$, ce qui prouve que x n'est pas minimal par rapport à $\mathcal{S}(M)$.

Donnons maintenant quelques propriétés élémentaires de l'opération $\mathcal{S}$.

Tout d'abord, il est clair que si $A \subset B$, $\mathfrak{S}(A) \subset \mathfrak{S}(B)$. Il résulte des propositions précédentes que pour chaque ensemble M, $\mathfrak{S}(M) = \mathfrak{S}(\operatorname{conv} M)$. Convenons, dans la proposition qui suit, que l'ensemble vide est optimal.

<u>Proposition 4</u> : Toute intersection d'ensembles optimaux est optimale.

<u>Démonstration</u> : Soit (A_i) une famille d'ensembles optimaux et $A = \cap A_i$. Si un point x est minimal par rapport à A, il est aussi minimal par rapport à chaque A_i, donc appartient à chaque A_i, donc à A.

<u>Proposition 5</u> : Si E est réflexif et strictement convexe, l'adhérence de la réunion d'une famille filtrante croissante d'ensembles optimaux est optimale.

<u>Démonstration</u> : L'idée est très voisine de celle de la proposition 3. Soit (A_i) une famille filtrante croissante d'ensembles optimaux, et $U = \overline{\cup A_i}$. Soit $x \notin U$. D'après la proposition I.3, on peut, pour chaque indice i, trouver un point x_i, minimal par rapport à A_i, (et donc $x_i \in A_i$), vérifiant

$$\|x_i - m\| \leq \|x - m\| \qquad \forall\, m \in A_i$$

La suite (x_i) est bornée, et, puisque E est réflexif, elle admet une sous suite convergente vers un point y ; on en déduit que le point x n'est pas minimal par rapport à U comme dans la démonstration de la proposition 3.

<u>Corollaire 1</u> : Si (A_n) est une suite croissante d'ensembles, on a :

$$\mathfrak{S}(\cup A_n) = \overline{\cup \mathfrak{S}(A_n)}$$

En effet, d'après la proposition précédente, $\overline{\cup \mathfrak{S}(A_n)}$ est un ensemble optimal, qui contient donc $\mathfrak{S}(\cup A_n)$. Par ailleurs, on a, pour tout k, $A_k \subset \mathfrak{S}(\cup A_n)$, donc $\overline{\cup \mathfrak{S}(A_k)} \subset \mathfrak{S}(\cup A_n)$.

<u>Corollaire 2</u> : Si F est un sous espace vectoriel de E et si un ensemble symétrique A est total dans F, $\mathfrak{S}(A)$ est total dans $\mathfrak{S}(F)$.

On a en effet $F = \overline{\bigcup n \text{ conv } A}$, et donc

$$\mathcal{S}(F) = \mathcal{S}(\overline{\bigcup n \text{ conv } A}) = \mathcal{S}(\bigcup n \text{ conv } A)$$

$$= \overline{\bigcup n\ \mathcal{S}(\text{conv } A)} = \overline{\bigcup n\ \mathcal{S}(A)}$$

Remarque : Nous ne savons pas si, pour la démonstration de la proposition 4, les hypothèses "E réflexif et strictement convexe" sont les meilleures possibles. Mais nous venons au paragraphe IV que ce résultat est faux pour l'espace $\mathcal{C}([0,1])$.

Nous avons donc ainsi obtenu un moyen d'associer à chaque sous-ensemble M d'un espace de Banach réflexif et strictement convexe un ensemble optimal $\mathcal{S}(M)$ qui le contient. Nous savons, grâce à la proposition I.2, qu'il existe une projection P de E sur $\mathcal{S}(M)$, satisfaisant à

$$\|Px - m\| \leq \|x - m\| \qquad \forall\, x \in E,\ \forall\, m \in \mathcal{S}(M)$$

Cette projection n'a évidemment aucune raison d'être linéaire en général ; elle le sera néanmoins si M est un sous-espace vectoriel et si nous faisons sur E une hypothèse de lissité.

Dire que E est lisse signifie qu'il existe en tout point de la sphère unité un hyperplan d'appui unique ; ceci implique la continuité de l'application $x \to \xi_x$, de E dans $\sigma(E',E)$, si ξ_x désigne la forme linéaire de norme 1 satisfaisant à $\xi_x(x) = \|x\|$.

