J. Stern

Le problème des enveloppes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 25, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A24_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

LE PROBLEME DES ENVELOPPES

par J. STERN

Exposé n$^{\mathrm{o}}$ XXV

28 Mai 1975

Pour la définition de la notion de finie représentabilité et ses rapports avec les ultrapuissances d'espaces de Banach, on renvoie aux exposés VII-VIII. La densité d'un espace de Banach est le plus petit cardinal $\mathcal{K}$ tel qu'il existe un sous-ensemble dense de cardinal $\mathcal{K}$.

Définition 1 : On dit qu'un espace de Banach F est une enveloppe de E si

1) F est finiment représentable dans E

2) Tout espace de Banach X finiment représentable dans E et dont la densité ne dépasse pas celle de F s'injecte isométriquement dans F.

Dans [2], Lindenstrauss et Pełczynski ont posé le problème suivant :

- un espace de Banach séparable admet-il en général une enveloppe séparable?

On donne ici une preuve du résultat suivant([3]).

Théorème 2 : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un espace de Banach $1+\varepsilon$-isomorphe à ℓ^2 et qui n'admet pas d'enveloppe séparable.

Avant de donner la démonstration de ce théorème, on va introduire une notion issue de la logique.

§ 1. POINTS DEFINISSABLES DANS LES ESPACES DE BANACH

Définition 3 : Soit E un espace de Banach, x un point de E ; on dit que x est définissable si pour toute ultrapuissance $E^I/\mathcal{U}$ et pour toute injection isométrique $\varphi : E \to E^I/\mathcal{U}$, on a

$$\varphi(x) = \pm\, j(x) .$$

(où j représente l'injection canonique de E dans $E^J/\mathcal{U}$).

Remarque 4 : Un tel point est en particulier un vecteur propre pour les isométries de E.

Dans toute la suite, on note (x,y) le produit scalaire de ℓ^2, $|x| = (x,x)^{1/2}$ la norme et on considère la base canonique de ℓ^2, $e_1, \ldots, e_n, \ldots$

<u>Proposition 5</u> : Il existe une norme sur ℓ^2, notée $\|x\|$, telle que

1) $(1-\varepsilon)\|x\| \leq |x| \leq \|x\|$

2) Pour tout entier n, e_n est définissable dans l'espace ℓ^2 muni de la norme $\|x\|$.

Soit $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite strictement décroissante de nombres positifs, on suppose δ_o assez petit (on précisera plus loin).

Si δ est un nombre réel positif et e un point de ℓ^2 de norme 1 on note

- $H(e,\delta)$ l'hyperplan d'équation $(x,e) = 1 - \delta$
- $F(e,\delta)$ l'intersection de cet hyperplan avec la boule unité B de ℓ^2 ; on appelle <u>facette</u> un ensemble de la forme $F(e,\delta)$.

La norme cherchée est celle qui admet pour boule unité l'ensemble des points x de la boule unité B de ℓ^2 limités par les hyperplans $H(\pm e_n, \delta_n)$, c'est-à-dire tels que $|(x,e_n)| \leq 1 - \delta_n$.

On note E l'espace ℓ^2 muni de la nouvelle norme . Autrement dit, si on considère la réunion R des facettes $F(\pm e_n, \delta_n)$ (qu'on peut supposer deux à deux disjointes en prenant δ_o assez petit) et de la sphère unité S de ℓ^2, on a $\|x\| \leq 1$ si et seulement si $\{\lambda : \lambda x \in R\} \cap]-1,1[= \emptyset$.

Par suite, puisque $\frac{x}{|x|} \in R$ on a $|x| \leq \|x\|$ et puisque pour tout point d'une facette $F(\pm e_n, \delta_n)$ $|x| \geq 1 - \delta_o$ on a $|x| \geq (1-\delta_o)\|x\|$. Donc si on suppose $\delta_o \leq \varepsilon$ il vient :

<u>Lemme 6</u> : E est $(1-\varepsilon)^{-1}$-isomorphe à ℓ^2.

Soit maintenant $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur un ensemble I. On note $\mathbb{N}^*$ le quotient de $\mathbb{N}^I$ par la relation $\sim$:

$$\lambda \sim \lambda' \Leftrightarrow \{i : \lambda(i) = \lambda'(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Si $\lambda \in \mathbb{N}^*$ e_λ est l'élément $(e_{\lambda(i)})_{i \in I}$ de $\ell^{2\,I}/\mathcal{U}$.

<u>Lemme 7</u> : La boule unité de l'espace $E^I/\mathcal{U}$ est l'ensemble des points de la boule unité de $\ell^{2I}/\mathcal{U}$ limités par les hyperplans $H(\pm e_\lambda, \delta_\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{N}^*$ où

$\delta_\lambda = \lim_{\mathcal{U}} \delta_{\lambda(i)}$.

