L. SCHWARTZ

**Fonctions mesurables et $*$-scalairement mesurables, mesures banachiques majorées, martingales banachiques, et propriété de Radon-Nikodym**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1974-1975), exp. nº 4, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A4_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

*17, rue Descartes*

*75230 Paris Cedex 05*

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

# FONCTIONS MESURABLES ET *-SCALAIREMENT MESURABLES, MESURES BANACHIQUES MAJOREES, MARTINGALES BANACHIQUES, ET PROPRIETE DE RADON-NIKODYM

par L. SCHWARTZ

Exposé n° IV

27 Novembre 1974

## § 1. ESPACES DE FONCTIONS MESURABLES ET $*$-SCALAIREMENT MESURABLES

Une mesure $\lambda \geq 0$ sur un ensemble $\Omega$ muni d'une tribu $\mathcal{O}$ est une fonction sur $\mathcal{O}$, à valeurs dans $[0,+\infty]$, dénombrablement additive. Nous supposerons toujours qu'elle est essentielle, c.à.d. que, pour $B \in \mathcal{O}$, $\lambda(B) = \operatorname{Sup}\{\lambda(B')\ ;\ B' \in \mathcal{O},\ B' \subset B,\ \lambda(B') < +\infty\}$ (ce qui, en particulier, exclut l'existence de masses ponctuelles infinies). On définit alors l'intégrale supérieure $\lambda^{\bullet}$ (appelée en général intégrale supérieure essentielle, mais nous supprimerons l'adjectif essentiel pour abréger) comme suit :

1) si $f \geq 0$ (1) est dénombrablement étagée,

$$f = \sum_n c_n 1_{B_n}\ ,\ B_n \in \mathcal{O}\ ,\ c_n \in [0,+\infty]\ ,$$

$$\lambda^*(f) = \sum_n c_n\, \lambda(B_n)^{(2)}\ ;$$

2) si $f \geq 0$ est arbitraire,

$$\lambda^*(f) = \operatorname{Inf}\{\lambda^*(g)\ ;\ g \text{ dénombrablement étagée} \geq f\}\ ;$$

3) si $f \geq 0$ est arbitraire ,

$$\lambda^{\bullet}(f) = \operatorname{Sup}\{\lambda^*(f\,1_B)\ ;\ B \in \mathcal{O}\ ,\ \lambda(B) < +\infty\}\ .$$

La fonctionnelle positive $\lambda^{\bullet}$ vérifie le théorème de Fatou du passage à la limite des suites croissantes :

si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow f$, alors $\lambda^{\bullet}(f_n) \nearrow \lambda^{\bullet}(f)$ , et l'inégalité de sous-additivité dénombrable :

$$\lambda^{\bullet}(\sum_n f_n) \leq \sum_n \lambda^{\bullet}(f_n)\ .$$

---

(1) $\geq 0$ voudra toujours dire à valeurs dans $[0,+\infty]$ .

(2) avec, toujours, la convention $0.\infty = 0$, donc aussi $\frac{0}{0}$ 0 .

Une partie A de $\Omega$ sera dite $\lambda$-négligeable (on dit habituellement $\lambda$-essentiellement négligeable, mais nous abrègerons) si $\lambda^{\cdot}(A) = 0$. Nous abrègerons $\lambda$-presque partout par $\lambda$-pp. Une fonction f sur $\Omega$, à valeurs dans un Banach E, sera dite $\lambda$-intégrable (on dit habituellement $\lambda$-essentiellement intégrable, mais nous abrègerons), si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée $g = \sum_{i\in I} c_i 1_{B_i}$, I fini, $c_i \in E$, $B_i \in \mathcal{O}$, $\lambda(B_i) < +\infty$, telle que, si on pose $\lambda(g) = \sum_{i\in I} c_i \lambda(B_i)$, on ait $\lambda^{\cdot}(|f-g|) \leq \varepsilon$. A une fonction intégrable f on attache une intégrale $\int_\Omega f\, d\lambda$ ou $\lambda(f) \in E$, qui vérifie le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Une partie A de $\Omega$ est dite $\lambda$-mesurable si son intersection avec toute partie $\lambda$-intégrable est $\lambda$-intégrable. Les parties $\lambda$-mesurables forment une tribu $\mathcal{O}_\lambda \supset \mathcal{O}$, sur laquelle $\lambda^{\cdot}$ est dénombrablement additive. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite $\lambda$-mesurable si, pour tout borélien R de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(R)$ est $\lambda$-mesurable ; pour des fonctions $f_n \geq 0$ $\lambda$-mesurables, l'inégalité de sous-additivité dénombrable devient l'égalité d'additivité dénombrable, $\lambda^{\cdot}(\sum_n f_n) = \sum_n \lambda^{\cdot}(f_n)$, et $\sum_n f_n$ est $\lambda$-mesurable.

Pour des fonctions à valeurs dans un Banach E, il y a plusieurs notions possibles de mesurabilité. Si $f : \Omega \to E$ est telle que, pour tout borélien B de E, $f^{-1}(B)$ soit $\lambda$-mesurable, et si f est bornée et $\lambda$ finie, f n'est pas nécessairement $\lambda$-intégrable ; donc cette notion de mesurabilité n'est pas assez forte.

Définition (1,0) : Nous dirons donc que $f : \Omega \to E$ est $\lambda$-mesurable, si, pour tout borélien B de E, $f^{-1}(B)$ est $\lambda$-mesurable, et si en outre, pour tout $A \in \mathcal{O}$ de $\lambda$-mesure finie, il existe $N \subset A$ $\lambda$-négligeable tel que $f(A \setminus N)$ soit contenu dans un sous-Banach séparable de E ; cela revient à dire que, sur A, f est limite $\lambda$-pp d'une suite de fonctions étagées.

Sur un Banach E, nous noterons par $|e|$ la norme d'un élément e de E ; si $f : \Omega \to E$ est une fonction à valeurs dans E, $|f|$ est la fonction $\geq 0 : \omega \mapsto |f(\omega)|$ ; nous réserverons $\|f\|$ pour la norme de f dans divers espaces fonctionnels possibles, donc $|f|$ est une fonction et $\|f\|$ un nombre.

Alors $f : \Omega \to E$ est $\lambda$-intégrable, si et seulement si elle est $\lambda$-mesurable et si $\lambda^{\cdot}(|f|) < +\infty$. Cela entraîne que f soit portée par une réunion dénombrable d'ensembles mesurables de $\lambda^{\cdot}$-mesures finies ; et qu'il existe N $\lambda$-négligeable tel que $f(\complement N)$ soit contenu dans un sous-Banach séparable de E.

On appelle $\mathcal{L}^p(\Omega,\lambda;E)$, $0 < p < +\infty$, l'espace vectoriel des fonctions f $\lambda$-mesurables à valeurs dans E, pour lesquels $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,\lambda;E)} = (\lambda^{\cdot}(|f|^p))^{1/p} < +\infty$, et on le munit de la quasi-norme $\|\ \|_{\mathcal{L}^p(\Omega,\lambda;E)}$ (norme si $p \geq 1$) ; il est complet (Fischer-Riesz). Son quotient par la relation d'équivalence $f \sim g$ si $f = g$ $\lambda$-pp, muni de la quasi-norme quotient (en fait $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,\lambda;E)}$ est la même pour tous les éléments f d'une même classe $f^{\cdot}$) sera noté $L^p(\Omega,\lambda;E)$, il est encore complet, c'est un quasi-Banach (Banach si $p \geq 1$)[(1)].

On appelle $\mathcal{L}^\infty(\Omega,\lambda;E)$ l'espace des fonctions $\lambda$-mesurables f à valeurs dans E, pour lesquelles $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega,\lambda;E)} = \text{sup-ess}_{\lambda}|f| = \text{Inf}\{M \geq 0; |f| \leq M\ \lambda\text{-pp}\} < +\infty$ ; il sera muni de la norme $\|\ \|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega,\lambda;E)}$ ; il est complet. Son quotient par la relation d'équivalence "égalité $\lambda$-pp" est le Banach $L^\infty(\Omega,\lambda;E)$.