Proposition 6 : Supposons E réflexif, strictement convexe et lisse. Si F est un sous-espace vectoriel optimal, il existe une projection linéaire de norme 1 de E sur F.

Démonstration : D'après la proposition I.2, nous savons qu'il existe une projection P de E sur F satisfaisant à

$$(1) \qquad \|Px - y\| \leq \|x - y\| \qquad \forall\, x \in E,\ \forall\, y \in F$$

Pour tout point $x \neq 0$ de E, soit ξ_x l'unique forme linéaire de norme 1 telle que $\xi_x(x) = \|x\|$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $y \in F$, on a :

$$\left\| \frac{Px}{n} - y \right\| \leq \left\| \frac{x}{n} - y \right\|$$

et donc

$$\xi_{\frac{x}{n} - y} \left(\frac{Px}{n} - y\right) \leq \xi_{\frac{x}{n} - y} \left(\frac{x}{n} - y\right)$$

d'où
$$\xi_{\frac{x}{n} - y} (Px - x) \leq 0$$

Quand $n \to \infty$, $\frac{x}{n} - y \to -y$ en norme, et $\xi_{\frac{x}{n} - y} \to \xi_{-y}$ pour $\sigma(E',E)$.

Il en résulte que

$$\xi_{-y}(Px - x) \leq 0$$

Mais $\xi_{-y} = -\xi_y$, et F est un sous espace vectoriel. On obtient donc :

$$(2) \qquad \xi_y(Px) = \xi_y(x) \qquad \forall\, y \in F,\ \forall\, x \in E$$

$$(3) \qquad Px \in F \qquad \forall\, x \in E$$

Montrons maintenant que les conditions (2) et (3) déterminent P de façon unique. Soit P'_x un autre point satisfaisant à 2) et 3) ; on a alors

$$\xi_y(P'x) = \xi_y(Px) \qquad \forall\, y \in F$$

Posons $u = Px - P'x$, on a $\xi_u(u) = 0$, et donc $u = 0$, ce qui prouve l'unicité de P.

Il résulte de (2) et (3) que P est linéaire : si x_1, x_2 sont deux points de E et λ_1, λ_2 deux scalaires, on a :

$$\lambda_1 Px_1 + \lambda_2 Px_2 \in F \qquad \text{et} \qquad \forall\, y \in F$$

$$\xi_y(\lambda_1 Px_1 + \lambda_2 Px_2) = \lambda_1 \xi_y(Px_1) + \lambda_2 \xi_y(Px_2) = \lambda_1 \xi_y(x_1) + \lambda_2 \xi_y(x_2) = \lambda_1 P(x_1) + \lambda_2 P(x$$

ce qui prouve que $P(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 P(x_1) + \lambda_2 P(x_2)$.

Il est clair au vu de (1) que P est continue et que sa norme est 1, ce qui prouve notre proposition.

Nous avons ainsi obtenu une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-espace vectoriel soit l'image d'une projection de norme 1. Il est clair que les droites et l'espace tout entier sont des espaces vectoriels optimaux dans n'importe quel espace de Banach.
Remarquons qu'il peut se faire que ce soient les seuls : d'après un résultat de F. Bohnenblust [2], on peut trouver des sous espaces de ℓ_n^p ($p < \infty$, p non entier), où les seules projections de norme 1 sur des sous espaces vectoriels sont l'identité et les projections sur des droites.

La proposition 6 sera un outil essentiel pour la suite ; nous allons en donner une première application.

Il est clair au vu de la proposition 1 que dans un espace de Hilbert tous les convexes fermés sont optimaux, et, en particulier, la boule unité. La proposition suivante, qui est à rapprocher d'un résultat de H. Fakhoury [1], montre que la réciproque est vraie. Nous y supposons que l'espace E est un espace de Banach sur $\mathbb{R}$.

<u>Proposition 7</u> : Si E est réflexif, lisse et strictement convexe, de dimension supérieure à 2, et si sa boule unité est optimale, E est isométrique à un espace de Hilbert.

<u>Lemme</u> : Si E est lisse, tout demi-espace est l'adhérence de la réunion d'une suite croissante de boules tangentes en un même point à l'hyperplan qui limite le demi-espace.

