L. Schwartz

Propriété de Radon-Nikodym

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 5 et 6, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A5_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

PROPRIETE DE RADON-NIKODYM

par L. SCHWARTZ

Exposé N° V-VI

4 Décembre 1974

11 Décembre 1974

§.5 DUALITE $L^p(\Omega,\lambda;E)$-$L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')$ ET PROPRIETE DE RADON-NIKODYM POUR UN DUAL E'

Théorème (5,1) : Soit $1 \leq p \leq +\infty$, et $\Phi^\cdot \in L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$. $\Phi^\cdot$ définit une forme linéaire continue $u_{\Phi^\cdot}$ sur $L^p(\Omega,\lambda;E)$, même si λ n'est pas concassable, par $f \to \int\langle\Phi,f\rangle\, d\lambda$; sa norme est $\|u_{\Phi^\cdot}\| = \|\Phi^\cdot\|_{L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')}$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, $\Phi^\cdot \to u_{\Phi^\cdot}$ est une bijection linéaire isométrique de $L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')$ sur $(L^p(\Omega,\lambda;E))'$ (pour $p > 1$, il n'est pas nécessaire que λ soit concassable).

En résumé brutal :
Pour $1 \leq p < +\infty$, le dual de $L^p(\Omega,\lambda;E)$ est $L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')$.

Démonstration :

1) Pour $f^\cdot \in L^p(\Omega,\lambda;E)$, $\Phi^\cdot \in L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')$, la forme bilinéaire $(\Phi^\cdot,f^\cdot) \to \int\langle\Phi,f\rangle d\lambda \in \mathbb{C}$ a été définie au lemme (2.2bis) ; donc $\Phi^\cdot$ définit bien une forme linéaire continue $u_{\Phi^\cdot}$ sur $L^p(\Omega,\lambda;E)$, de norme $\|u_{\Phi^\cdot}\| \leq \|\Phi^\cdot\|_{L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')}$; λ n'a pas besoin d'être concassable.

2) Montrons maintenant que, si $\Phi \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega,\lambda;E')$, $\|u_{\Phi^\cdot}\| = \|\Phi^\cdot\|_{L^p(\Omega,\lambda;E')}$, qui est aussi $\|\Phi^\cdot\|_{L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')}$ par la remarque (2.6). 2.

Supposons d'abord Φ étagée. Il existe une fonction $\alpha \geq 0$, étagée avec les mêmes étages que Φ telle que $\|\alpha\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,\lambda)} = 1$, et $\int|\Phi|\alpha\, d\lambda = \|\Phi^\cdot\|_{L^{p'}(\Omega.\lambda;E')}$. Ensuite il existe $f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\lambda;E)$, encore étagée avec les mêmes étages, telles que $|f| = \alpha$, et $\langle\Phi,f\rangle \geq |\Phi|\alpha(1-\varepsilon)$. Alors $\|f^\cdot\|_{L^p(\Omega,\lambda;E)} = 1$, et

$\|u_{\Phi^\cdot}\| \geq |\int\langle\Phi,f\rangle d\lambda| \geq (1-\varepsilon)\int|\Phi|\alpha\, d\lambda = \|\Phi^\cdot\|_{L^{p'}(\Omega.\lambda;E')}(1-\varepsilon)$, d'où le résultat, ε étant arbitraire. Si ensuite Φ est quelconque, elle est limite d'une suite de fonctions Φ_n étagées, dans $L^{p'}(\Omega,\lambda;E')$; alors $\|\Phi^\cdot - \Phi^\cdot_n\|_{L^{p'}(\Omega,\lambda;E')}$ tend vers 0, donc aussi $\|u_{\Phi^\cdot} - u_{\Phi^\cdot_n}\|$, et de l'égalité pour les Φ_n on la déduit pour Φ. Ici encore, λ n'a pas besoin d'être concassable.

3) Supposons maintenant λ probabilité, et soit u une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega,\lambda;E)$, $1 \le p < +\infty$. Soit $e \in E$; alors $f \to u(f\,e)$ est une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega,\lambda)$, donc est un élément $v(e)$ de $L^{p'}(\Omega,\lambda)$, avec $|u(f\,e)| \le \|u\|\ \|f\,e\|_{L^p(\Omega,\lambda;E} = \|u\|\,\|f\|_{L^p(\Omega,\lambda)}\ |e|$, donc $\|v(e)\|_{L^{p'}(\Omega,\lambda)} \le \|u\|\ |e|$; et $v : e \to v(e)$ est alors une application linéaire continue de E dans $L^{p'}(\Omega,\lambda)$, avec $\|v\| \le \|u\|$.

(Ceci ne subsiste pas pour $p = +\infty$; toutefois si $u = u_\Phi\cdot$, $\Phi \in \mathcal{L}^1_*(\Omega,\lambda;E')$, c'est encore vrai, car $v(e) = <\Phi,e>^\cdot \in L^1(\Omega,\lambda)$, et on a encore la même inégalité $\|v\| \le \|u\|$).

Elle définit donc une probabilité cylindrique Λ sur $\sigma(E',E)$, de type p', $\|\Lambda\|^*_{p'} \le \|u\|$ ♦. Ceci se démontre d'un seul coup (à la fois Prokhorov et l'ordre), en montrant que, si G est un sous-espace quelconque de dimension finie de E, d'injection $j : G \hookrightarrow E$, $G' = E'/G^0$ son dual, avec la projection canonique ${}^tj : E' \to G'$ la probabilité de Radon ${}^tj(\Lambda)$ sur G' vérifie toujours $\|{}^tj(\Lambda)\|_{p'} \le \|u\|$.

[En effet, si $B_{E'}(R)$ et $B_{G'}(R)$ sont les boules de rayon R de E' et G' respectivement, ${}^tj(B_{E'}(R)) = B_{G'}(R)$; alors, de $\|{}^tj(\Lambda)\|_{p'} \le \|u\|$, on déduit $({}^tj\Lambda)(B_{G'}(R)) \le \|u\|^{p'}/R^{p'}$; donc, pour ε donné, le compact $B_{E'}(R) = K$ de $\sigma(E',E)$ vérifiera $({}^tj(\Lambda))({}^tj(K)) \le \varepsilon$ si $\dfrac{\|u\|^{p'}}{R^{p'}} \le \varepsilon$, c'est la condition de Prokhorov et Λ sera de Radon sur $\sigma(E',E)$.

Ensuite, pour tout $\xi \in E'$, $|\xi|_{E'} = \sup |{}^tj(\xi)|_{G'}$ (sup pour tous les (j,G)), et le passage à la limite pour un ordonné filtrant croissant de fonctions semi-continues inférieurement ≥ 0 sur $\sigma(E',E)$ donne

$$\|\Lambda\|_{p'} = \left(\int |\xi|^{p'}\, d\Lambda(\xi)\right)^{1/p'}$$

$$= \sup_{(j,G)} \left(\int |{}^tj(\xi)|^{p'}\, d\Lambda(\xi)\right)^{1/p'}$$

$$= \sup_{(j,G)} \left(\int |\eta|^{p'}\, d({}^tj(\Lambda))(\eta)\right)^{1/p'}$$

$$= \sup_{(j,G)} \|{}^tj(\Lambda)\|_{p'} \le \|u\|\ ].$$

♦ Nous allons montrer que Λ est de Radon sur $\sigma(E',E)$, d'ordre p', avec $\|\Lambda\|_{p'} \le \|u\|$.