Il est clair que la norme de $E^I/\mathcal{U}$ est définie par

$$\|x\| \leq 1 \quad \text{si et seulement si}$$

$$\{\lambda : \lambda x \in R^I/\mathcal{U}\} \cap]-1,1[= \emptyset .$$

Or $R^I/\mathcal{U}$ est la réunion de la sphère $S^I/\mathcal{U}$ (qui est la sphère unité de $\ell^{2\ I}/\mathcal{U}$ et des facettes $F(\pm e_\lambda, \delta)$. En effet si $x_i \in R$ et $x_i \notin S$, il existe un indice $\lambda(i)$ et un réel $\varepsilon(i) = \pm 1$ tels que $x_i \in F(\varepsilon_{(i)} e_{\lambda(i)}, \delta_{\lambda(i)})$. Par suite si $\{i : \varepsilon_i = \varepsilon\} \in \mathcal{U}$ on a

$$x \in F(\varepsilon e_\lambda, \delta_\lambda)$$

Finalement la boule unité de $E^I/\mathcal{U}$ est bien l'espace limité par la sphère $S^I/\mathcal{U}$ et les hyperplans $F(\pm e_\lambda, \delta_\lambda)$.

<u>Lemme 8</u> : Soit P un plan de $E^I/\mathcal{U}$; alors l'intersection de la sphère unité de $E^I/\mathcal{U}$ et de P se compose d'arcs de cercle et de segments de droite. Il y a au plus 4 segments et une infinité de points n'appartiennent à aucun des quatre segments.

<u>Preuve</u> : Soient x et x' deux vecteurs de P. On note $\theta(x,x')$ l'angle de x, x', défini puisque P est muni d'une structure euclidienne. On remarque qu'il existe une fonction $\beta(\delta_o)$ tendant vers 0 avec δ_o telle que si x et x' appartiennent à des facettes distinctes de la sphère unité de $E^I/\mathcal{U}$

$$\theta(x,x') \geq \frac{\pi}{2} - \beta(\delta_o)$$

Si donc δ_o est assez petit un plan ne rencontre que quatre facettes au plus. La sphère unité de $E^I/\mathcal{U} \cap P$ se compose alors des intersections de P avec des facettes qui sont des segments de droite et de points de la sphère unité de $\ell^{2\ I}/\mathcal{U} \cap P$ (qui forment au plus quatre arcs de cercle).

<u>Lemme 9</u> : Soit φ une injection de E dans $E^I/\mathcal{U}$; alors φ est une injection isométrique de ℓ^2 dans $\ell^{2\ I}/\mathcal{U}$.

D'après ce qui précède, la norme $\ell^{2\,I}/\mathcal{U} \cap P$ est définie dans n'importe quel plan P de $E^I/\mathcal{U}$ par la propriété suivante : c'est l'unique norme hilbertienne sur P dont la sphère unité a une infinité de points en commun avec la sphère unité de $P \cap E^I/\mathcal{U}$ (les autres normes hilbertiennes sur P ont pour sphère unité des ellipses rencontrant la sphère unité de P en un nombre fini de points). Le lemme est conséquence de cette remarque.

<u>Lemme 10</u> : Soit φ une injection isométrique de E dans $E^I/\mathcal{U}$. Alors $\varphi(e_n) = \pm\, j(e_n)$ (où j est l'injection canonique de E dans $E^I/\mathcal{U}$).

<u>Preuve</u> : D'après le lemme 7, la sphère unité de $E^I/\mathcal{U}$ est formée des facettes $F(\pm\, e_\lambda, \delta_\lambda)$; $\lambda \in \mathbb{N}^*$ et de points de la sphère unité de ℓ^2.
Or puisque la suite δ_n est strictement décroissante, pour tout élément λ de $\mathbb{N}^*$ on a

- soit il existe n tel que $\lim \delta_{\lambda(i)} = \delta_n$
- soit $\lim\limits_{\mathcal{U}} \delta_{\lambda(i)} = \inf\limits_{n} \delta_n$.

Par conséquent, pour chaque n, il n'y a que deux facettes de diamètre (euclidien) $2\sqrt{2\,\delta_n - \delta_n^2}$. Si la conclusion du lemme est fausse on note k le premier entier tel que

$$\varphi(e_k) \neq j(e_k) \quad \text{et} \quad \varphi(e_k) \neq -j\,(e_k).$$

Puisque $\varphi(e_k)$ est le centre d'un segment de longueur euclidienne $2\sqrt{2\delta_n - \delta_n^2}$ qui est inclus dans la sphère unité, e_k appartient à l'une des facettes $F(\pm\, j(e_i), \delta_i)$ pour $i < n$. Mais ceci contredit le fait que les distances $\|j(e_i) \pm j(e_n)\|$, $i < n$, diffèrent peu de $\sqrt{2}$.