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit f une forme linéaire continue de norme 1, et soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan $\{f = 1\}$, A le demi espace $\{f \leq 1\}$. Soit a le point tel que $f(a) = 1$ qui est le point de contact de $\mathcal{H}$ et de la boule unité. Soient $B_1 \ldots B_n \ldots$ les boules ouvertes de centre 0, $-a$, $-2a, \ldots, -na, \ldots$ et de rayon $1, 2, \ldots, n, \ldots$. Ces boules se déduisent les unes des autres par des homothéties

de centre a et de rapport positif. La réunion $\bigcup_{n\geq 1} B_n$ recouvre le demi espace ouvert $\overset{\circ}{A}$. En effet, soit $x \notin \bigcup_{n\geq 1} B_n$.

Aucun point du segment $[a,x]$ n'appartient à cette réunion, on peut donc l'en séparer par un hyperplan. Cet hyperplan contient a, et donc est un hyperplan d'appui en a. Mais le seul hyperplan d'appui en a est $\{f = 1\}$, donc $x \notin \overset{\circ}{A}$. On en déduit que A est l'adhérence de la réunion des boules B_n.

Démontrons maintenant la proposition. Si la boule unité est optimale, d'après le lemme et la proposition 5, tout demi-espace fermé est optimal, et donc, par intersection, tout sous espace fermé est optimal. D'après la proposition 6, il existe donc une projection linéaire de norme 1 de E sur chaque sous espace vectoriel fermé ; d'après un résultat de Kakutani [3], si dim $E \geq 3$, ceci implique que E est isométrique à un espace de Hilbert.

<u>Remarque</u> : Là encore, nous ne savons pas si les hypothèses faites sont les meilleures possibles ; il est clair toutefois qu'une hypothèse est nécessaire : la boule unité de $L^{\infty}([0,1],dt)$ est optimale, car l'application $x \to \sup(\inf(x,1),-1)$ définit une projection de L^{∞} sur sa boule unité satisfaisant l'hypothèse de la proposition 1.

Nous allons maintenant étudier la forme du saturé $\mathcal{S}(B)$ de la boule unité de l'espace, celui-ci étant supposé réel. La configuration de cet ensemble dépend du nombre d'hyperplans optimaux. Pour une forme linéaire continue f, les ensembles $\{f = a\}$, $\{f \leq b\}$, $\{f \geq c\}$ sont optimaux en même temps, si E est réflexif et strictement convexe.
En effet :

<u>Lemme</u> : Si un hyperplan est optimal, il en est de même des demi-espaces qu'il limite, lorsque E est réflexif et strictement convexe.

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit A l'un des demi-espaces, et $x \notin A$. Soit P la projection de E sur $\mathcal{H}$ donnée par la proposition I.2. Elle vérifie

$$\|Px - m\| \leq \|x - m\| \qquad \forall\, m \in \mathcal{H}$$

Soit $y \in A$, on a, si m est l'intersection de $[x,y]$ avec $\mathcal{H}$,

$$\|Px - y\| \leq \|Px - m\| + \|m - y\| \leq \|x - m\| + \|m - y\| = \|x - y\|$$

ce qui prouve que x n'est pas minimal par rapport à A, et prouve le lemme.

Nous dirons qu'une forme linéaire f est optimale si les ensembles $\{f = a\}$ sont optimaux.

Théorème 1 : Si E est réflexif et strictement convexe, le saturé de la boule unité est l'intersection des bandes $\{ |f| \leq 1 \}$, pour toutes les formes linéaires optimales de norme 1.

Démonstration : Tout d'abord il est clair au vu du lemme précédent et de la proposition 4 que l'ensemble $C = \bigcap \{ |f| \leq 1 \}$, f optimale de norme 1, est un ensemble optimal, qui contient donc le saturé de la boule unité. Il nous reste donc à montrer l'inclusion inverse.

Notons j la jauge de $\mathcal{S}(B)$. C'est une fonction convexe continue qui, si E est réflexif, est Gâteaux-différentiable en tous les points d'un ensemble G partout dense.

Lemme 1 : j est l'enveloppe supérieure de ses minorants affines continues correspondant à des points de lissité.

Démonstration du lemme : En tout point d'un ensemble G dense dans E, j est Gâteaux-différentiable, ce qui signifie que si $x_0 \in G$, on peut écrire, pour tout vecteur e :

$$j(x_0 + \lambda e) = j(x_0) + \lambda\, \xi_{(x_0)}(e) + \lambda\, \varepsilon(\lambda)$$

où $\varepsilon(\lambda) \to 0 \qquad \lambda \to 0$.