Or $L^p(\Omega,\lambda;G)$ est un sous-espace de $L^p(\Omega,\lambda;E)$, et la restriction de u à ce sous-espace est $u\,j$; à partir de uj, on définit une application linéaire continue de G dans $L^{p'}(\Omega,\lambda)$, qui est $v\,j$; elle définit une probabilité cylindrique sur $\sigma(G',G) = G'$, qui est justement ${}^t j(\Lambda)$. Mais, comme G est de dimension finie, $v\,j$ est de la forme $g \to \int < \Phi_G, g > d\lambda$, $\Phi_{G'} \in L^{p'}(\Omega,\lambda;G')$. Et alors, le point 2) montre que $\|u\,j\| = \|\Phi_{G'}\|_{L^{p'}(\Omega,\lambda;G')}$, mais ce dernier membre est exactement $\|{}^t j(\Lambda)\|_{p'}$, puisque $\Phi_{G'}$ réalise ${}^t j(\Lambda)$. On a donc bien $\|{}^t j(\Lambda)\|_{p'} \leq \|u\|$, d'où le résultat relatif à Λ. Mais alors, le théorème (4.1) dit que Λ est réalisée par $\Phi^\bullet \in L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')$, avec $\|\Phi^\bullet\|_{L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')} = \|\Lambda\|_{p'} \leq \|u\|$, donc $u = u_{\Phi^\bullet}$. et $\|u\| = \|\Phi^\bullet\|_{L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')}$ (si $p = +\infty$, et si $u = u_{\Phi^\bullet}$, $u\,j = u_{{}^t j\Phi^\bullet}$, alors $\Phi^\bullet_{G'} = {}^t j\,\Phi^\bullet$; on trouve donc encore que $\|\Phi^\bullet\|_{L^1_*(\Omega,\lambda;E')} \leq \|u\|$, donc $= \|u\|$.

Le théorème est donc complètement démontré pour λ probabilité, donc aussi pour λ finie.

4) Supposons maintenant λ quelconque non nécessairement concassable ; $1 < p < +\infty$ pour u quelconque, ou $p = +\infty$ si on sait que $u = u_{\Phi^\bullet}$. Pour toute partie A de Ω, λ-intégrable, on trouve $\Phi^\bullet_A \in L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')$, portée par A, représentant la restriction de u aux fonctions de $L^p(\Omega,\lambda;E)$ portées par A. Si $A \subset B$, $\Phi^\bullet_B$ induit $\Phi^\bullet_A$ sur A. Mais toujours $\|\Phi^\bullet_A\|_{L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')} \leq \|u\|$. Soit $\theta^\bullet_A \geq 0$ le module minimum des fonctions de la classe $\Phi^\bullet_A$. Alors, si $A \subset B$, $\theta^\bullet_B$ induit $\theta^\bullet_A$ sur A, et $\|\theta^\bullet_A\|_{L^{p'}(\Omega,\lambda)} \leq \|u\|$. Comme $p' \neq +\infty$ puisque $p \neq 1$, cela entraîne l'existence d'une partie Ω' de Ω, réunion dénombrable de boréliens disjoints de λ-mesures finies, puis d'une $\theta^\bullet$ portée par Ω', et d'une $\Phi^\bullet \in L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')$ portée par Ω', telle que $u = u_{\Phi^\bullet}$, avec $\|\Phi^\bullet\|_{L^{p'}_*(\Omega,\lambda;E')} \leq \|u\|$ donc $= \|u\|$.

Le même résultat subsiste pour $p=1$, $p'=+\infty$, si λ est concassable, en raisonnant sur chaque morceau (déjà la dualité, dans le cas scalaire, $(L^1)' = L^\infty$, suppose λ concassable).

Nous allons maintenant voir diverses propriétés équivalentes à la propriété RNP pour E' ; les énoncés seront plus simples que pour E.

Tout d'abord, la propriété RNP pour E' se définit, comme pour tout Banach, par $\mathcal{L}(L^1(\Omega,\lambda);E') = L^\infty(\Omega,\lambda;E')$; mais ici $\mathcal{L}(L^1(\Omega,\lambda);E') = \mathcal{L}(E;L^\infty(\Omega,\lambda)) = L^\infty_*(\Omega,\lambda;E')$ (corollaire (2.3)), de sorte que E' vérifie RNP si et seulement si $\mathcal{L}(E;L^\infty(\Omega,\lambda)) = L^\infty(\Omega,\lambda;E')$, ou si et seulement si $L^\infty_*(\Omega,\lambda;E') = L^\infty(\Omega,\lambda;E')$.
On va d'abord donner un énoncé simplifié de (3.2) lorsque le Banach E est remplacé par un dual E' de Banach.

Théorème 5.2 : Si E' a la propriété RNP, toute classe $\Phi^\bullet \in L^0_*(\Omega,\lambda;E')$ admet un représentant $\Phi \in \mathcal{L}^0(\Omega,\lambda;E')$, qui réalise le module minimum $\theta^\bullet$ de $\Phi^\bullet$. Ou encore, l'application canonique $L^0(\Omega,\lambda;E') \to L^0_*(\Omega,\lambda;E')$ est une bijection.
Inversement, si la propriété ci-dessus est vraie pour toute $\Phi^\bullet \in L^\infty_*(\Omega,\lambda;E')$, E' vérifie RNP.

En résumé brutal : E' A LA PROPRIETE RNP, SI ET SEULEMENT SI $L^0(\Omega,\lambda;E') = L^0_*(\Omega,\lambda;E')$.

Démonstration : Le cas $+\infty$ (pour la réciproque) est la définition.
Soit $\Phi^\bullet \in L^0_*(\Omega,\lambda;E')$, θ son module minimum du théorème 2.5. Alors $e \to \langle \Phi^\bullet, e \rangle / \theta$ est une application linéaire continue de E dans $L^\infty(\Omega,\lambda)$, de norme ≤ 1. D'après le cas $+\infty$ traité, si E' vérifie RNP, il lui correspond $\psi \in \mathcal{L}^\infty(\Omega,\lambda;E')$, $|\psi| \leq 1$, telle que $\langle \Phi^\bullet, \xi \rangle = \langle \psi, \xi \rangle^\bullet \theta = \langle \overline{\Phi}^\bullet, \xi \rangle$ si $\overline{\Phi} = \psi\theta$, d'où le résultat.

Corollaire 5.3 : Si E' vérifie RNP, $L^q(\Omega,\lambda;E') = L^q_*(\Omega,\lambda;E')$ pour tout q, $0 \leq q \leq +\infty$. Inversement, si c'est vrai pour un q et λ probabilité, E' vérifie RNP.

<u>Démonstration</u> : Supposons que E' vérifie RNP. Si $\Phi^{\bullet} \in L^q_*(\Omega,\lambda;E')$, il existe $\overline{\Phi} \in \mathcal{L}^o(\Omega,\lambda;E')$, $|\overline{\Phi}| = \theta$, module minimum de la classe $\Phi^{\bullet}$; donc

$$\|\overline{\Phi}\|_{\mathcal{L}^q(\Omega,\lambda;E')} = \|\Phi^{\circ}\|_{L^q_*(\Omega,\lambda;E')} .$$

Inversement, supposons ceci vrai pour un q, et pour λ probabilité. Alors, c'est vrai pour $q = +\infty$, donc E' vérifie RNP.

<u>Corollaire 5.4</u> : <u>E' vérifie RNP, si et seulement si le dual de $L^p(\Omega,\lambda ; E)$ est $L^{p'}(\Omega,\lambda ; E')$, $1 \leq p < +\infty$.</u>

<u>Démonstration</u> : On applique 5.1 et 5.3.

