B. MAUREY

**Sous-espaces complémentés de $L^P$, d' après P. Enflo**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1974-1975), exp. n° 3, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A3_0>

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

# SOUS-ESPACES COMPLEMENTES DE $L^p$, D'APRES P. ENFLO

par B. MAUREY

Exposé N° III

20 Novembre 1974

Un problème classique de la théorie des espaces de Banach est de chercher à caractériser les sous-espaces complémentés d'un espace donné. On sait par exemple qu'un sous-espace de dimension infinie complémenté dans $l^p$ est isomorphe à $l^p$ [2]. Cela n'est pas vrai pour $L^p$ : on voit facilement que $l^p$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de $L^p$, et pour $1 < p < \infty$, $l^2$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de $L^p$ (prendre un sous-espace de $L^p$ engendré par des variables de Rademacher ou des variables gaussiennes indépendantes). On a cependant dans $L^p$ le résultat suivant, dû à P.Enflo:

<u>Théorème 1</u> :Soit p tel que $1 \leq p < \infty$. Si $L^p([0,1],dt)$ est somme directe topologique de deux sous-espaces E et F, l'un des deux espaces E ou F est isomorphe à $L^p([0,1],dt)$.

Si $(\Omega,\mathcal{A},P)$ est un espace de probabilité, et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$, nous désignerons par $E^{\mathcal{B}}$ l'opérateur d'espérance conditionnelle sur $\mathcal{B}$. Si $B \in \mathcal{A}$, nous désignerons par $L^p(B,\mathcal{B})$ (resp. $L^p_0(B,\mathcal{B})$) l'espace des fonctions $f \in L^p$ $\mathcal{B}$-mesurables, nulles en dehors de B (resp: $\mathcal{B}$-mesurables nulles en dehors de B et telles que $\int fdP = 0$.) On désignera par q l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Nous démontrerons le théorème 1 par l'intermédiaire du résultat suivant,

<u>Théorème 2</u> : Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité,P étant supposée diffuse. Soient $T_1$ et $T_2$ deux opérateurs linéaires continus de $L^p(\Omega,\mathcal{A},P)$ dans lui-même, avec $1 \leq p < \infty$, et $T_1 + T_2 = Id$.

Il existe un indice $i \in \{1,2\}$, un ensemble $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \geq \frac{1}{2}$ et une constante c telle que $\frac{1}{2} \leq c \leq \sup\{\|T_1\|, \|T_2\|\}$ possédant la propriété suivante:

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous tribu $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ telle que $B \in \mathcal{C}$, et que $L^p(B,\mathcal{C})$ soit isomorphe à $L^p([0,1],dt)$, avec de plus:

1) $\forall f \in L^p_0(B,\mathcal{C})$, $\|E^{\mathcal{C}}(1_B T_i(f)) - cf\| \leq \varepsilon \|f\|$

2) Il existe un ensemble $C \in \mathcal{C}$, $C \subset B$, $P(C) > 0$ tel que :

$\forall f \in L^p(C,\mathcal{C})$, $\|E^{\mathcal{C}}(1_C T_i(f)) - cf\| \leq 3\varepsilon \|f\|$

<u>Remarque 1</u> : La propriété 1) (resp 2) ) implique que la restriction de $T_i$ à $L^p_o(B,\mathcal{C})$ (resp. $L^p(C,\mathcal{C})$) est un isomorphisme de $L^p_o(B,\mathcal{C})$ sur $T_i(L^p_o(B,\mathcal{C}))$ (resp: de $L^p(C,\mathcal{C})$ sur $T_i(L^p(C,\mathcal{C}))$.) En effet: si $f\in L^p_o(B,\mathcal{C})$ :

$$(c-\varepsilon)\ \|f\| \le \|E^{\mathcal{C}}\ 1_B\ T_i(f)\| \le \|1_B\ T_i(f)\| \le \|T_i(f)\|$$

(même raisonnement si $f\in L^p(C,\mathcal{C})$).