Puisque j est positivement homogène, l'ensemble G est invariant par les homothéties positives de centre O.

En choisissant $e = x_o$, on obtient

$$(1+\lambda)\ j(x_o) = j(x_o) + \lambda\ \xi_{(x_o)}(x_o) + \lambda\ \varepsilon(\lambda)$$

ce qui implique $\xi_{(x_o)}(x_o) = j(x_o)$, et

$$j(x_o+\lambda e) = \xi(x_o+\lambda e) + \lambda\varepsilon(\lambda)$$

Il en résulte que $\xi = j$ sur toute la demi droite engendrée par x_o.

Posons

$$\varphi(x) = \sup_{x_o \in G} |\xi_{(x_o)}(x)|$$

ξ_{x_o} étant une minorante affine de j, on a, puisque j est convexe,

$j(x) \geq \xi_{(x_o)}(x) \quad \forall\ x \in E,\ \forall\ x_o \in G$, et donc

$$\varphi(x) \leq j(x) \leq \|x\|$$

φ est donc une semi-norme continue ; puisqu'elle coïncide avec j en tous les points d'un ensemble dense de E, elle coïncide avec j partout.

On a donc

$$j(x) = \sup_{x_o \in G} |\xi_{(x_o)}(x)|$$

ce qui prouve le lemme.

Nous avons vu que G était invariant par les homothéties positives. Nous appellerons point de lissité de $\mathfrak{S}(B)$ les points x_o (avec $j(x_o) = 1$) qui correspondent à des directions (λx_o) en tout point desquelles j est différentiable.

<u>Lemme 2</u> : $\mathfrak{S}(B)$ est l'intersection des demi-espaces correspondant à des hyperplans s'appuyant en ses points de lissité.

<u>Démonstration du lemme 2</u> : Soit $x \notin \mathfrak{S}(B)$, on a $j(x) > 1$. D'après le lemme 1, on peut trouver un point de lissité x_o tel que $\xi_{(x_o)}(x) > 1$. L'hyperplan

$\{\xi_{(x_o)} = 1\}$ sépare donc x de $\mathfrak{s}(B)$, car :

- il touche $\mathfrak{s}(B)$ en x_o,
- on a toujours $j(y) \geq \xi_{(x_o)}(y)$, et donc $\xi_{(x_o)}(y) \leq 1$ si $y \in \mathfrak{s}(B)$.

Achevons maintenant la démonstration du théorème. Soit $x \notin \mathfrak{s}(B)$. D'après le lemme 2, on peut séparer x et $\mathfrak{s}(B)$ par un hyperplan s'appuyant sur un point de lissité de $\mathfrak{s}(B)$; soit $\{\xi = a\}$ $a \geq 0$ cet hyperplan, on peut supposer $\|\xi\| = 1$. Puisque x_o est un point de lissité de $\mathfrak{s}(B)$, le demi-espace $\{\xi \leq a\}$ est l'adhérence de la réunion d'une suite croissante d'ensembles homothétiques de $\mathfrak{s}(B)$ dans des homothéties de centre x_o et de rapport positif, comme on l'a montré dans la démonstration de la proposition 7. Mais, puisque E est réflexif et strictement convexe, l'adhérence de la réunion de ces ensembles est un ensemble optimal, d'après la proposition 5. Donc l'ensemble $\{\xi_{(x_o)} = \xi_{(x_o)}(x_o)\}$ est optimal; il en est de même donc de $\{\xi_{x_o} = \xi_{(x_o)}(x_o)\}$, et donc de $\{\xi_{(x_o)}=1\}$. Mais $\xi_{x_o}(x) > \xi_{x_o}(x_o) \geq 1$, et l'hyperplan optimal $\{\xi_{(x_o)} = 1\}$ sépare x et B. Donc x n'appartient pas à la bande optimale $\{\ |\xi_{(x_o)}| \leq 1\}$, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u> : Il existe des espaces uniformément convexes, lisses, de dimension finie, où le saturé de la boule unité est l'espace entier.

<u>Démonstration</u> : Un résultat déjà mentionné de F. Bohnenblust [2] implique que dans certains sous espaces de ℓ^p_n aucun hyperplan n'est 1-complémenté. Il résulte alors du théorème 1 que dans ces espaces $\mathfrak{s}(B)$ est l'espace entier.