On va maintenant donner un énoncé du théorème 4.2 où E est remplacé par E'.

<u>Théorème 5.5</u> : 1) <u>Si E' a la propriété RNP, toute probabilité de Radon sur $\sigma(E',E)$ provient d'une probabilité de Radon sur E'. Inversement, si ceci est vrai pour les probabilités de Radon de type $+\infty$, E' vérifie RNP.</u>

2) <u>Si E' vérifie RNP, et si Λ est une probabilité cylindrique sur E', de type $(\tau,0)$ (i.e. si e" converge vers 0 dans $\tau(E'',E')$, $e''(\Lambda)$ converge étroitement vers δ), ayant une image de Radon Λ_σ sur $\sigma(E',E)$, alors Λ est déjà de Radon sur E'.</u>
<u>Inversement, si, pour un p fini ≥ 0, toute probabilité cylindrique de type $+\infty$ et de type (τ,p) sur E' est de Radon, E' vérifie RNP.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit Λ_σ de Radon sur $\sigma(E',E)$, réalisée par une fonction aléatoire linéaire $v : E \to L^o(\Omega,\lambda)$, λ probabilité. Elle est alors réalisée, par le théorème 4.1, par une $\Phi^{\bullet} \in L^o_*(\Omega,\lambda;E')$; si E' vérifie RNP, $\Phi^{\circ} \in L^o(\Omega,\lambda;E')$ par le théorème 5.2, et alors $\Lambda^o = \Phi(\lambda)$ est de Radon sur E' ; son image Λ^o_σ dans $\sigma(E',E)$ est Λ_σ, ce qui démontre la partie directe de 1).

Soit maintenant Λ probabilité cylindrique sur E', de type $(\tau,0)$, ayant une image de Radon Λ_σ sur $\sigma(E',E)$. Si E' vérifie RNP, la partie directe de 1) dit que Λ_σ est l'image d'une probabilité de Radon Λ^o de E'. Alors Λ et Λ^o ont même image dans $\sigma(E',E)$; elles sont toutes les deux de type $(\tau,0)$ ou encore scalairement concentrées sur les parties faiblement compactes convexes, Λ par hypothèse, Λ^o parce qu'elle est de Radon, donc elles sont égales ($e'' \to e''(\Lambda)$ et $e'' \to e''(\Lambda^o)$ sont toutes deux continues de $\tau(E'',E')$ dans l'espace $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ des probabilités sur $\mathbb{C}$ muni de la topologie étroite, et elles coincident sur E dense dans $\tau(E'',E')$, donc partout) (1). Donc Λ est de Radon, ce qui démontre la partie directe de 2).

Montrons maintenant la partie réciproque de 2). Supposons que toute probabilité cylindrique Λ sur E', de type $+\infty$ et de type (τ,p), p fini ≥ 0, soit de Radon. Soit u une application linéaire continue de $L^1(\Omega,\lambda)$ dans E', λ probabilité. Alors ${}^t u$ est linéaire continue de $\tau(E'',E')$ dans $\tau(L^\infty,L^1)$, donc a fortiori dans $\tau(L^p,L^{p'}) = L^p(\Omega,\lambda)$ pour p fini ≥ 1, donc a fortiori dans $L^p(\Omega,\lambda)$ pour p fini ≥ 0. Alors Λ est de Radon sur E', d'ordre $+\infty$ puisque de type $+\infty$, donc Λ est réalisée par une $\Phi \in L^\infty(\Omega,\lambda;E')$, avec $< \Phi,e'' >^\cdot = {}^t u(e'')$ donc $\int \Phi f\, d\lambda = u(f)$ pour $f \in L^1(\Omega,\lambda;E')$, et E' vérifie RNP.

Démontrons enfin la propriété réciproque de 1). Supposons que toute probabilité de type $+\infty$ sur $\sigma(E',E)$ provienne d'une probabilité de Radon sur E'. Soit Λ une probabilité cylindrique de type $+\infty$ sur E', et de type $(\tau,0)$; nous allons montrer qu'elle est de Radon, donc, d'après la réciproque de 2), E' vérifiera RNP, ce qui démontrera la réciproque de 1). Or l'image Λ_σ de Λ dans $\sigma(E',E)$ est de type $+\infty$, donc provient d'une probabilité de Radon Λ^o sur E'. Λ est de type $(\tau,0)$,

---

(1) Voir L. Schwartz : "Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures", Oxford University Press, 1973, Part II, chap. II, § 2, prop. 6, page 200 ; et Séminaire Ecole Polytechnique 1969-1970, prop. (XI.4;1) page (XI.6).

mais aussi Λ^o de Radon ; elles ont même image dans $\sigma(E',E)$, donc sont égales, donc Λ est de Radon, cqfd.

§ 6. LA PROPRIETE DE RADON-NIKODYM ET LES MESURES A VALEURS BANACHIQUES.

C'est ce genre de propriétés qui est à l'origine du mot Radon-Nikodym, mais Dunford-Pettis aurait été meilleur. Pour des mesures scalaires, Radon-Nikodym dit que, si $\mu \geq 0$ est dominée par $\lambda \geq 0$ (toute partie λ-négligeable est μ-négligeable), et si λ et μ ont un concassage commun (ce qui est toujours le cas pour deux mesures σ-finies ou deux mesures de Radon), on peut écrire $\mu = \Phi\lambda$, $\Phi \geq 0$ λ-mesurable partout finie ; la propriété RNP n'a rien à voir avec cela. Le théorème de Dunford-Pettis (déjà montré par ces deux auteurs dans certains cas vectoriels) dit que, si $\mu \leq \lambda$,♦ Φ λ-mesurable et $0 \leq \Phi \leq 1$. Bien sûr, dans le cas scalaire, c'est un cas particulier de Radon-Nikodym ; mais c'est seulement ce cas particulier qui est extensible aux Banach, et qui sera lié à la propriété que nous avons appelée RNP.

Définition 6.1 : On appellera mesure sur $(\Omega,\mathcal{O})$ à valeurs dans un Banach E une application $\mu : \mathcal{O} \to E$, dénombrablement additive : si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{O}$, de réunion B, alors $\mu(B) = \sum_n \mu(B_n)$ (suite sommable).

Nous ne comparerons μ qu'à des mesures $\lambda \geq 0$ finies ; sans quoi il serait nécessaire d'introduire "le prolongement de Lebesgue de μ" (Bartle, Dunford, J. Schwartz, E. Thomas), ce qui nous mènerait trop loin. Donc, dans tout ce paragraphe, μ sera une mesure banachique sur $(\Omega,\mathcal{O})$, λ une mesure ≥ 0 finie.

Définition 6.2 : On dit que μ est majorée par λ, et on écrit $\mu \lll \lambda$, si, pour tout $B \in \mathcal{O}$, $|\mu(B)| \leq \lambda(B)$.

Théorème 6.3 : Toute $\Phi \in \mathcal{L}^\infty_{**}(\Omega,\lambda;E'')$ de norme ≤ 1 définit une mesure $\mu_\Phi \lll \lambda$ par $\mu_\Phi(B) = \int_B \Phi \, d\lambda$ (intégrale *-scalaire) $\in E$. On la note $\mu_\Phi = \Phi\lambda$.