On appelle $\mathcal{L}^0(\Omega,\lambda;E)$ l'espace des fonctions $\lambda$-mesurables à valeurs dans E. On le munit de la topologie de la "convergence en mesure sur tout ensemble de mesure finie", définie par les jauges :

$$J_{\alpha,A}(\lambda;f) = \text{Inf}\,\{M \geq 0\ ;\ \lambda^{\cdot}\{\omega \in A;\ |f(\omega)| > M\} \leq \alpha\}\ \text{pour}\ 0 < \alpha < 1,\ A \in \mathcal{O},\ \lambda(A) < +\infty\ ;$$

f converge vers 0 dans $\mathcal{L}^0(\Omega,\lambda;E)$ si et seulement si, pour tout $\alpha$ et tout A, $J_{\alpha,A}(\lambda;f)$ tend vers 0. Le quotient par la relation d'équivalence "égalité $\lambda$-pp" sera $L^0(\Omega,\lambda;E)$, avec $J_{\alpha,A}(\lambda;f^{\cdot}) = J_{\alpha,A}(\lambda;f)$ pour n'importe quelle

---

(1) En principe, il faudrait soigneusement distinguer $f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\lambda)$ et sa classe $f^{\cdot}$ dans $L^p(\Omega,\lambda)$, $f \in f^{\cdot}$. Nous le ferons autant que possible, mais sans exagération, et nous nous permettrons d'écrire, comme tout le monde, $f \in L^p(\Omega,\lambda)$.

$f \in f^{\cdot}$. Sans hypothèse supplémentaire, $\mathcal{L}^o$ et $L^o$ ne sont pas nécessairement complets.

On est amené à introduire les mesures $\lambda$ concassables.

**Définition (1.1)** : On dit que $\lambda$ est concassable s'il existe une partition $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ de $\Omega$ en parties $\Omega_i$ $\lambda$-intégrables telle que :

1) $A \subset \Omega$ soit $\lambda$ mesurable si et seulement si tous les $A \cap \Omega_i$ sont $\lambda$-mesurables ;

2) pour tout $A \subset \Omega$, $\lambda^{\cdot}(A) = \sum_{i \in I} \lambda^{\cdot}(A \cap \Omega_i)$. En particulier, $A$ est négligeable si et seulement si tous les $A \cap \Omega_i$ sont $\lambda$-négligeables.

Si la partition est dénombrable, $\lambda$ est dite $\sigma$-finie. Si $\Omega$ est un espace topologique séparé muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$, une mesure $\lambda$ sur $(\Omega, \mathcal{B})$ est dite de Radon si, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\lambda(B) = \mathrm{Sup}\{\lambda(K)\ ;\ K \text{ compact} \subset B\}$ (régularité intérieure) et si elle est localement finie (tout point a un voisinage ouvert $\lambda$-intégrable). Toute mesure de Radon est concassable ; on peut choisir tous les $\Omega_i$, sauf un, compacts et le restant $\lambda$-négligeable. Parmi les mesures concassables, on a donc au moins les mesures abstraites $\sigma$-finies et les mesures de Radon quelconques. Si $\lambda$ est concassable, $\mathcal{L}^o(\Omega,\lambda;E)$ et $L^o(\Omega,\lambda;E)$ sont complets (on raisonne sur chaque morceau $\Omega_i$). Le dual de $L^p(\Omega,\lambda)$ est dans tous les cas $L^{p'}(\Omega,\lambda)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 < p < +\infty$ ; le dual de $L^1$ est $L^\infty$ si $\lambda$ est concassable.

Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons toujours $\lambda$ concassable.

Une fonction $\Phi : \Omega \to E'$ sera dite $*$-scalairement $\lambda$-mesurable, si, pour tout $e \in E$, $\langle\Phi, e\rangle : \omega \mapsto \langle\Phi(\omega), e\rangle$, est $\lambda$-mesurable. On appellera alors $\mathcal{L}^p_*(\Omega,\lambda;E)$, $0 < p < +\infty$ (l'indice inférieur $*$ ne sera donc employé que pour des fonctions à valeurs dans un dual) l'espace des fonctions $\Phi$ $*$-scalairement mesurables, pour lesquelles $\|\Phi\|_{\mathcal{L}^p_*(\Omega,\lambda;E')} = (\lambda^{\cdot}(|\Phi|^p))^{\frac{1}{p}} < +\infty$ (1) ;

(1) $|\Phi|$ n'est pas forcément $\lambda$-mesurable !

et on le normera par $\| \ \|_{\mathcal{L}^p_*(\Omega,\lambda;E')}$. On appellera $L^p_*(\Omega,\lambda;E')$ le quotient par la relation d'équivalence : $\Phi \sim \Phi'$ si $\Phi = \Phi'$ $*$-scalairement $\lambda$-pp, c.à.d. si, $\forall$ e $\in$ E, $\langle\Phi,e\rangle = \langle\Phi',e\rangle$ $\lambda$-pp; et on le normera par la norme quotient :

$\|\Phi^{\cdot}\|_{L^p_*(\Omega,\lambda;E')} = \operatorname{Inf}_{\Phi \in \Phi^{\cdot}} \|\Phi\|_{\mathcal{L}^p_*(\Omega,\lambda;E')}$ ; cette fois , c'est une "vraie" norme quotient, car $\Phi \sim \Phi'$ n'entraîne pas $\|\Phi\|_{\mathcal{L}^p_*(\Omega,\lambda;E')} = \|\Phi'\|_{\mathcal{L}^p_*(\Omega,\lambda;E')}$ (2). On a une définition analogue pour $\mathcal{L}^\infty_*(\Omega,\lambda;E')$ et $L^\infty_*(\Omega,\lambda;E')$ en prenant

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}^\infty_*(\Omega,\lambda;E')} = \operatorname{Inf}\{M;\ |\Phi| \leq M\ \lambda\text{-pp.}\}\ .$$

Enfin on appellera $\mathcal{L}^0_*(\Omega,\lambda;E')$ l'espace des fonctions $*$-scalairement mesurables ; on le munira de la topologie définie par les jauges

$$\Phi \mapsto J_{\alpha,A}(\Phi) = \operatorname{Inf}\{M; \lambda^{\cdot}\{\omega \in A; |\Phi(\omega)| > M\} \leq \alpha\}\ ,$$

et $L^0_*(\Omega,\lambda;E)$ sera le quotient par la relation d'équivalence "égalité $*$-scalairement $\lambda$-pp.", avec la topologie quotient, définie par les jauges $J_{\alpha,A}(\Phi^{\cdot}) = \operatorname{Inf}_{\Phi\in\Phi^{\cdot}} J_{\alpha,A}(\Phi)$.

Les espaces $L^p_*(\Omega,\lambda;E')$, $0 \leq p \leq +\infty$, sont habituellement trop peu utilisés ; nous allons voir qu'ils sont en fait la clef d'un grand nombre de propriétés diverses, dont les propriétés de Radon-Nikodym.

## § 2. ETUDE DE L'ESPACE $L^0_*(\Omega,\lambda;E')$

Introduisons d'abord l'espace $L^0(\Omega,\lambda;\overline{\mathbb{R}})$ des classes (pour l'égalité $\lambda$-pp) de fonctions $\lambda$-mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ; on le munit de la structure d'ordre naturelle $\leq$, et de la topologie de la convergence en mesure correspondant à la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ (en remplaçant $\overline{\mathbb{R}}$ par l'espace homéomorphe $[0,1]$, elle devient induite par $L^0(\Omega,\lambda;\mathbb{R})$).