Démontrons le théorème 2 : désignons par X la boule unité de $L^\infty(\Omega,\mathcal{A},P)$, munie de la topologie $\sigma(L^\infty,L^1)$. Si $A\in\mathcal{A}$, nous poserons:

$$X(A) = \{\ h\in X\ ;\ |h| = 1_A \text{ et } \int hdP = 0\ \}$$

(Autrement dit, un élément de $X(A)$ est de la forme $1_{A_1} - 1_{A_2}$ , avec $A = A_1\cup A_2$ , $P(A_1) = P(A_2) = 1/2\ P(A)$.)

Nous munirons $X(A)$ de la topologie induite par celle de X, et nous poserons , si S est un opérateur linéaire continu de $L^p(\Omega,\mathcal{A},P)$ dans lui-même, $1\le p<\infty$ : $\tilde{Q}_S(A) = \lim\sup\ \{\ <S\,h,\ h>\ ;\ h\to 0,\ h\in X(A)\ \}$
(On remarquera que, P étant diffuse, 0 est toujours adhérent à $X(A)$)

Notons que :

$$(1)\qquad \begin{cases} |\tilde{Q}_S(A)| \le \|S\|.P(A) \\ \tilde{Q}_{S_1+S_2}(A) \le \tilde{Q}_{S_1}(A) + \tilde{Q}_{S_2}(A) \end{cases}$$

La deuxième propriété est évidente. La première résulte de :

$$|<Sh,h>| \le \|S\|\ \|h\|_p\ \|h\|_q = \|S\|\ P(A)$$

Remarquons que si S est l'opérateur identique, on a $\tilde{Q}_S(A) = P(A)$.

<u>Lemme 1</u> : Pour tout $h\in L^\infty$, on a :

$$\lim\sup\{\ <S(h+k)\ ,h+k>\ ;\ k\to 0,\ k\in X(A)\ \} = <Sh\ ,\ h> + \tilde{Q}_S(A)$$

Démonstration : Notons que $Sh \in L^p$, donc $Sh \in L^1$, et que S étant continu de $L^p$ dans $L^p$ est également continu de $\sigma(L^\infty, L^1)$ dans $\sigma(L^1, L^\infty)$. Par conséquent :

$$\lim_{k \to 0} (< S(h), k > + < h, S(k) > ) = 0$$

On en déduit facilement le résultat.

Lemme 2 : Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{Q}$. La somme $\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_S(A_i)$ est une valeur d'adhérence de $< S(\sum_{i=1}^{n} h_i), \sum_{i=1}^{n} h_i >$, lorsque $h_1, \ldots, h_n$ tendent vers zéro dans X, avec $h_i \in X(A_i)$.

Démonstration : Il est clair que

$$\limsup_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_1 \in X(A_1)}} \left( \cdots \limsup_{\substack{h_{n-1} \to 0 \\ h_{n-1} \in X(A_{n-1})}} \left( \limsup_{\substack{h_n \to 0 \\ h_n \in X(A_n)}} < S(\sum_{i=1}^{n} h_i), \sum_{i=1}^{n} h_i > \right)\right) = b$$

est une valeur d'adhérence de $< S(\sum_{i=1}^{n} h_i), \sum_{i=1}^{n} h_i >$.

Par ailleurs d'après le lemme 1 :

$$\limsup_{\substack{h_n \to 0 \\ h_n \in X(A_n)}} < S\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right), \sum_{i=1}^{n} h_i > = < S\left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i\right), \sum_{i=1}^{n-1} h_i > + \tilde{Q}_S(A_n),$$

d'où l'on déduit de proche en proche :

$b = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_S(A_i)$ , ce qui démontre le lemme.