♦ et si μ et λ ont un concassage commun, $\mu = \Phi\lambda$,

<u>Deux fonctions Φ et Φ' définissent la même mesure si et seulement si elles sont *-scalairement λ-pp égales</u>. <u>Donc</u> $\Phi^\bullet \in L^\infty_{**}(\Omega,\lambda;E'')$, <u>de norme ≤ 1, définit une mesure</u> $\mu_{\Phi^\bullet} \lll \lambda$. <u>Inversement, pour toute mesure $\mu \lll \lambda$, il existe</u> $\Phi^\bullet \in L^\infty_{**}(\Omega,\lambda;E'')$ <u>unique telle que $\mu = \Phi\lambda$</u>.

> En résumé brutal :
> L'ESPACE DES MESURES MAJOREES PAR λ EST EN CORRESPONDANCE BIJECTIVE AVEC LA BOULE UNITE DE $L^\infty_{**}(\Omega,\lambda;E'')$.

<u>Démonstration</u> : Une mesure $\mu \lll \lambda$ définit une application linéaire de l'espace des fonctions étagées dans E, par $\mu(\sum_i c_i 1_{B_i}) = \sum_i c_i \mu(B_i)$, et, on a $|\mu(\sum_i c_i 1_{B_i})| \leq \sum_i |c_i| \lambda(B_i)$, c'est-à-dire $|\mu(f)| \leq \lambda(|f|)$.

Donc, elle se prolonge en une application linéaire continue u de $L^1(\Omega,\lambda)$ dans E, de norme ≤ 1. Inversement, une telle application u définit une mesure μ par $\mu(B) = u(1_B)$, et $|\mu(B)| \leq \|u\| \, \|1_B\|_{L^1(\Omega,\lambda)} = \lambda(B)$; c'est bien une mesure, autrement dit elle est bien dénombrablement additive, car, si $B = \bigcup_n B_n$, les B_n disjoints, $1_B = \sum_n 1_{B_n}$ dans $L^1(\Omega,\lambda)$, donc $\mu(B) = \sum_n \mu(B_n)$. Le théorème résulte alors du corollaire 2.4.

<u>Remarque</u> : Le cas d'un dual est un peu plus simple, et se ramène à 2.2 : l'espace des mesures à valeurs dans E', majorées par λ, est en correspondance bijective avec la boule unité de $L^\infty_{*}(\Omega,\lambda;E') = \mathcal{L}(L^1(\Omega,\lambda);E')$.

<u>Théorème 6.3</u> : <u>E a la propriété RNP, si et seulement si toute mesure μ majorée par λ s'écrit $\mu = \Phi\lambda$, où $\Phi^\bullet \in L^\infty(\Omega,\lambda;E)$, de norme ≤ 1</u>.

<u>Démonstration</u> : C'est la définition 3.1 bis.

Il est intéressant de pousser un peu plus loin l'étude des mesures de la forme $\Phi\lambda$.

<u>Définition 6.4</u> : 1) On dit que μ est dominée par λ si tout borélien λ-négligeable esr μ-négligeable. On écrit $\mu \prec \lambda$.

2) On dit que μ est de base λ si elle s'écrit $\mu = \Phi\lambda$, $\Phi \in \mathcal{L}^1(\Omega,\lambda;E)$.

Remarques 6.5 : 1) Une mesure μ n'admet pas toujours de majorante λ finie ≥ 0. Si elle en admet, elle admet une plus petite majorante finie ≥ 0. En effet, supposons que $\mu \lll \lambda_1$ et $\mu \lll \lambda_2$. La mesure $\mathrm{Inf}(\lambda_1,\lambda_2)$ est définie par $(\mathrm{Inf}(\lambda_1,\lambda_2))(B) = \mathrm{Inf}(\lambda_1(B_1)+\lambda_2(B_2))$, pour toutes les partitions $B_1 \cup B_2 = B$; alors, $\mu \lll \mathrm{Inf}(\lambda_1,\lambda_2)$. D'autre part, soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ un ordonné filtrant décroissant de mesures finies ≥ 0 ; alors la mesure $\lambda = \underset{i\in I}{\mathrm{Inf}}\ \lambda_i$ est définie par $(\underset{i\in I}{\mathrm{Inf}}\ \lambda_i)(B) = \underset{i\in I}{\mathrm{Inf}}\ (\lambda_i(B))$; donc, si μ est majorée par toutes les λ_i, elle est majorée par leur borne inférieure λ. L'ensemble des mesures ≥ 0 finies majorant λ, s'il n'est pas vide, admet donc un plus petit élément.

2) Une mesure μ n'admet pas en génral une dominante λ finie ≥ 0. Il reste vrai que, si μ est dominée par λ_1 et λ_2, elle est dominée par $\mathrm{Inf}(\lambda_1,\lambda_2)$. En effet, il existe en fait une partition $B = B_1 \cup B_2$ telle que $\mathrm{Inf}(\lambda_1,\lambda_2)(B) = \lambda_1(B_1) + \lambda_2(B_2)$; si alors B est $\mathrm{Inf}(\lambda_1,\lambda_2)$-négligeable, $\mu(B) = \mu(B_1) + \mu(B_2) = 0$.
Mais il n'est plus vrai que si μ est dominée par des λ_i, $i \in I$, elle soit dominée par leur borne inférieure. Donc, il n'existe pas de plus petite dominante ≥ 0. C'est déjà trivialement faux pour $\mu \geq 0$: elle est dominée par toutes les $\varepsilon\mu$, $\varepsilon > 0$, et pas par 0.

3) Une mesure μ n'est pas nécessairement de base ≥ 0, i.e. il n'existe pas λ finie ≥ 0 telle que $\mu = \Phi\lambda$. Même une mesure μ dominée par λ n'est pas nécessairement de base λ. Les seuls Banach pour lesquels cette propriété soit vraie sont ceux qui ont une dimension finie.

4) μ est dominée par λ si et seulement si elle est scalairement dominée par λ, ou scalairement de base λ. Car, si $\lambda(B) = 0$, $\mu(B) = 0$ équivaut à $< \mu,\xi >(B) = 0$ pour tout $\xi \in E'$.

Théorème 6.6 : 1) Une mesure $\mu = \Phi\lambda$, $\Phi^\bullet \in L^1_{**}(\Omega,\lambda;E)$, admet des majorantes ≥ 0 ; sa plus petite majorante finie ≥ 0 est $\theta\lambda$, où θ est le module minimum de la classe $\Phi^\bullet$ (théorème 2.5).

2) Si μ est majorée par λ et de base ≥ 0, elle s'écrit $\mu = \Phi\lambda$, $\Phi^{\bullet} \in L^{\infty}(\Omega,\lambda;E)$, de norme ≤ 1.

3) Si μ est dominée par λ et de base ≥ 0, elle est de base λ.

4) E a la propriété RNP si et seulement si toute mesure à valeurs dans E, majorée par une mesure finie ≥ 0, est de base ≥ 0.

5) E a la propriété RNP, si et seulement si toute mesure à valeurs dans E, dominée par λ et majorée par une mesure ≥ 0, est de base λ. (C'est la définition adoptée usuellement dans la littérature, et c'est la seule qui justifie le nom de Radon-Nikodym. Mais, ce n'est pas la propriété la plus utile !)