Si l'on choisit un ensemble M constitué d'un nombre fini de points tel que conv $M \supset B$, $\mathfrak{s}(M)$ sera aussi l'espace entier. Ceci répond à une question de P. Enflo.

Nous allons donner une première application du théorème 1. Nous dirons qu'une base (e_n) dans un espace de Banach est une base de meilleure approximation si chaque projection π_n, de E sur l'espace engendré par les n premiers vecteurs, est une projection (linéaire) de meilleure approximation.

Proposition 8 : Soit E un espace séparable, lisse et strictement convexe, réflexif. Si le saturé de la boule unité ne contient pas de droites, E admet une base de meilleure approximation.

Démonstration : Si $\mathcal{S}(B)$ ne contient pas de droites, on peut, pour chaque point $x \notin E$, trouver une forme linéaire optimale de norme 1, avec $\xi(x) \neq 0$. Il en résulte que l'intersection des noyaux des formes optimales de norme 1 est réduite à $\{0\}$.

Lemme : Si E est séparable, de toute famille $(f_i)_{i \in I}$ de formes linéaires de norme 1 vérifiant $\bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} f_i = \{0\}$, on peut extraire une sous famille dénombrable possédant la même propriété.

Démonstration du lemme : Soit $C = \bigcap_{i \in I} \{ |f_i| \leq 1 \}$. Il est équivalent de de dire que $\bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} f_i = \{0\}$, ou que C ne contient pas de droites, ou que la jauge de C, notée j, est une norme sur E. Cette norme satisfait à $j(x) \leq \|x\|$, $\forall x \in E$, car la boule unité est contenue dans C. Elle est définie par $j(x) = \sup_i |f_i(x)|$.

Puisque E est séparable pour sa norme, il l'est encore pour j. Soit (a_n) la suite dense dans E ; pour chaque n on peut trouver une suite $(f_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ telle que

$$j(a_n) = \sup_m |f_{n,m}(a_n)|$$

Si l'on pose $j'(x) = \sup_{n,m} |f_{n,m}(x)|$, on obtient une jauge continue, qui coïncide avec j sur un ensemble dense, donc partout. On a donc

$$j(x) = \sup_{n,m} |f_{n,m}(x)|$$

Il suffit ensuite de ranger les $(f_{n,m})$ en une suite, notée (f_k), pour achever la démonstration.

Remarquons que l'on peut supposer la suite $A_N = \bigcap_{k=1}^{N} \ker f_k$ strictement décroissante, en éliminant tous les indices N pour lesquels

$$\bigcap_{k=1}^{N-1} \ker f_k = \bigcap_{k=1}^{N} \ker f_k$$

Revenons à la démonstration de la proposition, et appliquons le lemme à l'ensemble des formes optimales de norme 1. D'après la proposition 6, il existe des projections linéaires de norme 1, P_N, de E sur A_N, qui satisfont à

$$(4) \qquad \xi_{h_N}(P_N(x)) = \xi_{h_N}(x) \qquad \forall\, x \in E \quad \forall\, h_N \in A_N$$

si ξ_{h_N} désigne la forme linéaire de norme 1 qui norme h_N.

Notons $P_{N,N-1}$ la restriction de P_N à A_{N-1} ; elle vérifie (4) sur A_{N-1}.

On a donc, $\forall\, x \in E$:

$$\xi_{h_N}(P_{N,N-1} \circ P_{N-1}(x)) = \xi_{h_N}(P_{N-1}(x))$$

Mais puisque $h_N \in A_{N-1}$, on a

$$\xi_{h_N}(P_{N-1}(x)) = \xi_{h_N}(x)$$

et il en résulte que

$$P_{N,N-1} \circ P_{N-1} = P_N$$

Choisissons maintenant par récurrence une suite (e_k) de points de E, de norme 1, avec

$$e_1 \in \ker P_1, \dots, e_k \in A_{k-1} \cap \ker P_k$$

Si (α_i) est une suite de scalaires telle que $\Sigma\, \alpha_i\, e_i$ converge, on a, pour tout k :

$$\|P_k(\sum_1^\infty \alpha_i\, e_i)\| \leq \|\sum_1^\infty \alpha_i\, e_i\|$$

- si $i > k$, $e_i \in A_k$, et donc $P_k e_i = e_i$
- si $i \leq k$, $P_k e_i = P_{k,k-1} \circ \cdots \circ P_{i+1,i} \circ P_i e_i = 0$

et donc, $\forall\, k \in \mathbb{N}$:

$$\Big\| \sum_{i \geq k} \alpha_i\, e_i \Big\| \leq \Big\| \sum_1^{\infty} \alpha_i e_i \Big\|$$

et donc

$$\Big\| (I - \pi_k) \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \Big\| \leq \Big\| \sum_1^{\infty} \alpha_i e_i \Big\|$$

ce qui signifie que $I - \pi_k$ est de norme 1.