Lemme 3 : Si $A_1, A_2 \in \mathcal{Q}$ sont disjoints, on a :

$$\tilde{Q}_S(A_1 \cup A_2) \geq \tilde{Q}_S(A_1) + \tilde{Q}_S(A_2)$$

Si $A_1$ et $A_2$ sont disjoints, et si $h_1 \in X(A_1)$ , $h_2 \in X(A_2)$ ,on a

$h_1+h_2 \in X(A_1 \cup A_2)$. D'après le lemme 2, $\tilde{Q}_S(A_1) + \tilde{Q}_S(A_2)$ représente une valeur d'adhérence de $< S(h_1+h_2), h_1+h_2 >$, lorsque $h_1$, $h_2$ tendent vers zéro, alors que $\tilde{Q}_S(A_1 \cup A_2)$ représente la plus grande valeur d'adhérence de $< S(h), h >$ lorsque h tend vers zéro dans $X(A_1 \cup A_2)$. On a donc bien l'inégalité annoncée.

Posons maintenant :

$$Q_S(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_S(A_i) \quad ; \quad A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \text{ disjoints} \}$$

On peut encore définir $Q_S(A)$ de la façon suivante : si $\pi = (A_i)_{i=1,\dots n}$ est une partition finie de A, posons :

$$Q_S(A,\pi) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_S(A_i)$$

Si $\pi_1$ est une partition plus fine que $\pi_2$, ce que nous noterons $\pi_2 \leq \pi_1$, on a d'après le lemme 3 :

$$Q_S(A,\pi_1) \leq Q_S(A,\pi_2)$$

Le filtre $(Q_S(A,\pi))_\pi$ est donc décroissant pour l'ordre introduit sur les partitions, donc convergent quand $\pi \to \infty$ au sens de cet ordre, et on voit facilement que :

$$Q_S(A) = \lim_{\pi \to \infty} Q_S(A,\pi)$$

On déduit très simplement de cette propriété que si $A_1, A_2 \in \mathcal{a}$ sont disjoints :

$$Q_S(A_1 \cup A_2) = Q_S(A_1) + Q_S(A_2)$$

Par ailleurs, les inégalités (1) donnent :

$$(2) \quad \begin{cases} |Q_S(A)| \leq \|S\|\ P(A) \\ Q_{S_1+S_2}(A) \leq Q_{S_1}(A) + Q_{S_2}(A) \end{cases}$$

Il résulte de ce qui précède que $Q_S$ est une mesure $\sigma$-additive ( pas nécessairement positive ) absolument continue par rapport à P, et plus précisément admettant une densité bornée par rapport à P :

$$Q_S = k_S P \ , \quad \text{avec} \quad |k_S| \leq \|S\| \quad \text{d'après (2).}$$

Lemme 4 : Soient $\varepsilon > 0$ donné, $A \in \mathcal{A}$, et V un voisinage de zéro dans X. On peut trouver $h \in X(A) \cap V$ tel que $|Q_S(A) - \langle Sh, h\rangle| \leq \varepsilon$ .

Démonstration : Par définition, on peut trouver une partition finie $(A_1, \ldots A_n)$ de A telle que

$$\left|Q_S(A) - \sum_{i=1}^{n} \widetilde{Q}_S(A_i)\right| \leq \varepsilon/2$$

On applique ensuite le lemme 2.

Revenons maintenant à la situation du théorème 2 : soit T un opérateur linéaire continu de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans lui-même. Introduisons les mesures $Q_T$ et $Q_{1-T}$. On aura d'après (2) :

$$Q_T + Q_{1-T} \geq Q_1 = P$$

En introduisant les densités $Q_T = kP$ , $Q_{1-T} = k'P$, on déduit :

$$k + k' \geq 1$$

Posons $B = \{k \geq 1/2\}$, $B' = \{k' \geq 1/2\}$. On a $P(B \cup B') = 1$, donc l'un des deux ensembles a une probabilité $\geq 1/2$. Supposons par exemple que $P(B) \geq 1/2$ dans la suite. Nous noterons désormais simplement $Q(A)$ au lieu de $Q_T(A)$.

Nous allons construire sur l'ensemble B une suite $(h_n)_{n \geq 0}$ de fonctions qui sera d'une certaine façon une "reproduction" du système de Haar sur $[0,1]$ (cf. exposé 2).