<u>Démonstration</u> : 1) Soit $\overline{\Phi} \in \Phi^{\bullet}$, de module $|\overline{\Phi}| = \theta$; μ est aussi $\overline{\Phi}\lambda$. Bien entendu, $\theta\lambda$ est une majorante. Soit ν la plus petite majorante ≥ 0. Alors $\nu \leq \theta\lambda$, donc $\nu = r\,\theta\lambda$, r $\theta\lambda$- mesurable ≥ 0 sur Ω, $0 \leq r \leq 1$; on peut prendre $r=0$ là où $\theta=0$, donc r est λ-mesurable. Pour tout $\xi \in E'$, $|\xi| \leq 1$, la mesure $< \mu,\xi > = < \overline{\Phi},\xi >$ est majorée par $\nu = r\,\theta\lambda$, donc $|< \overline{\Phi},\xi >| \leq r\,\theta$, λ-pp. Alors $\sup\limits_{|\xi|\leq 1} |< \overline{\Phi},\xi >|$, qui est $\theta^{\bullet}$, est $\leq r\,\theta$, λ-pp. Donc $r = 1$, λ-pp, et $\nu = \theta\lambda$.

2) Soit μ majorée par λ, et de base $\sigma \geq 0$. Donc $\mu = \psi\sigma$, $\psi \in L^1(\Omega,\sigma,E)$. D'après 1), la plus petite majorante ≥ 0 de μ est $|\psi|\sigma$, donc $|\psi|\sigma \leq \lambda$. Alors $|\psi|\sigma = r\lambda$, r λ-mesurable, $0 \leq r \leq 1$.
Alors $\mu = \psi\sigma = \frac{\psi}{|\psi|}\,|\psi|\sigma = \frac{\psi}{|\psi|}\,r\lambda = \Phi\lambda$, $\Phi \in L^{\infty}(\Omega,\lambda;E)$, $|\Phi| \leq 1$.

3) Soit μ dominée par λ, et de base $\sigma \geq 0$: $\mu = \psi\sigma$, $\psi \in L^1(\Omega,\sigma;E)$. Alors μ est dominée par λ et par σ, donc par $\mathrm{Inf}(\lambda,\sigma) = r\sigma$, r borélienne, $0 \leq r \leq 1$. Alors $\mu = \psi\sigma = \frac{\psi}{r}\,r\sigma$ (l'ensemble borélien A $\{r=0\}$ est $\mathrm{Inf}(\lambda,\sigma)$-négligeable donc toutes ses parties boréliennes sont de μ-mesure nulle ; alors toutes les $< \mu,\xi > = < \psi,\xi >\sigma$ donnent une mesure nulle à toute partie borélienne de A, donc $< \psi,\xi > = 0$ sur A, σ-pp ; ψ étant σ-mesurable, $\psi = 0$ σ-pp sur A ; et $\frac{\psi}{r} = \frac{0}{0} = 0$ σ-pp sur $\{r=0\}$).

Mais $\mathrm{Inf}(\lambda,\sigma) = s\lambda$, s borélienne λ-mesurable, $0 \leq s \leq 1$.
Donc $\mu = \frac{\psi}{r}\, \mathrm{Inf}(\lambda,\sigma) = \frac{\psi}{r}\, s\lambda = \Phi\lambda$, Φ λ-mesurable.
Et $\int \frac{|\psi|}{r}\, s\, d\lambda = \int \frac{|\psi|}{r}\, d(\mathrm{Inf}(\lambda,\sigma)) = \int \frac{|\psi|}{r}\, r\, d\sigma = \int |\psi|\, d\sigma < +\infty$.

Donc $\mu = \Phi\lambda$, $\Phi \in L^1(\Omega,\lambda;E)$.

4) Supposons que E vérifie RNP. Si alors $\mu \ll \lambda$, on a $\mu = \Phi\lambda$, $\Phi \in L^\infty(\Omega,\lambda;E)$, $|\Phi| \leq 1$, d'après 6.3 ; donc elle est de base $\lambda \geq 0$.

Réciproquement, supposons que toute mesure majorée soit de base ≥ 0.
Soit $\mu \ll \lambda$. Elle est de base ≥ 0, et alors s'écrit, d'après le 2), $\mu = \Phi\lambda$, $\Phi \in L^\infty(\Omega,\lambda;E)$, $|\Phi| \leq 1$. Donc E vérifie RNP d'après 6.3.

5) Supposons que E vérifie RNP. Soit μ une mesure majorée, dominée par λ. D'après 4), μ majorée est de base ≥ 0 ; dominée par λ, elle est de base λ par 3). Inversement, supposons que toute mesure majorée, dominée par λ, soit de base λ ; alors toute mesure majorée est de base ≥ 0, E vérifie RNP par 4).

§ 7. LA PROPRIETE DE RADON-NIKODYM ET LES MARTINGALES BANACHIQUES.

Soit $(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$ un espace de probabilité, $(\mathcal{C}^t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un ensemble de sous-tribus de la tribu λ-mesurable, croissant et continu à droite, indexé par $\mathbb{R}_+$. Soit $\mathcal{C}^\infty$ la tribu engendrée par la réunion des $\mathcal{C}^t$.
Si X est une fonction λ-intégrable sur Ω, à valeurs dans un Banach E, les $X^t = X^{\mathcal{C}^t}$, espérance conditionnelle de X sur $\mathcal{C}^t$, λ, forment une martingale, et on sait qu'elle admet une version régulière, i.e λ-ps (ps veut dire presque sûrement) réglée et continue à droite. En outre, X^t converge λ-ps et dans $L^1(\Omega,\lambda;E)$ vers $X^\infty = X^{\mathcal{C}^\infty}$, et les X^t sont uniformément intégrables. Le problème qu'on veut étudier est celui d'une martingale régulière $(X^t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, sans donnée d'une X ni d'une X^∞, et de généraliser aux martingales banachiques certaines propriétés des martingales scalaires. Dans le cas scalaire, on sait que, si $\int |X^t|\, d\lambda$ est borné

pour $t \in \mathbb{R}_+$, X^t a une limite X^∞ λ-ps pour $t \to +\infty$, et X^∞ est $\mathcal{C}^\infty$-mesurable et λ-intégrable ; mais, en général, X^t ne tend pas vers X^∞ dans $L^1(\Omega,\lambda)$, et $(X^t,\mathcal{C}^t)$, $(X^\infty,\mathcal{C}^\infty)$ ne forment pas une martingale ; il en est ainsi si et seulement si les (X^t) sont uniformément λ-intégrables.

<u>Théorème 7.1</u> : <u>Si $\int |X_t| d\lambda$ est borné pour</u> $t \in \mathbb{R}_+$, <u>il existe</u> $X^\infty \in \mathcal{L}^1_*(\Omega,\lambda;E'')$, <u>telle que X^t converge, pour $t \to +\infty$, *-scalairement λ-ps. vers X^∞.</u>
<u>Si, en outre, les $|X^t|$ sont uniformément λ-intégrables, alors, pour tout $\xi \in E'$, $(<X^t,\xi>,\mathcal{C}^t)$, $(<X^\infty,\xi>,\hat{\mathcal{C}}^\infty_\lambda)$ est une martingale ($\hat{\mathcal{C}}^\infty_\lambda$ est la complétée de $\mathcal{C}^\infty$ pour λ), et les $<X^t,\xi>$ convergent vers $<X^\infty,\xi>$ dans $L^1(\Omega,\lambda)$; en outre,</u> $X^\infty \in \mathcal{L}^1_{**}(\Omega,\lambda ; E'')$.