<u>Lemme</u> : Si $I - P$ est de norme 1, P est de meilleure approximation.

On a en effet, si $Pm = m$:

$$\| Px - x \| = \| (I - P)(x - m) \| \leq \| x - m \|$$

Il nous reste à montrer que (e_i) est une base. Soit $x \in E$. On a, puisque $e_1 \in \ker P_1$, pour un scalaire λ_1 :

$$x = \lambda_1 e_1 + P_1 x$$

Réitérant l'opération, on obtient pour tout n

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + P_n(x)$$

Puisque E est réflexif, la suite $P_n(x)$ admet une sous suite convergeant faiblement vers un point y. Si N_o est fixé, pour tout $n \geq N_o$, $A_n \subset A_{N_o}$, et donc $y \in A_{N_o}$ puisque A_{N_o} est un convexe fermé. Donc $y = 0$. La suite $(P_n(x))$, par le même raisonnement, ne peut avoir d'aûtre sous suite convergente, et donc converge faiblement vers x, et l'espace vectoriel engendré par les (e_i) est faiblement dense dans E, et donc dense dans E. Ceci achève la démonstration de notre proposition.

Nous avons donc, dans quelques cas, montré à quelles propriétés de E correspondait une hypothèse sur le saturé de sa boule unité. Une question non résolue est la suivante : quand $\mathcal{S}(B)$ est-il borné ? La proposition suivante montre que c'est à cette question que se ramène le problème "quand $\mathcal{S}(K)$ est-il borné pour chaque compact K ".

Proposition 10 : Soit E réflexif et strictement convexe. Si tout compact a un saturé borné, le saturé de la boule unité est borné.

Lemme : Si pour tout compact K de la boule unité $\mathcal{S}(K)$ est borné, il existe une constante λ telle que $\mathcal{S}(K) \subset \lambda B$.

Démonstration du lemme : Supposons la conclusion fausse : soit (K_n) une suite de compacts de la boule unité, avec $\emptyset\,(\mathcal{S}(K_n)) > 4^n$ (on note $\emptyset(M)$ le diamètre d'un ensemble). L'ensemble $\cup\, 2^{-n}K_n$ est compact, mais le diamètre de son saturé est infini, ce qui contredit l'hypothèse, et prouve le lemme.

Pour démontrer la proposition, il suffit maintenant de choisir une famille filtrante croissante de compacts dont la réunion est dense dans la boule unité.

Pour terminer ce paragraphe, nous allons envisager la question de la séparabilité du saturé d'un ensemble.

Proposition 11 : Soit E un espace réflexif et strictement convexe. Si F est un sous-espace séparable de E, le saturé de F est séparable.

Démonstration : Si F est séparable, sa boule unité C l'est aussi. Si (e_n) est la suite dense dans C, $\{ \frac{e_n}{n} , n \in \mathbb{N} \}$ est un compact K total dans F ; on peut supposer ce compact symétrique. On a donc $F = \overline{\cup\, n \text{ conv } K}$, et donc, d'après la proposition 5 (corollaire 2), $\mathcal{S}(F) = \overline{\cup\, n\, \mathcal{S}(K)}$.

Pour montrer que $\mathcal{S}(F)$ est séparable, il suffit de montrer qu'il l'est pour $\sigma(E,E')$, et, pour cela, il suffit de montrer que min K est séparable. Cela résultera du lemme suivant :

Lemme : Si K est un compact de E, min K est séparable pour $\sigma(E,E')$.

Démonstration du lemme : Si K est un compact, l'ensemble des probabilités sur K est un compact séparable pour la topologie étroite. Il résulte de la proposition II.1 que l'ensemble des points minimaux de K est un compact séparable pour $\sigma(E,E')$.

Nous allons maintenant examiner quelques exemples et donner quelques applications.

IV. Exemples et applications.

1) Cas des espaces $\mathcal{C}(X)$, X compact.