On définit donc par récurrence une suite $(h_n)_{n \geq 0}$ de fonctions, nulles en dehors de B, et ne prenant que les valeurs 1, -1 et 0 de la façon suivante :

- $h_o = 1_B$

- soit $m > 0$, et soit n tel que $2^n \leq m < 2^{n+1}$.

Posons $h = m-2^n$, et définissons $m'$ par $m'=0$ si $m=1$, et pour $m > 1$ :

$$m' = 2^{n-1} + \frac{h}{2} \text{ si } h \text{ est pair, } m' = 2^{n-1} + \frac{h-1}{2} \text{ si } h \text{ est impair.}$$

Supposons que les fonctions $h_o, h_1, \ldots h_{m-1}$ soient déjà déterminées. Définissons un ensemble $B_m$ par : $B_m = \{h_{m'} = 1\}$ si $h$ est pair, $B_m = \{h_{m'} = -1\}$ si $h$ est impair.

Nous demanderons que la fonction $h_m$ vérifie les propriétés suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll}
a) & h_m \in X(B_m) \\[2ex]
b) & |\langle T(h_m), h_m\rangle - Q(B_m)| \leq \frac{\varepsilon}{3} 2^{-(m+1)} P(B_m) \\[2ex]
c) & |\langle h_i, Th_m\rangle| < (\frac{\varepsilon}{3} 2^{-(m+1)} \|h_m\|_p) \cdot (2^{-(i+1)} \|h_i\|_q) \\
 & \text{pour } i = 0,1,\ldots(m-1) \\[2ex]
d) & |\langle h_m, Th_i\rangle| < (\frac{\varepsilon}{3} 2^{-(i+1)} \|h_i\|_p) \cdot (2^{-(m+1)} \|h_m\|_q) \\
 & \text{pour } i = 0,1,\ldots(m-1) \\[2ex]
e) & |\langle k, h_m\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{6} 2^{-(m+1)} P(B_m)
\end{array}\right.$$

($k$ étant la densité de $Q$ par rapport à $P$.)

Démontrons que le choix de $h_m$ est possible : notons tout d'abord que les conditions c,d et e signifient simplement que $h_m$ doit appartenir à un certain voisinage de zéro $V_m$ dans $X$. D'après le lemme 4, on peut trouver $h_m \in X(B_m) \cap V_m$ vérifiant la condition b) , et ceci établit la possibilité de la récurrence. On remarquera que la suite $(h_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires 2 à 2 orthogonales.

Désignons par $\mathcal{B}$ la sous-tribu de $\mathcal{Q}$ engendrée par la suite $(h_n)_{n \geq 0}$, et désignons par $\mathcal{B}_m$ la sous-tribu engendrée par $(h_o, h_1, \ldots h_m)$

On en déduit, par définition de l'espérance conditionnelle comme projecteur orthogonal sur $L^2(\mathcal{B}_m)$ ,pour $f \in L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$

$$E^{\mathcal{B}_m}(1_B f) = \sum_{i=0}^{m} < f, \frac{h_i}{\|h_i\|_2} > \frac{h_i}{\|h_i\|_2}$$

Cette formule peut encore s'écrire :

$$E^{\mathcal{B}_m}(1_B f) = \sum_{i=0}^{m} < f, \frac{h_i}{\|h_i\|_q} > \frac{h_i}{\|h_i\|_p}$$

(car $(\|h_i\|_2)^2 = \|h_i\|_q \|h_i\|_p = P(B_i)$) , et elle reste valable pour $f \in L^p(\Omega,\mathcal{A},P)$. On en déduit à la limite :

$$E^{\mathcal{B}}(1_B f) = \sum_{i=0}^{\infty} < f, \frac{h_i}{\|h_i\|_q} > \frac{h_i}{\|h_i\|_p}$$