<u>Démonstration</u> : 1) Les $|X^t|$ forment une sous-martingale régulière ≥ 0, et la condition de l'énoncé entraîne que $|X^t|$ converge λ-ps. vers une limite $S^\infty \geq 0$ λ-intégrable. Soit ξ dans E' ; alors les $<X^t,\xi>$ forment une martingale, et $\int |<X^t,\xi>| d\lambda$ est borné pour $t \in \mathbb{R}_+$, donc $<X^t,\xi>$ converge λ-ps. vers une limite X^∞_ξ λ-intégrable ; et $|<X^t,\xi>| \leq |X^t|\ |\xi|$, donc $|X^\infty_\xi| \leq S^\infty |\xi|$. Donc, $\xi \to (X^\infty_\xi / S^\infty)^\circ$ est une application linéaire continue de norme ≤ 1 de E' dans $L^\infty(\Omega,\lambda)$. Il existe donc, d'après Dunford-Pettis, théorème 2.2, $\psi \in \mathcal{L}^\infty_*(\Omega,\lambda ; E'')$ telle que $<\psi,\xi> = X^\infty_\xi / S^\infty$ λ-ps., donc $<X^\infty,\xi> = X^\infty_\xi$ λ-ps., si $X^\infty = \psi S^\infty$; et $|X^\infty| \leq S^\infty$, donc $X^\infty \in \mathcal{L}^1_*(\Omega,\lambda;E'')$.
Au lieu de considérer λ comme mesure sur $\mathcal{O}$, on on pourrait la considérer comme mesure sur $\mathcal{C}^\infty$, à laquelle appartiennent tous les X^t, $|X^t|$, S^∞, donc on peut choisir $\psi \in \mathcal{L}^\infty_*(\Omega,\mathcal{C}^\infty,\lambda ; E'')$, donc $X^\infty \in \mathcal{L}^1_*(\Omega,\mathcal{C}^\infty,\lambda ; E'')$; toutes les fonctions $<X^\infty,\xi>$ sont $\hat{\mathcal{C}}^\infty_\lambda$-mesurables, où $\hat{\mathcal{C}}^\infty_\lambda$ est la complétée de $\mathcal{C}^\infty$ pour λ.

2) Si les $|X^t|$ sont uniformément intégrables, alors aussi les $|<X^t,\xi>|$ pour $\xi \in E'$, donc $(<X^t,\xi>,\mathcal{C}^t)$, $(<X^\infty,\xi>,\hat{\mathcal{C}}^\infty_\lambda)$ est une martingale, et $<X^t,\xi>$ converge vers $<X^\infty,\xi>$ dans $L^1(\Omega,\lambda)$.
Bien entendu, en appliquant le théorème 2.5, on peut choisir X^∞ ayant le module minimum de sa classe, alors $|X^\infty|$ est λ-mesurable donc λ-intégrable.

Montrons alors que $X^\infty \in \mathcal{L}^1_{**}(\Omega,\lambda ; E'')$, c'est-à-dire que, pour toute f borélienne bornée, $\int X^\infty f\, d\lambda$ (intégrable *-scalaire) $\in E$.

Comme X^∞ est *-scalairement $\hat{\mathcal{C}}^\infty_\lambda$-mesurable, c'estaussi $\int X^\infty f^{\mathcal{C}^\infty} d\lambda$, donc on peut supposer que f est $\mathcal{C}^\infty$-mesurable. On a alors, pour les intégrales *-scalaires :

$$\left|\int (X^\infty - X^t) f\, d\lambda\right| = \left|\int (X^\infty f - X^t f^{\mathcal{C}^t})\, d\lambda\right| = \left|\int X^\infty (f - f^{\mathcal{C}^t})\, d\lambda\right|$$

$$\leq \int |X^\infty|\, |f - f^{\mathcal{C}^t}|\, d\lambda .$$

Mais, $f^{\mathcal{C}^t}$ converge λ-ps. vers f en restant bornée (si on prend une version régulière de la martingale des $f^{\mathcal{C}^t}$), donc, d'après Lebesgue, $\int X^\infty f\, d\lambda$ est à distance nulle de E dans E'' (car $\int X^t f\, d\lambda \in E$), donc est dans E, c.q.f.d.

<u>Théorème 7.2</u> : (Chatterji)[(1)]. Si E a la propriété RNP, alors la fonction X^∞ du théorème 7.1 peut être choisie λ-intégrable à valeurs dans E et $\mathcal{C}^\infty$-mesurable, et X^t converge vers X^∞ λ-ps. Si, en outre, les $|X^t|$ sont uniformément intégrables, $(X^t, \mathcal{C}^t)$, $(X^\infty, \mathcal{C}^\infty)$, forment une martingale, et X^t converge vers X^∞ dans $L^1(\Omega, \lambda\,;\, E)$.

<u>Démonstration</u> : 1) La méthode n'utilise absolument par le résultat du théorème 7.1, et, on va retrouver X^∞ par une tout autre méthode. Soit Γ le clan réunion des $\mathcal{C}^t$, $t \in \mathbb{R}_+$; Γ est stable par complémentation, et par réunions et intersections finies, mais pas par réunions et intersections dénombrables ; la tribu engendrée par Γ est $\mathcal{C}^\infty$. $\mathcal{O}$ n'interviendra plus, nous considérerons λ comme définie sur $\mathcal{C}^\infty$. Soit $B \in \Gamma$; alors $B \in \mathcal{C}^{t_o}$ pour un certain t_o ; donc $\int_B X^t\, d\lambda = \int_B X^{t_o}\, d\lambda$ pour $t \geq t_o$, on peut donc parler de $\mu(B) = \lim_{t \to +\infty} \int_B X^t\, d\lambda$. On a construit ainsi sur Γ une "mesure simplement additive" μ à valeurs dans E ; même dans le cas scalaire, elle n'est pas en général une vraie mesure, dénombrablement additive ; elle n'est en outre pas définie sur $\mathcal{C}^\infty$, mais seulement sur Γ. Soit maintenant $M(B) = \operatorname{Sup} \sum_n |\mu(B_n)|$, le Sup étant pris sur toutes les suites, finies ou non,

---

(1) S.D. Chatterji : "Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces", Math. Scand. 22 (1968), page 21-41.

$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de parties disjointes de B ; on peut se borner aux sommes finies, puisque toute $\sum_n |\mu(B_N)|$ est le Sup de ses sommes finies. Tout d'abord, $M(B) < +\infty$; en effet, si tous les B_n (en nombre supposé fini comme on vient de le dire) sont dans $\mathcal{C}^{t_o}$, $\mu(B_n) = \int_{B_n} X^{t_o}\, d\lambda$, donc

$$\sum_n |\mu(B_n)| \leq \int_\Omega |X^{t_o}|\, d\lambda \leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int |X^t|\, d\lambda < +\infty.$$

Ensuite M est une "mesure finie ≥ 0 simplement additive" sur Γ, et c'est évidemment la plus petite qui majore μ.

Nous allons maintenant remplacer Ω par un compact, spectre d'une algèbre de Banach. Considérons l'espace $C_\Gamma(\Omega)$ des limites uniformes de fonctions Γ-étagées sur Ω. C'est une C^*-algèbre de Banach commutative. Il a un spectre compact $\hat{\Omega}$, et $C_\Gamma(\Omega)$ est isomorphe à l'algèbre $C(\hat{\Omega})$ des fonctions continues sur $\hat{\Omega}$. Dans cette correspondance, une partic $A \in \Gamma$ définit $1_A \in C_\Gamma(\Omega)$, élément égal à son carré, donc $\hat{1}_A = 1_{\hat{A}}$, où $\hat{A}$ est une partie ouverte-fermée de $\hat{\Omega}$; inversement, si $\hat{A}$ est ouverte fermée dans $\hat{\Omega}$, $1_{\hat{A}}$ est une fonction continue égale à son carré, donc de la forme $\hat{1}_A, 1_A \in C_\Gamma(\Omega)$; alors A est limite uniforme de fonctions Γ-étagées, d'où l'on déduit aussitôt que $A \in \Gamma$; on a donc une correspondance bijective entre Γ et le clan $\hat{\Gamma}$ des parties ouvertes-fermées de $\hat{\Omega}$. $\hat{\Omega}$ est complètement discontinu, les fonctions continues étagées sont denses dans $C(\hat{\Omega})$ puisque les fonctions Γ-étagées sont denses dans $C_\Gamma(\Omega)$.