---

(2) Voir note (1) page 3. Ici il peut être dangereux d'identifier $\Phi \in \mathcal{L}^p_*(\Omega,\lambda;E')$ et sa classe $\Phi^{\cdot} \in L^p_*(\Omega,\lambda;E')$, $\Phi \in \Phi^{\cdot}$, puisque les différentes fonctions $|\Phi| \geq 0$, pour $\Phi \in \Phi^{\cdot}$, en général non $\lambda$-mesurables, mais même si elles le sont, ne sont pas deux à deux $\lambda$-pp égales.

Théorème (2.1) : L'ensemble ordonné $L^{0}(\Omega,\lambda;\overline{\mathbb{R}})$ est achevé : toute partie a une borne supérieure SUP et une borne inférieure INF. En outre, si $\lambda$ est $\sigma$-finie, $f^{\cdot} = \underset{i\in I}{\mathrm{SUP}}\, f_i^{\cdot}$ est aussi $\left(\underset{i\in J}{\mathrm{Sup}}\, f_j\right)^{\cdot}$, où Sup est le Sup ponctuel, et où $J$ est un sous-ensemble dénombrable convenablement choisi de $I$ ; et, dans tous les cas, si $I$ est un ordonné filtrant croissant, avec $f_i^{\cdot} \leq f_j^{\cdot}$ pour $i \leq j$, $\underset{i\in I}{\mathrm{SUP}}\, f_i^{\cdot}$ est la limite de $f_i^{\cdot}$ dans $L^{0}(\Omega,\lambda;\overline{\mathbb{R}})$ . Toute fonction, $\lambda$-mesurable ou non, qui majore toute $f_i$ $\lambda$-pp., majore $f$ $\lambda$-pp.
Si $\Omega$ est un espace topologique et $\lambda$ de Radon, et si les $f_i$ sont des fonctions $\geq 0$ semi-continues inférieurement, $\underset{i\in I}{\mathrm{SUP}}\, f_i^{\cdot} = \left(\underset{i\in I}{\mathrm{Sup}}\, f_i\right)^{\cdot}$ (sup ponctuel).

Démonstration : Puisque $\lambda$ est toujours supposée concassable, on raisonne sur chaque morceau, donc on peut supposer $\lambda$ finie. Comme $\overline{\mathbb{R}}$ est isomorphe à $[0,1]$ comme ensemble ordonné et espace topologique, on peut remplacer $\overline{\mathbb{R}}$ par $[0,1]$. On peut toujours ajouter à l'ensemble des $f_i$ leurs enveloppes supérieures finies, donc on peut supposer $I$ ordonné filtrant. Soit alors $+\infty > M = \underset{i\in I}{\mathrm{Sup}} \int_\Omega f_i d\lambda$ ; il existe une suite croissante $f_n$ extraite de la famille, telle que $\int f_n d\lambda$ tende vers $M$ ; soit $f$ sa limite. Pour tout $i$, $f_n \vee f_i \nearrow f \vee f_i$ pour $n \to +\infty$ ; donc $\int (f_n \vee f_i) d\lambda$ (qui est $\leq M$ parce que $f_n \vee f_i$ est majorée par une fonction de la famille) $\nearrow \int (f \vee f_i) d\lambda \geq \int f\, d\lambda = M$. Donc $\int (f \vee f_i) d\lambda = M$ ; alors $f \vee f_i \geq f$ et a même intégrale finie, donc $f \vee f_i = f$ $\lambda$-pp., donc $f \geq f_i$ $\lambda$-pp. D'autre part toute fonction (mesurable ou non) qui dépasse $\lambda$-pp. chaque $f_i$ dépasse chaque $f_n$ donc $f$ $\lambda$-pp ; donc $f^{\cdot} = \underset{i\in I}{\mathrm{SUP}}\, f_i^{\cdot}$ . Le reste est évident (si $I$ est ordonné filtrant, comme $f_n$ converge vers $f$ $\lambda$-pp. donc en mesure, $J_\alpha(f - f_n) \leq \varepsilon$ pour $n$ assez grand , et a fortiori $J_\alpha(f - f_i) \leq \varepsilon$ pour $f_i \geq f_n$, donc $f_i^{\cdot}$ converge vers $f^{\cdot}$ dans $L^{0}(\Omega,\lambda)$).
Dans le cas $\Omega$ topologique, $\lambda$ Radon, $f_i$ semi continues inférieurement $\geq 0$, le SUP se détermine facilement localement, donc on peut supposer $\lambda$ finie. Alors SUP = Sup à cause du passage à la limite des intégrales pour un ordonné filtrant croissant de fonctions sci $\geq 0$.

Théorème (2.2) (Dunford-Pettis-Maharam) : Soit $\Phi \in \mathcal{L}^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E')$ ; elle définit, par $e \mapsto \langle\Phi, e\rangle^{\cdot}$, une application linéaire continue $v_\Phi$ de norme $\leq \|\Phi\|_{\mathcal{L}^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E')}$ , de $E$ dans $L^{\infty}(\Omega,\lambda)$ ; si $\Phi = \Phi'$ $*$-scalairement $\lambda$-pp, $v_\Phi = v_{\Phi'}$ , donc $\Phi^{\cdot} \in L^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E')$ définit $v_{\Phi^{\cdot}} \in \mathcal{L}(E;L^{\infty}(\Omega,\lambda))$,

$\|v_{\Phi^\cdot}\| \leq \|\Phi^\cdot\|_{L^\infty_*(\Omega,\lambda;E')}$. L'application $\Phi^\cdot \mapsto v_{\Phi^\cdot}$ est une bijection linéaire isométrique de $L^\infty_*(\Omega,\lambda;E')$ sur $\mathcal{L}(E;\ L^\infty(\Omega,\lambda))$.

| |
|---|
| **En résumé brutal :**<br>L'ESPACE DES APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES DE E DANS $L^\infty(\Omega,\lambda)$ EST $L^\infty_*(\Omega,\lambda;E')$. |

Démonstration : Il suffit de montrer que, si $v \in \mathcal{L}(E;L^\infty(\Omega,\lambda))$, il existe $\Phi \in \mathcal{L}^\infty_*(\Omega,\lambda;E')$ telle que $v_\Phi = v$, avec $\|\Phi\|_{\mathcal{L}^\infty_*(\Omega,\lambda;E')} \leq \|v\|$. Soit $\rho$ un relèvement de Maharam (1), application linéaire continue de norme 1 de $L^\infty(\Omega,\lambda)$ dans $B(\Omega)$, espace des fonctions bornées sur $\Omega$, muni de la norme $\|\varphi\|_{B(\Omega)} = \operatorname{Sup}_{\omega\in\Omega} |\varphi(\omega)|$, avec : pour $f^\cdot \in L^\infty(\Omega,\lambda)$, $\rho(f^\cdot) \in f^\cdot$ ($\rho(f^\cdot)$ est $\lambda$-mesurable et appartient à la classe $f^\cdot$) ; $\|\rho\| = 1$ signifie que $\operatorname{Sup}_{\omega\in\Omega} |\rho(f^\cdot)(\omega)| = \operatorname{Sup.ess.}_\lambda |f^\cdot|$. Pour tout $\omega \in \Omega$, $e \mapsto \rho(v(e))(\omega)$ est une forme linéaire continue $\Phi(\omega)$ sur E, donc $\Phi(\omega) \in E'$ ; et $|\Phi(\omega)| \leq \|v(e)\|_{L^\infty(\Omega,\lambda)} \leq \|v\|\ |e|$. Comme $\langle\Phi(\omega),e\rangle = \rho(v(e))(\omega)$, on a $\langle\Phi,e\rangle = \rho(v(e))$, donc $\langle\Phi,e\rangle$ est $\lambda$-mesurable et par suite $\Phi$ est $*$-scalairement $\lambda$-mesurable, et $\langle\Phi.e\rangle^\cdot = v(e)$, donc $v_\Phi = v$; et $|\Phi| \leq \|v\|$ donc $\|\Phi\|_{\mathcal{L}^\infty_*(\Omega,\lambda;E')} \leq \|\Phi\|_{\mathcal{B}(\Omega;E')} \leq \|v\|$, cqfd.