Notons, si $f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{h_i}{\|h_i\|_p}$ que :

$$|\alpha_n| = \|E^{\mathcal{B}_n} f - E^{\mathcal{B}_{n-1}} f\| \leq 2\|f\|$$

<u>Lemme 5 :</u> Soit S un opérateur linéaire continu défini sur $L_o^p(B,\mathcal{B})$, à valeurs dans un espace de Banach G, et tel que :

$$\forall n \geq 1 , \quad \|S(h_n)\| \leq \varepsilon 2^{-(n+1)} \|h_n\|_p$$

On a alors : $\|S\| \leq \varepsilon$

<u>Démonstration :</u> Soit $f \in L_o^p(B,\mathcal{B})$. On peut écrire :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{h_n}{\|h_n\|_p} \qquad \text{(dire que } \alpha_o = 0 \text{ équivaut à } \int f dP = 0)$$

On a :

$$\|S(f)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \left\| \frac{S(h_n)}{\|h_n\|_p} \right\| \leq 2\|f\| \ \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)} = \varepsilon\|f\|,$$

ce qui démontre le lemme.

Définissons une fonction g par :

$g = E^{\mathcal{B}}k$ sur B , et $g = 1$ sur $B^c$ .

Nous allons montrer que $E^{\mathcal{B}_m}g$ converge rapidement vers g . Soit $m \geq 1$ . L'ensemble $B_m$ est un atome de la tribu $\mathcal{B}_{m-1}$. Par conséquent :

$$E^{\mathcal{B}_{m-1}}(1_{B_m} k) = \frac{\int_{B_m} kdP}{P(B_m)} 1_{B_m} = \frac{Q(B_m)}{P(B_m)} 1_{B_m} = \sum_{n=0}^{m-1} < 1_{B_m} k, \frac{h_n}{\|h_n\|_q} > \frac{h_n}{\|h_n\|_p}$$

D'autre part,

$$1_{B_m} g - E^{\mathcal{B}_{m-1}}(1_{B_m} k) = 1_{B_m} [E^{\mathcal{B}}(k) - E^{\mathcal{B}_{m-1}}(k)]$$

$$= 1_{B_m} \sum_{n=m}^{\infty} < k, \frac{h_n}{\|h_n\|_q} > \frac{h_n}{\|h_n\|_p}$$

D'aprés (3)e), on a :

$$\left|< k, \frac{h_n}{\|h_n\|_q} > \frac{h_n}{\|h_n\|_p}\right| \leq \varepsilon \frac{2}{6}^{-(n+1)}$$

donc :

$$1_{B_m} \left|g - \frac{Q(B_m)}{P(B_m)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} 2^{-(m+1)},$$

d'où l'on déduit :

$$\text{(4)} \qquad \left\|gh_m - \frac{Q(B_m)}{P(B_m)}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{3} 2^{-(m+1)} \|h_m\|_p$$

Définissons un opérateur linéaire continu S de $L^p_o(\Gamma, \mathcal{B})$ dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$S(f) = E^{\mathcal{B}}(1_B T(f)) - gf$$

Soit $n \geq 1$, et cherchons une majoration de $\|S(h_n)\|$.

On a :

$$S(h_n) = \sum_{i=0}^{n-1} < Th_n, \frac{h_i}{\|h_i\|_q} > \frac{h_i}{\|h_i\|_p} + \sum_{i=n+1}^{\infty} < Th_n, \frac{h_i}{\|h_i\|_q} > \frac{h_i}{\|h_i\|_p}$$

$$+ [< \frac{Th_n, h_n}{P(B_n)} > - g] \, h_n$$

Les deux premiers termes de la somme se majorent en utilisant (3)c) et d) . Pour le dernier, on a d'après (3)b) et (4) :

$$\left\| \left( \frac{<Th_n, h_n>}{P(B_n)} - g \right) h_n \right\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} 2^{-(n+1)} \|h_n\|_p ,$$

d'où finalement :

$$\|S(h_n)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} 2^{-(n+1)} \|h_n\|_p \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} + \frac{2\varepsilon}{3} 2^{-(n+1)} \|h_n\|_p$$

soit

$$\|S(h_n)\| \leq \varepsilon . 2^{-(n+1)} \|h_n\|_p ,$$

ce qui implique $\|S\| \leq \varepsilon$ d'après le lemme 5.