§ 2. <u>ESPACES $1+\varepsilon$-ISOMORPHES A ℓ^2 ET QUI N'ADMETTENT PAS D'ENVELOPPE SEPARABLE.</u>

Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération sans répétition de l'ensemble des nombres rationnels. On se donne comme précédemment une suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec δ_o assez petit. On suppose de plus $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = \delta > 0$.

On munit ℓ^2 d'une nouvelle norme dont la boule unité est l'espace limité par

- la sphère unité de ℓ^2
- les hyperplans $H(\pm e_n, \delta_n)$
- ceux des hyperplans $H(\frac{\pm e_n \pm e_m}{\sqrt{2}}, \delta)$ qui sont tels que l'on ait

  - $n < m$ et $q_n < q_m$ ou bien
  - $m < n$ et $q_m < q_n$.

On note E l'espace ℓ^2 muni de cette nouvelle norme .

<u>Lemme 1</u> : E est $(1-\varepsilon)^{-1}$-isomorphe à ℓ^2 et pour tout entier n, le point e_n est définissable dans E.

La preuve est la même que plus haut à cela près que les sphères unité des espaces $P \cap E^I/\mathcal{U}$ peuvent comporter cette fois huit segments.

<u>Lemme 2</u> : Pour chaque nombre irrationnel ξ, il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}_\xi$ sur $\mathbb{N}$ et un élément (a_ξ) de $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}_\xi$ tel que

- $\|a_\xi \pm e_m\| = \sqrt{2}(1-\delta)^{-1}$ si $q_m < \xi$
- $\|a_\xi \pm e_m\| = \sqrt{2}$ si $q_m > \xi$

<u>Preuve</u> : Soit $\mathcal{U}_\xi$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ tel que $\lim_\xi q_n = \xi$. Dans l'espace $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}_\xi$ on pose $a_\xi = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a

$$\|a_\xi \pm e_m\| = \lim_{\mathcal{U}_\xi} \|e_n \pm e_m\| .$$

On suppose d'abord $\xi > q_m$ alors

$$\{n : m < n \text{ et } q_m < q_n\} \in \mathcal{U}_\xi \quad \text{donc}$$

$$\{n : \|e_n \pm e_m\| = \sqrt{2}(1-\delta)^{-1}\} \in \mathcal{U} .$$

soit

$$\|a_\xi \pm e_m\| = \sqrt{2}(1-\delta)^{-1}$$

Si au contraire $\xi < q_m$ alors $\{n : m < n \text{ et } q_m > q_n\} \in \mathcal{U}$ et par suite

$$\|a_\xi \pm e_m\| = \sqrt{2}.$$

Il reste à voir que E n'a pas d'enveloppe séparable.

Soit X une enveloppe de E. On note ψ une injection isométrique de X dans une ultrapuissance $E^I/\mathcal{U}$. Si E_ξ est le sous-espace de $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}_\xi$ engendré par E et a_ξ. Il existe une injection isométrique de E_ξ dans X soit ψ_ξ. On pose $\varphi_\xi = \psi \circ \psi_\xi$ et

$$b_\xi = \varphi_\xi(a_\xi) .$$

D'après le lemme 1

$$\varphi_\xi(e_m) = \pm j(e_m)$$

Donc dans $\psi(X)$

$$\|b_\xi \pm j(e_m)\| = \sqrt{2}(1-\delta)^{-1} \quad \text{si} \quad q_m < \xi$$

$$\|b_\xi \pm j(e_m)\| = \sqrt{2} \quad \text{si} \quad \xi < q_m$$

Dans ces conditions, si $\xi < q_m < \xi'$ on a

$$\|b_\xi - b_{\xi'}\| \geq \|b_{\xi'} - j(e_m)\| - \|b_\xi - j(e_m)\| \geq \sqrt{2}((1-\delta)^{-1} - 1)$$

On a une famille $(b_\xi)_{\xi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}}$ d'éléments dont les distances mutuelles sont au moins égales à un réel $\alpha > 0$. Donc X n'est pas séparable.

Il peut cependant exister une enveloppe qui a la puissance du continu. Plus généralement, le théorème suivant est la conséquence d'un résultat de Keisler sur les modèles $\aleph_1$-saturés (cf. [1]).

<u>Théorème 3</u> : On suppose l'hypothèse du continu vraie ; alors tout espace de Banach séparable et de dimension infinie admet une enveloppe de densité $\aleph_1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. C. Chang et H. J. Keisler : Model theory, North Holland, 1973.

[2] J. Lindenstrauss et A. Pełczynski : Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968) 275-326.

[3] J. Stern : Le problème des enveloppes d'espaces de Banach, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris , t. 280 (1975), p. 797 - 799.