Mais maintenant M et λ définissent des fonctions simplement additives ≥ 0 sur $\hat{\Gamma}$, que nous noterons $\hat{M}$ et $\hat{\lambda}$. Elles s'étendent en formes linéaires continues ≥ 0 sur l'espace des fonctions continues étagées, par $\hat{M}(\sum c_i 1_{\hat{A}_i}) = \sum c_i \hat{M}(\hat{A}_i)$, $|\hat{M}(\sum c_i 1_{\hat{A}_i})| \leq \sup_i |c_i| \sum_i \hat{M}(\hat{A}_i) = \sup_i |c_i| \hat{M}(\hat{\Omega}) < +\infty$.

Donc elles se prolongent encore en formes linéaires continues ≥ 0 sur $C(\hat{\Omega})$, c'est-à-dire en mesures de Radon ≥ 0 sur $\hat{\Omega}$, que nous noterons encore $\hat{M}$ et $\hat{\lambda}$. Nous aurons alors une décomposition $\hat{M} = \hat{M}_1 + \hat{M}_2$, où $\hat{M}_1$ est de base $\hat{\lambda}$, et $\hat{M}_2$ étrangère à $\hat{\lambda}$; elles sont portées par deux ensembles boréliens complémentaires de $\hat{\Omega}$, $\hat{\Omega}_1$ et $\hat{\Omega}_2$, $\hat{\Omega}_1$ portant $\hat{\lambda}$ et $\hat{M}_1$, $\hat{\Omega}_2$ $\hat{\lambda}$-négligeable portant $\hat{M}_2$; $\hat{M}_i = 1_{\hat{\Omega}_i} \hat{M}$.

Considérons maintenant $\hat{\mu}$. Elle définit une application linéaire continue, de l'espace des fonctions continues étagées, dans E,

par $\hat{\mu}(\sum_i c_i 1_{\hat{A}_i}) = \sum_i c_i \hat{\mu}(\hat{A}_i)$, avec $|\hat{\mu}(\sum_i c_i 1_{\hat{A}_i})| \leq \sum_i |c_i| \hat{M}(\hat{A}_i) \leq \operatorname{Sup}_i |c_i| \hat{M}(\hat{\Omega})$, donc encore une application linéaire continue $\hat{\mu} : C(\hat{\Omega}) \to E$, une mesure de Radon sur $\hat{\Omega}$ à valeurs dans E.
Les inégalités ci-dessus se prolongent à $C(\hat{\Omega})$ par passage à la limite et donnent $|\hat{\mu}(\hat{\varphi})| \leq \hat{M}(|\hat{\varphi}|)$: $\hat{\mu}$ est majorée par $\hat{M}$. On en déduit aussitôt que μ est prolongeable, au sens d'Erik Thomas, aux fonctions boréliennes bornées sur Ω, avec toujours $\mu \lll M$ [1].

On peut donc considérer les mesures de Radon prolongeables, à valeurs dans E, $\hat{\mu}_1 = 1_{\hat{\Omega}_1} \hat{\mu}$, $\hat{\mu}_2 = 1_{\hat{\Omega}_2} \hat{\mu}$, définies par $\hat{\mu}_i(\hat{\varphi}) = \hat{\mu}(\hat{\Omega}_i \cap \hat{B})$.

Alors $\hat{\mu}_1$ est portée par $\hat{\Omega}_1$, majorée par $\hat{M}_1$, donc dominée par $\hat{\lambda}$ (tout ensemble $\hat{\lambda}$-négligeable est $\hat{M}_1$-négligeable donc $\hat{\mu}_1$-négligeable), et $\hat{\mu}_2$ est portée par $\hat{\Omega}_2$ $\hat{\lambda}$-négligeable, et majorée par $\hat{M}_2$.

Maintenant revenons en arrière à Ω et au clan Γ. On trouve, en plus de M et μ, également M_1, M_2, μ_1, μ_2, comme "mesures simplement additives" sur le clan Γ, par exemple avec $\mu_i(B) = \hat{\mu}_i(\hat{B})$ pour $B \in \Gamma$.
Mais il existe une condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure finie simplement additive $\nu \geq 0$ sur Γ soit prolongeable en une vraie mesure finie ≥ 0 sur la tribu $\mathcal{C}^\infty$ engendrée par Γ : c'est que, si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de parties de Γ, d'intersection vide, $\nu(B_n)$ tende vers 0. Or, M_1 possède cette propriété ; car $\lambda(B_n)$ tend vers 0, donc $\hat{\lambda}(\hat{B}_n)$ aussi et comme $\hat{M}_1$ est de base $\hat{\lambda}$, $\hat{M}_1(\hat{B}_n)$ tend vers 0, donc aussi $M_1(B_n)$. Donc M_1 est prolongeable en une mesure (dénombrablement additive) finie ≥ 0 sur $\mathcal{C}^\infty$, encore notée M_1. Et, il est aussi connu qu'une mesure banachique simplement additive μ_1 sur Γ, majorée par une mesure finie $M_1 \geq 0$ prolongeable à $\mathcal{C}^\infty$, est aussi prolongeable en une mesure banachique dénombrablement additive sur $\mathcal{C}^\infty$, encore notée μ_1, et les prolongements à $\mathcal{C}^\infty$ vérifient encore $\mu_1 \lll M_1$.
Mais la propriété relative aux suites $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être étendue par une plus forte : si $(\hat{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite quelconque de parties boréliennes de $\hat{\Omega}$, telle que $\hat{\lambda}(\hat{B}_n)$ tende vers 0, alors $\hat{M}_1(\hat{B}_n)$ tend vers 0, parce que $\hat{M}_1$ est de base $\hat{\lambda}$.

---

(1) Erik Thomas : "L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle", Annales de l'Institut Fourier, tome XX, fasc.2, 1970, p.106-114.

Donc, si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite quelconque de parties du clan Γ, telle que $\lambda(B_n)$ tend vers 0, $M_1(B_n)$ tend vers 0. On voit alors que ceci s'étend à des $B_n \in \mathcal{C}^\infty$; donc, si $B \in \mathcal{C}^\infty$ est λ-négligeable, elle est M_1-négligeable♦, M_1 est de base λ, μ_1 est dominée par λ. Faisons maintenant intervenir la propriété RNP de E : μ_1 est majorée par M_1 et dominée par λ ; par le théorème 6.6, 5; μ_1 est de base λ. Donc $\mu_1 = X^\infty\lambda$, $X^\infty \in \mathcal{L}^1(\Omega,\lambda\,;E)$, et on peut la choisir $\mathcal{C}^\infty$-mesurable. Nous allons précisément montrer que X^t converge vers X^∞ λ-ps. pour $t \to +\infty$.