On a donc obtenu jusqu'à présent :

(5) $$\forall f \in L_o^p(B,\mathcal{B}), \quad \|E^{\mathcal{B}}(1_B T(f)) - gf\| \leq \varepsilon \|f\|$$

La dernière étape de la démonstration, qui consiste à remplacer g par une constante, nous a été indiquée par P. Assouad. Elle est fondée sur le lemme suivant :

<u>Lemme 6</u> : Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace de probabilité, avec $\mu$ diffuse, et f une fonction $\mu$- intégrable. Il existe une sous-tribu Y de $\mathcal{X}$, telle que $L^p(X,Y,\mu)$ soit isomorphe à $L^p([0,1],dt)$, et telle que $E^Y f$ soit une constante (nécessairement égale à $\int f d\mu$ )

La démonstration utilise un théorème de Liapounov(cf [1] par exemple):si $\lambda$ est une mesure $\sigma$- additive bornée et <u>diffuse</u> à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, définie sur $(X,\mathcal{X})$,l'ensemble $\{\lambda(C);\ C \subset A\}$ est un convexe fermé pour tout $A \in \mathcal{X}$ .

Définissons $\lambda$ par :

$$\lambda(A) = (\mu(A), \int_A f d\mu)$$

Si $A = \emptyset$, $\lambda(A) = 0$, et pour $A = X$, on trouve le point $(1, \int f d\mu)$. D'après le théorème de Liapounov, on peut trouver un ensemble $A_1$ tel que:

$$(\mu(A_1) \ , \int_{A_1} f d\mu) = \frac{1}{2}(1, \int f d\mu)$$

Par différence, on a également :

$$(\mu(A_1^c), \int_{A_1^c} f d\mu) = \frac{1}{2}( 1, \int f d\mu)$$

On pose $A_{-1} = A_1^c$, et on utilise à nouveau le théorème de Liapounov pour trouver par récurrence une suite $A_{\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_n}$ de parties de X telles que

$$A_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} = A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n, 1} \cup A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n, -1}$$

$$(\mu(A_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}) \ , \int_{A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n}} f d\mu) = 2^{-n}(1, \int f d\mu) \quad .$$

Désignons par $Y_n$ la sous-tribu engendrée par la partition $(A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n})$ , et par Y la sous tribu engendrée par la suite $(Y_n)_n$ .

Si $x \in A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n}$ on a :

$$(E^{Y_n} f)(x) = \frac{1}{\mu(A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n})} \int_{A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n}} f d\mu = \int f \, d\mu.$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient que $E^Y f$ est égale à la constante $\int f \, d\mu$. Pour finir, il est bien clair que $L^p \ (X, Y, \mu)$ est isomorphe à $L^p([0,1], dt)$.

Achevons la démonstration du théorème 2. Considérons l'espace de probabilité $(B, \widetilde{\mathcal{B}}, \frac{\widetilde{P}}{P(B)})$, où $\widetilde{\mathcal{B}} = \{C \in \mathcal{B}; C \subset B\}$ et où $\widetilde{P}$ désigne la restriction de P à B.

D'après le lemme 6, il existe une sous-tribu $\widetilde{\mathcal{C}} \subset \widetilde{\mathcal{B}}$ telle que :

$$\forall C \in \widetilde{\mathcal{C}} \ , \ \int_C g d\widetilde{P} = c \, \widetilde{P}(C) = c \, P(C) \ ,$$

avec $c = \frac{1}{P(B)} \int_B g dP$.