Soit X un compact et M un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(X)$. On dit qu'un point x de X est point-pic pour M s'il existe une fonction m_x de M qui atteigne le maximum de sa valeur absolue au point x et en lui seul :

$$|m_x(y)| < |m_x(x)| \qquad \forall\, y \neq x$$

Cette fonction s'appellera fonction pic de x ; on notera $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des points pics de M.

Proposition 1 : Si l'ensemble $\mathcal{P}(M)$ est dense dans X, on a

$$\min M = \mathcal{C}(X)$$

Nous aurons besoin d'un lemme :

Lemme : Si M est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(X)$ et si deux fonctions f et g de $\mathcal{C}(X)$ vérifient

$$\|f - m\| \leq \|g - m\| \qquad \forall\, m \in M$$

alors f et g coïncident sur $\mathcal{P}(M)$.

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit $x \in \mathcal{P}(M)$. Puisque M est un sous espace vectoriel, on peut trouver une fonction $m_x \in M$ telle que

$$m_x(x) > |m_x(y)| \qquad \forall\, y \neq x$$

Soit θ un nombre complexe de module 1, et soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\left\| \frac{f}{n} + \theta m \right\| \leq \left\| \frac{g}{n} + \theta m \right\| \qquad \forall\, m \in M$$

Soit μ_n la mesure sur X, de norme 1, vérifiant

$$\mu_n\left(\frac{g}{n} + \theta m\right) = \left\| \frac{g}{n} + \theta m \right\|$$

On a :

$$\left|\mu_n\left(\frac{f}{n} + \theta m\right)\right| \leq \mu_n\left(\frac{g}{n} + \theta m\right)$$

et donc

$$\mathrm{Re}\ \mu_n\left(\frac{f}{n} + \theta m\right) \leq \mathrm{Re}\ \mu_n\left(\frac{g}{n} + \theta m\right)$$

d'où

$$\mathrm{Re}\ \mu_n(f) \leq \mathrm{Re}\ \mu_n g \tag{1}$$

L'ensemble des mesures de norme au plus égale à 1 étant vaguement compact, il existe une sous suite des μ_n, encore notée μ_n, qui converge vers une mesure μ, et on a $\|\mu\| \leq 1$. Par ailleurs

$$\mu(\theta m) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(\theta m)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mu_n\left(\frac{g}{n} + \theta m\right)$$

car $\left|\mu_n\left(\frac{g}{n} + \theta m\right) - \mu_n(\theta m)\right| = \frac{1}{n} |\mu_n(g)| \leq \frac{1}{n} \sup |g| \to 0$

et donc

$$\mu(\theta m) = \lim_{n \to \infty} \left\|\frac{g}{n} + \theta m\right\| = \|\theta m\|$$

Mais si l'on choisit pour m la fonction pic en x, m_x, on en déduit que la seule mesure de norme 1 telle que $\mu(m_x) = \|m_x\|$ est la masse de Dirac au point x. Par conséquent, la seule mesure telle que $\mu(\sigma m) = \|\sigma m\|$ est $\bar{\sigma}\,\delta_x$. On en déduit qu'une sous-suite de μ_n converge vaguement vers $\bar{\sigma}\,\delta_x$. Il résulte alors de (1) que pour tout nombre complexe σ de module 1,

$$\mathrm{Re}\,\bar{\sigma}\,f(x) \leq \mathrm{Re}\,\bar{\sigma}\,g(x)$$

Changeant σ en $-\sigma$, on en déduit

$$\mathrm{Re}\,\bar{\sigma}\,f(x) = \mathrm{Re}\,\bar{\sigma}\,g(x) ,$$

et ceci implique $f(x) = g(x)$, et termine la démonstration du lemme.

Montrons maintenant la proposition : soit g une fonction de $\mathcal{C}(X)$ et soit f avec

$$\|f-m\| \leq \|g-m\| \qquad \forall\, m \in M$$

On a $f = g$ sur $P(M)$ d'après le lemme, et donc partout si $P(M)$ est dense dans X, et g est minimal.

<u>Proposition 2</u> : Dans $\mathcal{C}([0,1])$, l'adhérence d'une réunion croissante d'ensembles optimaux peut n'être pas optimale.