Lemme (2.2bis) : ($\lambda$ n'a pas besoin d'être concassable). Si $f \in \mathcal{L}^0(\Omega,\lambda;E)$ et $\Phi \in \mathcal{L}^0_*(\Omega,\lambda;E')$, $\langle\Phi,f\rangle : \omega \mapsto \langle\Phi(\omega),f(\omega)\rangle \in \mathbb{C}$ est $\lambda$-mesurable. Elle est $\lambda$-intégrable si $f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\lambda;E)$, $\Phi \in \mathcal{L}^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. La classe $\langle\Phi,f\rangle^\cdot$ ne dépend que des classes $f^\cdot \in L^0(\Omega,\lambda;E)$, $\Phi^\cdot \in L^0_*(\Omega,\lambda;E')$ et $\left|\int\langle\Phi,f\rangle d\lambda\right| \leq \|f^\cdot\|_{L^p(\Omega,\lambda;E)} \|\Phi^\cdot\|_{L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')}$.

Démonstration : Si f est étagée, $\langle\Phi,f\rangle$ est trivialement mesurable puisque $\Phi$ est $*$-scalairement mesurable. Mais, sur tout ensemble $\lambda$-intégrable, f

---

(1) Dorothy Maharam : "On a theorem of von Neumann" Proc. Amer. Math. Soc., tome 9, 1958, pp. 987-994. On trouvera des variantes dans Ionescu Tulcea : " On the lifting property", J. Math. Anal. Appl., tome 3, 1961, pp. 537-546, et dans P. A. Meyer : "Probabilités et potentiel" Paris, Hermann, 1966, page 195, théorème T12 du chap. VIII.

est limite $\lambda$-pp. d'une suite de fonctions étagées ; donc $<\Phi,f>$ est toujours $\lambda$-mesurable. L'inégalité de Hölder est toujours valable :

$$\lambda^{\bullet}(|<\Phi,f>|) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^{p}(\Omega,\lambda;E)} \|\Phi\|_{\mathcal{L}^{p'}_{*}(\Omega,\lambda;E')} .$$

Mais $<\Phi,f>$ est trivialement $\lambda$-pp nulle si f est $\lambda$-pp nulle ; mais aussi si $\Phi$ est $*$-scalairement $\lambda$-pp nulle, car f est, sur tout ensemble $\lambda$-intégrable, limite $\lambda$-pp d'une suite de fonctions étagées. Donc $<\Phi,f>^{\bullet}$ ne dépend que de $\Phi^{\bullet}$ et $f^{\bullet}$, et alors l'inégalité de Hölder devient celle de l'énoncé pour $\Phi^{\bullet}$ et $f^{\bullet}$.

Ceci va être utilisé, pour $p = 1$, $p' = +\infty$, au 3) du corollaire suivant :

Corollaire (2.3) :

1) $u \mapsto {}^{t}u$ est une bijection linéaire isométrique de $\mathcal{L}(L^{1}(\Omega,\lambda);E')$ sur $\mathcal{L}(E,L^{\infty}(\Omega,\lambda))$ ; le théorème (2.2) définit donc une bijection linéaire isométrique de $L^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E')$ sur $\mathcal{L}(L^{1}(\Omega,\lambda);E')$, en associant à $\Phi \in \mathcal{L}^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E')$ l'application linéaire continue $u_{\Phi}$ de $L^{1}(\Omega,\lambda)$ dans $E'$ : $f \mapsto \int \Phi\, f\, d\lambda \in E'$ (intégrale $*$-scalaire, définie par

$$<\int \Phi\, f\, d\lambda, e> = \int <\Phi,e> f\, d\lambda\ ).$$

2) L'espace $\mathcal{L}(L^{1}(\Omega,\lambda);E')$ est linéairement isométrique à l'espace $\mathcal{B}(L^{1}(\Omega,\lambda),E)$ des formes bilinéaires continues sur $L^{1}(\Omega,\lambda) \times E$, en associant à $u \in \mathcal{L}(L^{1}(\Omega,\lambda);E')$ la forme bilinéaire continue $(f,e) \mapsto <u(f),e>$. Donc le théorème (2.2) définit une bijection linéaire isométrique de $L^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E')$ sur $\mathcal{B}(L^{1}(\Omega,\lambda),E)$, associant à $\Phi \in \mathcal{L}^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E')$ la forme bilinéaire sur $L^{1}(\Omega,\lambda) \times E$ : $(f,e) \mapsto \int <\Phi,e> f\, d\lambda \in \mathbb{C}$.

3) L'espace $\mathcal{B}(L^{1}(\Omega,\lambda),E)$ des formes bilinéaires continues sur $L^{1}(\Omega,\lambda) \times E$ est le dual de $L^{1}(\Omega,\lambda) \hat{\otimes}_{\pi} E = L^{1}(\Omega,\lambda;E)$, $\mathcal{B}(L^{1}(\Omega,\lambda),E) \simeq (L^{1}(\Omega,\lambda;E))'$ ; l'isomorphisme associe à $\Theta \in (L^{1}(\Omega,\lambda;E))'$ la forme bilinéaire continue sur $L^{1}(\Omega,\lambda) \times E$ : $(f,e) \mapsto \Theta(f\,e)$. Donc le théorème (2.2) définit un isomorphisme de $L^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E')$ sur $(L^{1}(\Omega,\lambda;E))'$, qui associe à $\Phi \in \mathcal{L}^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E')$ la forme linéaire continue sur $L^{1}(\Omega,\lambda;E)$ : $f^{\bullet} \mapsto \int <\Phi,f> d\lambda \in \mathbb{C}$ ; ou encore $L^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E')$ est le dual de $L^{1}(\Omega,\lambda;E)$, la dualité étant définie par

$$<\Phi^{\cdot},f^{\cdot}>_{L^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E'),L^{1}(\Omega,\lambda;E)} = \int <\Phi,f>_{E',E} d\lambda = \int <\Phi(\omega),f(\omega)>_{E',E} d\lambda(\omega).$$

> En résumé brutal :
> L'ESPACE DES APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES DE E DANS $L^{\infty}(\Omega,\lambda)$, L'ESPACE DES APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES DE $L^{1}(\Omega,\lambda)$ DANS E', L'ESPACE DES FORMES BILINIAIRES CONTINUES SUR $L^{1}(\Omega,\lambda) \times E$, LE DUAL DE $L^{1}(\Omega,\lambda;E)$ SONT L'ESPACE $L^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E')$.

Définition (2.4) : On appelle $L^{\infty}_{**}(\Omega,\lambda;E'')$ [1] le sous-espace fermé de $L^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E'')$ formé des $\Phi^{\cdot}$ pour lesquelles, pour tout $B \in \mathcal{O}$ $\lambda$-intégrable, $\int_B \Phi\, d\lambda$ (intégrale $*$-scalaire, a priori dans E'') est dans E.

Corollaire (2.4) : L'espace $\mathcal{L}(L^{1}(\Omega,\lambda);E)$ est isométrique à $L^{\infty}_{**}(\Omega,\lambda;E'')$; l'isomorphisme associe à $\Phi^{\cdot} \in L^{\infty}_{**}(\Omega,\lambda;E'')$ l'application linéaire continue de $L^{1}(\Omega,\lambda)$ dans E : $f \mapsto \int \Phi f\, d\lambda$ (intégrale $*$-scalaire) $\in$ E.