Rappelons que l'on avait $1/2 \leq k \leq \|T\|$ sur B, donc aussi $1/2 \leq g \leq \|T\|$ sur B, et par conséquent :

$$1/2 \leq c \leq \|T\| \ .$$

Désignons par $\mathcal{C}$ la sous-tribu de $\mathcal{B}$ engendrée par $\widetilde{\mathcal{C}}$ et $B^c$. On aura alors

$$E^{\mathcal{C}}(1_B \, g) = c \, 1_B$$

Soit $f \in L^p_o(B, \mathcal{C})$. On a $gf = (1_B \, g) \, f$, et on déduit de (5) :

$$\|E^{\mathcal{C}}(E^{\mathcal{B}}(1_B \, T(f)) - (1_B \, g) f) \| \leq \varepsilon \, \|f\|$$

Or :

$$E^{\mathcal{C}}(E^{\mathcal{B}}(1_B \, T(f)) - (1_B \, g).f) = E^{\mathcal{C}}(1_B \, T(f)) - (c1_B).f = E^{\mathcal{C}}(1_B \, T(f)) - cf \ ,$$

ce qui achève la démonstration du point 1) dans le théorème 2 .

Pour démontrer le point 2), choisissons un ensemble $C \in \mathcal{C}$, $C \subset B$ tel que :

$$P(C) > 0, \text{ et : } \left\| \frac{1}{P(B)} \, 1_C \right\| \leq \varepsilon/2c \ ; \ \left\| 1_C \, \frac{T(1_B)}{P(B)} \right\| \leq \varepsilon/2$$

Soit $f \in L^p(C, \mathcal{C})$. La fonction $(f - \frac{Ef}{P(B)} \, 1_B)$ (où $Ef = \int f dP$) appartient à $L^p_o(B, \mathcal{C})$, donc :

$$\|E^{\mathcal{C}} 1_B \, T(f - \frac{Ef}{P(B)} \, 1_B) - c(f - \frac{Ef}{P(B)} \, 1_B) \| \leq \varepsilon \, \|f - \frac{Ef}{P(B)} \, 1_B\|$$

Par ailleurs, on a $|Ef| \leq \|f\|$, mais aussi $\|\frac{Ef}{P(B)} 1_B\| \leq \|f\|$ (car $\frac{Ef}{P(B)} 1_B$ est l'espérance conditionnelle de f sur la tribu engendrée par B et $B^c$), donc en multipliant par $1_C$ :

$$\|E^{\mathcal{C}} 1_C T(f) - cf - E^{\mathcal{C}} 1_C T(\frac{Ef}{P(B)} 1_B) + c \frac{Ef}{P(B)} 1_C\| \leq 2\varepsilon \|f\|$$

d'où :

$$\|E^{\mathcal{C}} 1_C T(f) - cf\| \leq \|f\| [2\varepsilon + \|T(\frac{1_B}{P(B)}) 1_C\| + \| \frac{c 1_C}{P(B)} \|] \leq 3\varepsilon \|f\|,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Pour démontrer le théorème 1 à partir du théorème 2, on utilise un résultat de A. Pełczyński [2] :

<u>Proposition</u> : Soit E un sous-espace complémenté de $L^p([0,1],dt)$ (en abrégé: $L^p$). Si E contient un sous-espace complémenté isomorphe à $L^p$, l'espace E lui-même est isomorphe à $L^p$.

<u>Démonstration</u>: On peut écrire :

$$L^p = E \oplus F \text{ , et } E = L^p \oplus G \text{ .}$$

Notons d'abord que :

$$\begin{aligned} E = L^p \oplus G \approx (L^p \oplus L^p) \oplus G &= L^p \oplus (L^p \oplus G) \\ &= L^p \oplus E \end{aligned}$$

( $U \approx V$ signifiant U isomorphe à V) .