<u>Démonstration</u> : Considérons dans $\mathcal{C}([0,1])$ l'ensemble $M = \{f, |f(t)| \leq t\}$. Cet ensemble est optimal, car la projection

$$P \;:\; f \to \max\,(\min\,(f(t),t),\,-t)$$

satisfait à $\|Pf-m\| \leq \|f-m\| \quad \forall\, m \in M$.

L'ensemble $H = \overline{\cup\, n\, M}$ est l'hyperplan des fonctions nulles à l'origine, qui n'est pas optimal. En effet, soit $g \notin H$ (c'est-à-dire $g(0) \neq 0$), et soit f vérifiant

$$\|f-m\| \leq \|g-m\| \qquad \forall\, m \in H$$

Alors, d'après le lemme de la proposition précédente, $f = g$ sur $\mathcal{P}(H) =]0,1]$, et donc $f = g$ partout, ce qui prouve qu'une fonctions quelconque hors de H est minimale, et min H = $\mathcal{C}([0,1])$.

2) Cas des espaces $L^p([0,1],dt)$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$.

Proposition : Dans $L^p([0,1],dt)$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, le saturé de la boule unité est l'espace entier.

Démonstration : Au vu du théorème III.1, il nous suffit de montrer que dans L^p, aucun hyperplan n'est optimal, et, pour cela, d'après la proposition III.6, il suffit de voir qu'aucun hyperplan n'est 1-complémenté. Mais nous avons vu que si P est une projection linéaire de norme 1, I-P est une projection linéaire de meilleure approximation sur ker P. Pour établir la proposition, il nous suffira donc de montrer que la projection de meilleure approximation sur une droite n'est jamais linéaire si $p \neq 2$.

Soit f_o une fonction quelconque de L^p; on peut trouver trois ensembles A, B et C, disjoints, avec $A \cup B \cup C = [0,1]$ et

$$\int_A |f_o(t)|^p \, dt = \int_B |f_o(t)|^p \, dt = \int_C |f_o(t)|^p \, dt$$

Soit D la droite $\{\lambda f_o, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Soit $x \in E$. La projection de meilleure approximation de x sur D est définie par :

$$\|x - Px\| \leq \|x - y\| \qquad \forall y \in D$$

On a donc $Px = \lambda_o f$, où λ_o est défini par

$$\|x - \lambda_o f_o\|_{L^p} = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|x - \lambda f_o\|_{L^p}$$

Choisissons $x_1 = f_o$ sur A, $= 0$ sur B et C, $x_2 = 0$ sur A et C, $= f_o$ sur B.

La valeur λ_1 réalise le minimum de

$$\int_A |\lambda f_o(t) - f_o(t)|^p \, dt + \int_B |\lambda f_o(t)|^p \, dt + \int_C |\lambda f_o(t)|^p \, dt$$

et donc le minimum de $|\lambda - 1|^p + 2|\lambda|^p$.

On a donc

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + 2^{1/p-1}}$$

De la même façon, on obtient $\lambda_2 = \dfrac{1}{1 + 2^{1/p-1}}$.

La fonction $x_1 + x_2$ vaut f_o sur A et B, 0 sur C. Le nombre λ définissant sa projection réalise donc le minimum de

$$2|\lambda - 1|^p + |\lambda|^p \ ;$$

on obtient $\lambda = \dfrac{2^{1/p-1}}{1 + 2^{1/p-1}}$.

Or on a $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ seulement si $2^{1/p-1} = 2$, soit $p = 2$, ce qui prouve notre proposition.

Remarquons toutefois que $L^p([0,1],dt)$ admet une norme équivalente pour laquelle le saturé de la boule unité ne contient pas de droites. En effet, si $1 < p < \infty$, le système de Haar (h_n) est une base inconditionnelle de L^p, et la norme

$$|x| = \sup_{(|\alpha_n|) \leq 1} \|\Sigma\, \alpha_n\, a_n\, h_n\| \ ,$$

si $x = \Sigma\, a_n\, h_n$, est équivalente à la norme usuelle de L^p. Le système de Haar est une base monotone inconditionnelle dans L^p muni de cette nouvelle norme. Il est facile de voir que l'ensemble des points dans les coordonnées sont toutes inférieures à 1 est un ensemble optimal qui ne contient pas de droites.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Fakhoury

[2] F. Bohnenblust : Subspaces of l^p_n spaces. Amer. J. of Maths 63-64-72 (1941)

[3] S. Kakutani : Some characterizations of Euclidean spaces. Jap. J. of Maths. 16(1939) 93-97.