Démonstration : $\mathcal{L}(L^{1}(\Omega,\lambda);E)$ est le sous-espace de $\mathcal{L}(L^{1}(\Omega,\lambda);E'')$ envoyant $L^{1}(\Omega,\lambda)$ dans E, et $\mathcal{L}(L^{1}(\Omega,\lambda);E'') \simeq L^{\infty}_{*}(\Omega,\lambda;E'')$. Or une application linéaire continue de $L^{1}(\Omega,\lambda)$ dans E'' envoie $L^{1}(\Omega,\lambda)$ dans E dès qu'elle envoie les fonctions étagées $\lambda$-intégrables dans E, donc dès qu'elle envoie dans E toute fonction caractéristique $1_B$ d'un $B \in \mathcal{O}$ $\lambda$-intégrable.

Théorème (2.5) : Toute $\Phi \in \mathcal{L}^{0}_{*}(\Omega,\lambda;E)$ définit une application linéaire continue $v_{\Phi}$ de E dans $L^{0}(\Omega,\lambda)$, par $v_{\Phi}(e) = <\Phi,e>^{\cdot}$, si $\Phi = \Phi'$ $*$-scalairement $\lambda$-pp., $v_{\Phi} = v_{\Phi'}$, donc $\Phi^{\cdot} \in L^{0}_{*}(\Omega,\lambda;E')$ définit $v_{\Phi^{\cdot}} \in \mathcal{L}(E';L^{0}(\Omega,\lambda))$. Pour qu'une application linéaire continue v de E dans $L^{0}(\Omega,\lambda)$ soit réalisée par une $\Phi^{\cdot} \in L^{0}_{*}(\Omega,\lambda;E')$, i.e. que $v = v_{\Phi^{\cdot}}$ (auquel cas $\Phi^{\cdot}$ est évidemment unique), il faut et il suffit que la classe $\geq 0$ $\lambda$-mesurable $\theta^{\cdot} = \sup\limits_{\substack{e\in E\\ |e|\leq 1}} |v(e)|$ (le SUP étant celui du théorème (2.1)), soit finie : $\theta^{\cdot} \in L^{0}(\Omega,\lambda;\mathbb{R}_{+}) \subsetneqq L^{0}(\Omega,\lambda;\overline{\mathbb{R}}_{+})$. Dans ce cas, $\theta^{\cdot}$ est le module minimum des fonctions de la classe $\Phi^{\cdot}$ : pour toute $\Phi \in \Phi^{\cdot}$, $\theta \leq |\Phi|$ $\lambda$-pp., et il

---

(1) L'indice inférieur $**$ ne s'emploie donc que pour des fonctions à valeurs dans un bidual E''.

existe une $\bar{\Phi} \in \Phi^{\cdot}$ telle que $|\bar{\Phi}| = \theta$ ($\lambda$-mesurable).

<u>Démonstration</u> : Si $v = v_{\Phi}$, la fonction (en générale non mesurable) $|\Phi|$ majore toute $|<\Phi,e>|$ $\lambda$.pp., donc, d'après le théorème (2.1), $+\infty > |\Phi| \geq \theta$ $\lambda$-pp. Cela prouve d'une part que $\theta^{\cdot}$ est finie, d'autre part que $\theta \leq |\Phi|$ $\lambda$-pp pour toute $\Phi \in \Phi^{\cdot}$.

Inversement supposons $\theta$ finie. Considérons l'application linéaire de E dans $L^{\infty}(\Omega,\lambda)$ : $e \mapsto v(e)/\theta^{\cdot}$ (là où $\theta = 0$, $v(e)$ est $\lambda$-pp. nulle puisque $|v(e)| \leq |e|\theta^{\cdot}$, donc $v(e)/\theta = \frac{0}{0} = 0$), de norme $\leq 1$. D'après le théorème (2.2), il existe $\Psi \in \mathcal{L}_{*}^{\infty}(\Omega,\lambda;E')$, $|\Psi| \leq 1$, telle que $\frac{v(e)}{\theta} = <\Psi,e>^{\cdot}$ pour $e \in E$. Alors $v(e) = <\theta\Psi, e>^{\cdot} = <\bar{\Phi},e>^{\cdot}$, où $\bar{\Phi} = \Psi\theta \in \mathcal{L}_{*}^{o}(\Omega,\lambda;E')$ (puisque $\theta$ est $\lambda$-mesurable), et $|\bar{\Phi}| \leq \theta$ donc $= \theta$ $\lambda$-pp.

<u>Remarque (2.6)</u> :

1) Supposons E séparable. Alors toute $\theta$ *-scalairement mesurable à valeurs dans E' est mesurable à valeurs dans $\sigma(E',E)$ lusinien, et deux fonctions *-scalairement $\lambda$-pp. égales sont $\lambda$-pp. égales. Donc $\theta^{\cdot}$ est le module commun de toutes les $\Phi \in \Phi^{\cdot}$.

2) Supposons $\Phi \in L^{o}(\Omega,\lambda;E')$, i.e. $\lambda$-mesurable. Alors elle prend ses valeurs dans un sous-Banach séparable G de E'. Soit D' dénombrable dense dans G. Pour tout $e' \in D'$, il existe $D_{e'}$ dénombrable de la boule unité de E tel que $|e'| = \underset{e\in D_{e'}}{\text{Sup}} |<e',e>|$. Si alors $D = \bigcup_{e'\in D'} D_{e'}$, on a $e' = \underset{e\in D}{\text{Sup}} |<e',e>|$ pour tout $e' \in D'$ donc aussi pour tout $e' \in G$. Donc $|\Phi| = \underset{e\in D}{\text{Sup}} |<\Phi,e>| = \underset{e\in E}{\text{SUP}} |<\Phi,e>| \leq \theta$ donc$=\theta$ $\lambda$-pp. Donc toute fonction mesurable (s'il en existe) dans $\Phi^{\cdot} \in L_{*}^{o}(\Omega,\lambda;E')$, réalise son module minimum. Il en résulte aussi que deux fonctions $\lambda$-mesurables de la même classe (s'il en existe) sont $\lambda$-pp. égales ; et aussi que, si

$$\Phi \in \mathcal{L}^{p}(\Omega,\lambda;E') \ , \ \|\Phi^{\cdot}\|_{L^{p}(\Omega,\lambda;E')} = \|\Phi^{\cdot}\|_{L_{*}^{p}(\Omega,\lambda;E')}$$

(le . n'ayant pas la même signification dans les deux membres : c'est la classe dans $L^{p}$ pour le premier, dans $L_{*}^{p}$ pour le deuxième).

<u>Définition (2.7)</u> : <u>On appelle $L_{**}^{o}(\Omega,\lambda;E'')$ l'espace des $\Phi^{\cdot} \in L_{*}^{o}(\Omega,\lambda;E'')$ telles que, si $\theta^{\cdot}$ est la fonction de module minimum associée à $\Phi^{\cdot}$ par le</u>

théorème (2.5), alors, pour tout $B \in \mathcal{O}$ $\theta\lambda$-intégrable (1), $\int_B \Phi\, d\lambda$ (intégrale $*$-scalaire) $\in E$.