On a d'autre part, en notant $(E \oplus E \oplus \ldots)_p$ la p- somme d'une suite d'exemplaires de E (autrement dit l'espace $l^p(E)$)

$$\begin{aligned} L^p \approx (L^p \oplus L^p \oplus \ldots)_p &\approx ((E \oplus F) \oplus (E \oplus F) \oplus \ldots)_p \\ &\approx (E \oplus (F \oplus E) \oplus (F \oplus E) \oplus \ldots)_p \end{aligned}$$

$$\approx E \oplus [(F \oplus E) \oplus (F \oplus E) \oplus \ldots]_p \approx E \oplus L^p \approx E ,$$

ce qui démontre la proposition.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 1. Supposons que $L^p = E \oplus F$, désignons par $T_1$ la projection de $L^p$ sur E (parallèlement à F), et soit $T_2 = 1 - T_1$.

Posons

$$\varepsilon = \frac{1}{16 \sup (\|T_1\|, \|T_2\|)}$$

D'après le théorème 2, on aura, par exemple pour $T_1$, la situation suivante : il existe une sous-tribu $\mathscr{C}$, un ensemble $C \in \mathscr{C}$, $P(C) > 0$ une constante c, $1/2 \leq c \leq \|T_1\|$ tels que :

$$\forall f \in L^p(C, \mathscr{C}) \quad \|E^{\mathscr{C}} 1_C T_1(f) - cf\| \leq \varepsilon \|f\|$$

On en déduit en particulier pour $f \in L^p(C, \mathscr{C})$ :

$$\|T_1(f)\| \geq (c - \varepsilon) \|f\| \geq \frac{1}{4} \|f\|$$

De plus, $\mathscr{C}$ peut être choisie telle que $L^p(C, \mathscr{C})$ soit isomorphe à $L^p = L^p([0,1], dt)$.

Considérons le sous-espace G de E défini par :

$$G = T_1(L^p(C, \mathscr{C})).$$

D'après ce qui précède, la restriction de $T_1$ à $L^p(C, \mathscr{C})$ est un isomorphisme de $L^p(C, \mathscr{C})$ sur G, donc G est isomorphe à $L^p$.

Nous allons montrer pour finir que G est complémenté dans E. Définissons un opérateur linéaire U sur $L^p$ par :

$$U(f) = T_1(E^{\mathscr{C}} 1_C f)$$

Il est clair que $U(L^p) \subset G$, de sorte que la restriction $\tilde{U}$ de U à G est un opérateur de G dans lui-même. Nous allons voir que $\tilde{U}$ est un isomorphisme de G sur lui-même.

Soit $g \in G$. On peut écrire $g = T_1(f)$, avec $f \in L^p(C,\mathcal{C})$; On a :

$$U(g) - cg = T_1\,\{E^{\mathcal{C}} 1_C T_1(f) - cf\}$$

donc :

$$\|U(g) - cg\| \leq \|T_1\| \; \|E^{\mathcal{C}} 1_C T_1(f) - cf\|$$
$$\leq \varepsilon \|T_1\| \|f\| \leq 4\varepsilon \|T_1\| \|g\| \leq \frac{\|g\|}{4} \leq \frac{c}{2} \|g\|,$$

ce qui montre que $\|\widetilde{U} - c\,Id_G\| \leq \frac{c}{2}$. Cela prouve que $\widetilde{U}$ est une bijection de $G$ sur $G$. Soit $V = (\widetilde{U})^{-1}$, et posons pour $f \in L^p$ :

$$\pi(f) = V \circ U(f)$$

Cet opérateur est bien défini, puisque $U(f) \in G$, il est à valeurs dans G, et $\pi(g) = g$ si $g \in G$. L'opérateur $\pi$ est donc un projecteur linéaire de $L^p$ sur G. A fortiori G est complémenté dans E (en prenant simplement la restriction de $\pi$ à E). L'espace E est complémenté dans $L^p$, et contient un sous-espace complémenté isomorphe à $L^p$. On en déduit que E est isomorphe à $L^p$ d'après la proposition, et ceci achève la démonstration.

****

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Karlin et Studden, Tchebycheff systems, Pure and applied Math. vol XV

[2] A.Pełczynski, Projections in certain Banach spaces, Studia Math.19 (1960) p.209 - 228.