## § 3. PROPRIETE DE RADON-NIKODYM (RNP, RADON-NIKODYM-PROPERTY) PAR LES FONCTIONS $*$-SCALAIREMENT MESURABLES.

La propriété de Radon-Nikodym n'a rien à voir ni avec Radon ni avec Nikodym, mais elle est liée au théorème de Dunford-Pettis-Maharam. En comparaison avec le corollaire (2.4) :

Définition (3.1) : On dit que E a la propriété RNP si, pour toute $\lambda$, toute application linéaire continue de $L^1(\Omega,\lambda)$ dans E est définie par une $\Phi^{\cdot} \in L^\infty_{**}(\Omega,\lambda;E'')$ admettant un représentant $\Phi \in \mathcal{L}^\infty(\Omega,\lambda;E)$.

| |
|---|
| En résumé brutal : <br> E A LA PROPRIETE RNP SI L'ESPACE DES APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES DE TOUT $L^1(\Omega,\lambda)$ DANS E EST $L^\infty(\Omega,\lambda;E)$. |

Deux représentants $\Phi$, $\Phi'$ ayant cette propriété sont égaux $\lambda$-pp. d'après la remarque (2.6), et en outre $\|\Phi^{\cdot}\|_{L^\infty_*(\Omega,\lambda;E'')} = \|\Phi\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega,\lambda;E)}$. On a donc une autre forme de la définition :

Définition (3.1bis) : E a la propriété RNP si, pour tout $\Omega,\mathcal{O},\lambda$, l'application canonique de $L^\infty(\Omega,\lambda;E)$ dans $L^\infty_*(\Omega,\lambda;E'')$ est une bijection isométrique de $L^\infty(\Omega,\lambda;E)$ sur $L^\infty_{**}(\Omega,\lambda;E'') \simeq \mathcal{L}(L^1(\Omega,\lambda);E)$.

Il suffit trivialement (par concassage) que ceci soit vrai pour toute probabilité $\lambda$ ; nous verrons même plus loin qu'il suffit que ce soit vrai pour $\Omega = [0,1]$, $\lambda$ - mesure de Lebesgue.

Nous verrons que tout Banach réflexif, tout dual séparable (exemple : $\ell^1$) vérifient RNP. On peut le démontrer par l'une quelconque

(1) La mesure $\theta\lambda$ est définie par $(\theta\lambda)(B) = \lambda^{\cdot}(\theta\, 1_B)$ pour $B \in \mathcal{O}$ ; elle est essentielle, et concassable lorsque $\lambda$ est concassable et que $\theta$ est $\lambda$-pp. finie. Pour toute $f \geq 0$, $(\theta\lambda)^{\cdot}(f) = \lambda^{\cdot}(\theta f)$ ; f banachique est $\theta\lambda$-intégrable si et seulement si $\theta f$ est $\lambda$-intégrable, et les intégrales sont égales. Voir appendice.

des propriétés nécessaires et suffisantes de ce paragraphe ou des suivants ; nous choisirons le moment où c'est le plus rapide (corollaire (4.5)).

Théorème (3.2) : Si E vérifie RNP, toute classe $\Phi^{\cdot}$ de $L^{0}_{**}(\Omega,\lambda;E)$ admet un représentant $\Phi \in \mathcal{L}^{0}(\Omega,\lambda;E)$, qui réalise le module minimum $\theta^{\cdot}$ de $\Phi^{\cdot}$ suivant le théorème (2.5) ; ou encore l'application naturelle $L^{0}(\Omega,\lambda;E) \to L^{0}_{*}(\Omega,\lambda;E'')$ est une bijection de $L^{0}(\Omega,\lambda;E)$ sur $L^{0}_{**}(\Omega,\lambda;E'')$.

Inversement, si la propriété ci-dessus est vraie pour toute $\Phi^{\cdot} \in L^{\infty}_{**}(\Omega,\lambda;E'')$, E vérifie RNP.

> En résumé brutal :
> E A LA PROPRIETE RNP SI ET SEULEMENT SI $L^{0}_{**}(\Omega,\lambda;E'') = L^{0}(\Omega,\lambda;E)$.

Démonstration : Supposons que E vérifie RNP, et soit $\Phi \in \mathcal{L}^{0}_{**}(\Omega,\lambda;E)$. Soit $\theta$ définie par le théorème (2.5). Alors, si f est une fonction étagée $\theta\lambda$-intégrable, $\int f\,\Phi\,d\lambda$ (intégrale $*$-scalaire) $\in$ E, et son module est $\leq \|f\|_{L^{1}(\Omega,\theta\lambda)}$. Donc $f \mapsto \int \Phi\,f\,d\lambda$ se prolonge en une application linéaire continue, de norme $\leq 1$, de $L^{1}(\Omega,\theta\lambda)$ dans E. Comme E vérifie RNP, il existe $\Psi \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega,\theta\lambda;E)$, $|\Psi| \leq 1$, telle que $\int \Phi\,f\,d\lambda = \int \Psi\,f\,\theta\,d\lambda$ ; on peut remplacer $\Psi$ par 0 là où $\theta = 0$, alors $\Psi \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega,\lambda;E)$. Alors $\int \Phi\,f\,d\lambda = \int \bar{\Phi}\,f d\lambda$, si $\bar{\Phi} = \Psi\theta$ ; $|\bar{\Phi}| \leq \theta$, et $\bar{\Phi}^{\cdot} \in L^{0}(\Omega,\lambda;E)$. Cela entraîne que $\bar{\Phi} = \Phi$ $*$-scalairement $\theta\lambda$-pp. ; mais $\bar{\Phi} = 0$ là où $\theta = 0$, et $\Phi = 0$ $*$-scalairement $\lambda$-pp. là où $\theta = 0$, donc $\bar{\Phi} = \Phi$ $*$-scalairement $\lambda$-pp. On a donc bien montré que $L^{0}(\Omega,\lambda;E)$ s'envoie surjectivement sur $L^{0}_{**}(\Omega,\lambda;E'')$ ; l'injectivité résulte de la remarque (2.6), 2.

Inversement, si l'on a les propriétés précédentes pour toute $\Phi$ bornée, cela veut dire exactement que $L^{\infty}_{**}(\Omega,\lambda;E'') = L^{\infty}(\Omega,\lambda;E)$, donc que E vérifie RNP.

## § 4. LA PROPRIETE DE RADON-NIKODYM ET LES PROBABILITES CYLINDRIQUES

Théorème (4.1) (Kwapien) : Soit $\Lambda$ une probabilité cylindrique sur $\sigma(E',E)$ ; supposons-la définie par une fonction aléatoire linéaire $v : E \to L^{0}(\Omega,\lambda)$, $\lambda$ probabilité.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\Lambda$ est de Radon ;

2) $v$ est réalisable par une fonction $\Phi \in \mathcal{L}^0_*(\Omega,\lambda;E')$ ;

3) $\theta^{\cdot} = \sup\limits_{\substack{e\in E\\ |e|\leq 1}} |v(e)|$ est finie, i.e. $\in L^0(\Omega,\lambda;\mathbb{R}_+)$ et alors on peut choisir $\Phi$ avec $|\Phi| = \theta$.

Dans ce cas, $\Lambda$ est d'ordre $p$ si et seulement si $\theta \in L^p(\Omega,\lambda)$, et $\|\Lambda\|_p = \|\theta\|_{L^p(\Omega,\lambda)} = \|\Phi^{\cdot}\|_{L^p_*(\Omega,\lambda;E')}$.

Démonstration : L'équivalence de 2 et 3 est le théorème (2.5). Montrons donc l'équivalence de 1 et 2. D'après Prokhorov, $\Lambda$ est de Radon si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R < +\infty$ tel que $\Lambda$ soit cylindriquement concentrée à $\varepsilon$ près sur la boule $B(R)$ de rayon $R$ (compacte dans $\sigma(E',E)$), i.e., pour toute $w$ linéaire continue de $\sigma(E',E)$ dans un espace vectoriel $G$ de dimension finie, $(w(\Lambda))(w(B(R))) \geq 1-\varepsilon$.

Si alors $e_1, e_2,\ldots,e_n$ sont des éléments de $E$, $|e_i| \leq 1$, l'image de $B(R)$ par $(e_1,\ldots,e_n) : E \to \mathbb{C}^n$ est contenue dans le cube $Q_{e_1,\ldots,e_n}(R) = \{(z_1,\ldots,z_n) ; |z_1| \leq R,\ldots,|z_n| \leq R\}$, donc la condition $((e_1,\ldots,e_n)(\Lambda))((e_1,\ldots,e_n)(B(R))) \geq 1-\varepsilon$ entraîne $((e_1,e_2,\ldots,e_n)(\Lambda))(Q_{e_1,\ldots,e_n}(R)) \geq 1-\varepsilon$. Mais la réciproque est vraie. Supposons en effet que cette condition soit vérifiée pour tous $e_1,\ldots,e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Soit $w$ linéaire continue de $\sigma(E',E)$ dans un espace vectoriel $G$ de dimension finie. Alors, par Hahn Banach, $w(B(R))$ est l'intersection des $\{g\in G; |\langle\eta,g\rangle| \leq R\}$ qui le contiennent, $\eta \in G'$ ; il est donc l'intersection de l'ordonné filtrant décroissant de leurs intersections finies ; donc si, pour tout système fini $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n \in G'$ tel que les $\{g\in G; |\langle\eta_i,g\rangle| \leq R\}$ contiennent $w(B(R))$, on a $(w(\Lambda))\,\{g\in G; |\langle\eta_1,g\rangle| \leq R,\ldots, |\langle\eta_n,g\rangle| \leq R\} \geq 1-\varepsilon$, on a aussi $(w(\Lambda))(w(B(R))) \geq 1-\varepsilon$ et $\Lambda$ sera cylindriquement concentrée à $\varepsilon$ près qur $B(R)$. Mais $\{g\in G; |\langle\eta_i,g\rangle| \leq R\} \supset w(B(R))$ équivaut à $|(\eta_i\circ w)(B(R))| \leq R$ ou $|\eta_i\circ w|_E \leq 1$ ; d'autre part

$w(\Lambda)\{g\in G; |\langle\eta_1,g\rangle| \leq R,\ldots,|\langle\eta_n,g\rangle| \leq R\} = ((\eta_1\circ w,\ldots,\eta_n\circ w)(\Lambda))$
$\{(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_1| \leq R,\ldots,|z_n| \leq R\} = ((e_1,\ldots,e_n)(\Lambda))(Q_{e_1,\ldots,e_n}(R))$

si $e_i = \eta_i\circ w$. Donc l'ensemble des conditions $(e_1,\ldots,e_n)(\Lambda)(Q_{e_1,\ldots,e_n}(R)) \geq 1-\varepsilon$, $|e_i| \leq 1$, est bien équivalent à la concentration cylindrique de $\Lambda$ à $\varepsilon$ près sur $B(R)$.

Mais $(e_1,\ldots,e_n)(\Lambda)$ est aussi l'image de $\lambda$ par $(v(e_1),v(e_2),\ldots,v(e_n))$, $\lambda$-classe d'applications $\Omega \to \mathbb{C}^n$. Donc la condition s'écrit : $J_\varepsilon(\lambda,\mathrm{Sup}(|v(e_1)|,\ldots,|v(e_n)|)) \leq R$. Ceci est vrai quelque soit le système fini $e_1, e_2,\ldots,e_n$, si et seulement si $J_\varepsilon(\theta) \leq R$ ($J_\varepsilon$ est semi continue inférieurement sur $L^0(\Omega,\lambda;\overline{\mathbb{R}})$). Et $J_\varepsilon(\theta)$ est fini pour tout $\varepsilon$ si et seulement si $\theta^{\cdot}$ est finie.

Soit N la fonction norme sur E, semi-continue inférieurement sur $\sigma(E',E)$. C'est la Sup des fonctions $e' \mapsto |\langle e,e'\rangle|$, pour $|e| \leq 1$ ; comme $\Lambda$ est de Radon, le Sup ponctuel d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement est aussi leur SUP dans $L^0(\sigma(E',E),\Lambda;\overline{\mathbb{R}})$. Comme le SUP est aussi la limite dans $L^0(\sigma(E',E),\Lambda;\overline{\mathbb{R}})$ de l'ordonné filtrant des Sup finies, l'image $N(\Lambda)$ est la limite étroite des images de $\Lambda$ par les fonctions $e' \mapsto \mathrm{Max}(|\langle e_1,e'\rangle|,|\langle e_2,e'\rangle|,\ldots,|\langle e_n,e'\rangle|)$, $|e_i| \leq 1$ ; c'est donc aussi la limite étroite des images de $\lambda$ par les fonctions sur $\Omega$ : $\mathrm{Max}(|v(e_1)|,|v(e_2)|,\ldots,|v(e_n)|)$, c.à.d. l'image $\theta(\lambda)$ : $N(\Lambda) = \theta(\lambda)$. Mais $\|\Lambda\|_p = (\int t^p(dN(\Lambda))(t))^{1/p} = (\int t^p(d\,\theta(\lambda))t))^{1/p} = (\int \theta^p d\lambda)^{1/p}$, cqfd.

<u>Remarque</u> : On peut beaucoup généraliser le dernier résultat. Soient $E,E'$ deux evt lcs en dualité séparante. Soit $\Lambda$ une probabilité de Radon sur $\sigma(E',E)$. Soit U une fonction $\sigma(E',E) \to ]-\infty,+\infty]$, non identique à $+\infty$, semi-continue inférieurement (sci) et convexe. Sa duale de Moreau $U^*$ sur E est définie par : $U^*(e) = \mathrm{Sup}_{e'\in E'} (\langle e',e\rangle - U(e'))$. Alors $U^*$ est aussi à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$, non identique à $+\infty$, semi continue inférieurement sur $\sigma(E,E')$ et convexe ; et sa duale de Moreau est $U = U^{**}$, $U(e') = \mathrm{Sup}_{e\in E} (\langle e',e\rangle - U^*(e))$. Alors on peut montrer que $U(\Lambda) = \theta(\lambda)$, si $\theta^{\cdot} = \mathrm{SUP}_{e\in E} (v(e) - U^*(e))$.

<u>Définition (4.2)</u> : <u>Soit</u> $\Lambda$ <u>une probabilité cylindrique sur E. On dit qu'elle est de type</u> $(\tau,p)$ <u>si, lorsque</u> $\xi \in E'$ <u>converge vers 0 dans</u> $\tau(E',E)$, $\|\xi(\Lambda)\|_p$ <u>converge vers</u> 0; $0 < p \leq +\infty$ (1). <u>Si</u> $\Lambda$ <u>est réalisée par une fonction aléatoire linéaire</u> $E' \to L^0(\Omega,\lambda)$, <u>cela revient à dire que v est continue de</u> $\tau(E',E)$ <u>dans</u> $L^p(\Omega,\lambda)$; <u>dans le cas</u> $p = 1$, <u>qui va nous intéresser maintenant, comme</u> $L^1 = \tau(L^1,L^\infty)$, <u>cela revient à dire qu'elle est continue</u> $\tau(E',E) \to \tau(L^1,L^\infty)$ <u>ou</u> $\sigma(E',E) \to \sigma(L^1,L^\infty)$, <u>ou que sa transposée</u> ${}^t v$ <u>envoie (continuement)</u> $L^\infty(\Omega,\lambda)$ <u>dans E.</u>

---

(1) $\Lambda$ est de type $(\tau,0)$ si, lorsque $\xi$ converge vers 0 dans $\tau(E',E)$, $\xi(\Lambda)$ converge étroitement vers $\delta$.

Théorème (4.3) : Si $E$ vérifie RNP, toute probabilité cylindrique $\Lambda$ sur $E$, qui est de type $(\tau,1)$ sur $E$ et de Radon sur $\sigma(E'',E')$, est de Radon sur $E$. Inversement, si cette propriété est réalisée pour les $\Lambda$ de type $+\infty$ sur $E$ (qui sont toujours de Radon sur $\sigma(E'',E')$) et de type $(\tau,1)$, $E$ vérifie RNP.

Démonstration : Supposons que $E$ vérifie RNP, et que $\Lambda$, de type $(\tau,1)$ sur $E$ et de Radon sur $\sigma(E'',E')$, soit réalisée par $v : E' \to L^0(\Omega,\lambda)$. D'après le théorème (4.1), il existe $\Phi \in \mathcal{L}^0_*(\Omega,\lambda;E'')$ telle que $\langle\Phi,\xi\rangle^\cdot = v(\xi)$ pour tout $\xi \in E'$. Mais ${}^t v$ envoie $L^\infty(\Omega,\lambda)$ dans $E$, donc a fortiori $L^\infty(\Omega,\theta\lambda)$ dans $E$, où $\theta$ est associée à $v$ et $\Phi$ par le théorème (4.1). Si donc $B \in \mathcal{O}$ est $\theta\lambda$-intégrable, la forme linéaire continue sur $E'$ : $\xi \mapsto \int_B \langle\Phi,\xi\rangle d\lambda$ est un élément de $E$ ; donc $\int_B \Phi\, d\lambda$ (intégrale $*$-scalaire) $\in E$. Alors le théorème (3.2) dit qu'on peut choisir $\Phi \in \mathcal{L}^0(\Omega,\lambda;E)$, et alors $\Lambda = \Phi(\lambda)$ est de Radon sur $E$.

Inversement, supposons que toute $\Lambda$ de type $+\infty$ et de type $(\tau,1)$ sur $E$ soit de Radon sur $E$. Soit $u \in \mathcal{L}(L^1(\Omega,\lambda);E)$, $\lambda$ probabilité. Alors $v = {}^t u$ est continue de $\tau(E',E)$ dans $\tau(L^\infty,L^1)$ donc a fortiori dans $\tau(L^1,L^\infty) = L^1(\Omega,\lambda)$, elle est de type $(\tau,1)$. Donc $\Lambda$ est de Radon sur $E$ et comme elle est de Radon d'ordre $+\infty$ sur $\sigma(E'',E')$, elle l'est aussi sur $E$. On sait qu'alors elle est réalisable par une $\Phi \in \mathcal{L}^\infty(\Omega,\lambda;E)$ (1), donc $E$ vérifie RNP.

Théorème (4.4) (Linde-Pietsch) : Si $E$ vérifie RNP, toute application 1-sommante d'un Banach $G$ dans $E$ est 1-radonifiante ; si $G$ est un espace $C(\Omega)$, $\Omega$ compact, elle est 1-nucléaire et sa norme nucléaire est sa norme 1-sommante. Inversement, si toute application d'un espace $L^\infty(\Omega,\lambda)$ dans $E$, $\lambda$ probabilité de Radon sur un $\Omega$ compact, est 1-radonifiante, $E$ vérifie RNP.

Démonstration : Supposons que $E$ vérifie RNP, et que $u$ soit 1-sommante $G \to E$. Elle est alors 1-radonifiante de $G$ dans $\sigma(E'',E')$. Soit $\Lambda$ cylindrique

---

(1) Ceci est connu classiquement pour $\lambda$ de Radon sur $\Omega$ compact (voir prop. (XIII,3.1), exposé XIII, séminaire Ecole Polytechnique 1969-70); mais c'est vrai pour $\lambda$ abstraite quelconque.

de type 1 sur G. $u(\Lambda)$ est de Radon sur $\sigma(E'',E')$. Mais elle est de type $(\tau,1)$ sur E ; en effet, u est faiblement compacte, donc ${}^t u$ est continue de $\tau(E',E)$ dans G', et $\Lambda$ est de type 1, ce qui veut dire que si $\eta$ converge vers 0 dans G', $\|\eta(\Lambda)\|_1$ tend vers 0. Donc, d'après le théorème (4.3), $u(\Lambda)$ est de Radon sur E, et u est bien 1-radonifiante. Si $G = C(\Omega)$, u se factorise par $C(\Omega) \to L^\infty(\Omega,\lambda) \xrightarrow{j} L^1(\Omega,\lambda) \xrightarrow{w} E$, $\lambda$ probabilité convenable(2). Alors, E ayant la propriété RNP, w se réalise, par définition par une $\Phi^\cdot \in L^\infty(\Omega,\lambda;E)$, $\|\Phi^\cdot\| = \|w\| = \pi_1(u)$. Alors wj se réalise par $\Phi \in L^1(\Omega,\lambda;E) = L^1(\Omega,\lambda) \hat{\otimes}_\pi E$, donc $u = wj$ est nucléaire, et $\|u\|_{\text{nucl.}} \leq \|\Phi^\cdot\| = \pi_1(u)$.

Inversement, supposons que toute application 1-sommante d'un $L^\infty(\Omega,\lambda)$ ($\lambda$ probabilité de Radon sur $\Omega$ compact) dans E, soit 1-radonifiante. Soit $\Lambda$ une probabilité cylindrique sur E, de type $+\infty$ et de type $(\tau,1)$. Elle peut être réalisée par une $v : E' \to L^\infty(\Omega,\lambda)$, $u = {}^t v : L^1(\Omega,\lambda) \to E$. Alors $V : C(\Omega) \to L^1(\Omega,\lambda) \xrightarrow{u} E$ est 1-sommante, donc 1-radonifiante. L'application $\nu \mapsto \nu/\lambda$, densité de la partie absolument continue de $\nu$ par rapport à $\lambda$, est une application linéaire continue de $C'(\Omega)$ dans $L^1(\Omega,\lambda)$, donc définit une probabilité cylindrique $\nabla$ de type 1 sur $C(\Omega)$ ; donc $V(\nabla)$ est de Radon sur E. Mais $V(\nabla)$ est réalisée par v (car $v(e) = \frac{v(e)\lambda}{\lambda}$), donc c'est $\Lambda$, qui est donc de Radon, nécessairement d'ordre $+\infty$ puisqu'elle l'est sur $\sigma(E'',E')$. Donc le théorème (4.3) dit que E vérifie RNP.

<u>Corollaire (4.5)</u> : <u>Un Banach réflexif, un dual séparable de Banach, ont la propriété RNP.</u>

<u>Démonstration</u> : Ils vérifient la condition du théorème (4.4).

<u>Corollaire (4.6)</u> : <u>Si E' vérifie RNP, tout opérateur intégral d'un Banach dans E' est nucléaire, et tout opérateur intégral de E dans un dual de Banach est nucléaire (et la norme nucléaire est la norme intégrale)</u>

<u>Démonstration</u> : Si $G \to E'$ est intégral, il se factorise par $G \to L^\infty \to L^1 \to E'$, et $L^\infty \to L^1 \to E'$ est nucléaire par le théorème (4.4). Si $E \to G'$ est intégral son transposé $G \to E'$ l'est aussi, donc est nucléaire, donc lui aussi l'est.

(2) Pour $p \geq 1$, la mesure de Pietsch est portée par l'adhérence de l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $C'(\Omega)$, on peut donc la prendre $\lambda$ sur $\Omega$ ; et alors l'adhérence de l'image de $C(\Omega)$ dans $L^p(\Omega,\lambda)$ est $L^p(\Omega,\lambda)$ lui même.

<u>Corollaire (4.7)</u> : Si E' vérifie RNP, toute application 1-sommante de E dans un Banach est 1-radonifiante.

<u>Démonstration</u> : Par la factorisation de Pietsch, il suffit de savoir que tout opérateur $E \to L^{\infty} \to L^{1}$ est 1-radonifiant ; or $E \to L^{\infty} \to L^{1} \hookrightarrow (L^{1})''$ est nucléaire par le corollaire (4.6).

<u>Remarque</u> : Dans le Séminaire de l'Ecole Polytechnique 1969-1970, exposé (XII,4), § 3, nous avons signalé les cas suivants où une application 1-sommante de E dans G est 1-radonifiante : G est réflexif ou dual séparable de Banach ; E est réflexif ou de dual séparable. Nous venons de voir plus généralement que c'est vrai si G ou E' vérifie RNP (théorème (4.4) et corollaire (4.7)).

-------------------