On peut poser $X^t = Y^t + Z^t$, avec $Y^t = (X^\infty)^{\mathcal{C}^t}$; $(Y^t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $(Z^t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sont des martingales. Pour toute $B \in \Gamma$, $B \in \mathcal{C}^{t_0}$ pour un t_0 convenable, $\int_B Y^t\, d\lambda = \int_B (X^\infty)^{\mathcal{C}^t}\, d\lambda = \int_B X^\infty\, d\lambda$.

Donc la mesure simplement additive attachée à la martingale des Y^t comme μ l'était à celle des X^t est $X^\infty\lambda$, c'est-à-dire μ_1, et la majorante ≥ 0 correspondante est M_1 ; elles sont prolongeables en vraies mesures sur $\mathcal{C}^\infty$. Donc, la mesure simplement additive attachée à $(Z^t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est μ_2, majorée par M_2 ; elles sont seulement simplement additives sur Γ. Comme Y^t converge λ-ps. vers X^∞ pour $t \to +\infty$, il faut montrer que Z^t converge λ-ps. vers 0.
On notera que $\hat{\Omega}_1$, $\hat{\Omega}_2$, sont des boréliens de $\hat{\Omega}$, non des ouverts fermés, donc, ne sont pas les $\wedge$ d'ensembles Ω_1, $\Omega_2 \in \Gamma$. Mais, $\hat{\Omega}_2$ étant $\hat{\lambda}$-négligeable, il existe un ouvert $\hat{\Omega}'_2$ d'$\hat{\Omega}$, contenant $\hat{\Omega}_2$, de $\hat{\lambda}$-mesure $\leq \varepsilon$; $\hat{\mu}_2$ est encore portée par $\hat{\Omega}'_2$, et $\hat{\Omega}'_1 = \complement\, \hat{\Omega}'_2$ est $\hat{M}_2$-négligeable. Ensuite, $\hat{\Omega}$ étant complètement discontinu, les ouverts fermés forment une base de sa topologie ; comme les mesures de Radon passent à la limite pour les ordonnés filtrants croissants d'ouverts, il existe $\hat{A}_2$ ouvert fermé contenu dans $\hat{\Omega}'_2$, donc $\hat{\lambda}(\hat{A}_2) \leq \varepsilon$, tel que, si $\hat{A}_1 = \complement\, \hat{A}_2$, on ait $\hat{M}_2(\hat{\Omega}_2 \setminus \hat{A}_2) = \hat{M}_2(\hat{\Omega}'_2 \setminus \hat{A}_2) \leq \varepsilon$, donc $\hat{M}_2(\hat{A}_1) \leq \varepsilon$. Mais alors $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ correspondent à deux ensembles complémentaires A_1, $A_2 \in \Gamma$, avec $\lambda(A_2) \leq \varepsilon$, et $M_2(A_1) \leq \varepsilon$, donc $|\mu_2(A_1)| \leq \varepsilon$.

Les $|Z^t|$ forment une sous-martingale ≥ 0, et $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int |Z^t|\, d\lambda \leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int |X^t|\, d\lambda + \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int |(X^\infty)^{\mathcal{C}^t}|\, d\lambda < +\infty$; les $|Z^t|$

♦ donc μ_1-négligeable.

convergent donc λ-ps. vers une limite T^∞ λ-intégrable, et nous devons montrer que $T^\infty = 0$ λ-ps. Par Fatou :

$$\int_\Omega T^\infty \, d\lambda = \int_{A_1} + \int_{A_2} \leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_{A_1} |Z^t| \, d\lambda + \int_{A_2} T^\infty \, d\lambda \quad .$$

Mais $A_1 \in \Gamma$ est dans une $\mathcal{C}^{t_o}$, t_o convenable ; pour $t \geq t_o$, μ_2 coincide sur $\mathcal{C}^t$ avec $Z^t\lambda$, donc $M_2 \geq |Z^t| \lambda$ (théorème 6.6,1), donc $\int_{A_1} |Z^t| d\lambda \leq M_2(A_1) \leq \varepsilon$

pour $t \geq t_o$, donc $\int_\Omega T^\infty \, d\lambda \leq \varepsilon + \int_{A_2} T^\infty \, d\lambda$.

Faisons tendre ε vers 0 ; comme $\lambda(A_2)$ tend vers 0, $\int_{A_2} T^\infty \, d\lambda$ tend vers 0,

donc $\int_\Omega T^\infty \, d\lambda = 0$, donc $T^\infty = 0$ λ-ps.

2) Si les X^t sont uniformément intégrables, la convergence presque sûre des X^t vers X^∞ entraîne leur convergence dans $L^1(\Omega,\lambda \,;\, E)$. On peut alors prendre des espérances conditionnelles, et il est évident que $(X^t,\mathcal{C}^t)$, $(X^\infty,\mathcal{C}^\infty)$, forment une martingale. On doit toutefois remarquer qu'on peut donner ici une démonstration évidente indépendante de la méthode ci-dessus. Le théorème 7.1 nous a donné une fonction $X^\infty \in L^1_{**}(\Omega,\lambda;E'')$. Alors le théorème 3.2 nous dira, si E a la propriété RNP, que $X^\infty \in L^1(\Omega,\lambda;E)$. Et, puisque $(X^t,\mathcal{C}^t)$, $(X^\infty,\mathcal{C}^\infty)$, forment une martingale $*$-scalaire, on a exactement $(X^t) = (X^\infty)^{\mathcal{C}^t}$, d'où le résultat, c.q.f.d.

<u>Remarque 7.2 bis</u> : <u>Appelons</u> RNP_o <u>la propriété suivante</u> : <u>Si</u> $\Omega_o = [0,1]$ <u>munie de sa tribu borélienne</u>, λ_o = <u>mesure de Lebesgue, alors</u> $\mathcal{L}(L^1(\Omega_o,\lambda_o);E)$, <u>qui est</u> $L^\infty_{**}(\Omega_o,\lambda_o,E)$, <u>est</u> $L^\infty(\Omega_o,\lambda_o;E)$.

La démonstration de 7.2, 2, montre que♦ $X^\infty \in L^1_{**}(\Omega_o,\lambda_o;E)$. Mais $|X^\infty| \leq S^\infty = $
$= \lim_{t\to\infty} |X^t|$, donc X^∞ définit une application linéaire continue de $L^1(\Omega_o,S^\infty\lambda_o)$ dans E'', donc elle envoie $L^1(\Omega_o,S^\infty\lambda_o)$ dans E ; donc, dès que E vérifie RNP_o, $X^\infty/S^\infty \in L^\infty_{**}(\Omega_o,\lambda_o \,;\, E) = L^\infty(\Omega_o,\lambda_o \,;\, E)$ et, par suite, $X^\infty \in L^1(\Omega_o,\lambda_o \,;\, E)$. Nous aurons besoin de ce résultat au corollaire **7.4**, pour montrer au corollaire 7.7 que RNP_o = RNP.

♦ si une martingale $(X^t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est construite sur (Ω_o,λ_o), alors...

Nous allons maintenant considérer des martingales à ensembles d'indices quelconques. Soit I un ordonné filtrant, $(\mathcal{E}^i)_{i \in I}$ un ensemble de sous tribus de la tribu λ-mesurable de $(\Omega,\mathcal{O})$, $\mathcal{E}^i \subset \mathcal{E}^j$ pour $i \leq j$, $\mathcal{E}^\infty$ la tribu engendrée par la réunion des $\mathcal{E}^i$. On sait que même dans le cas scalaire uniformément intégrable et même pour I dénombrable, aucun théorème de convergence presque sûre ne subsiste lorsque I n'est que partiellement ordonné. Mais, si X est λ-intégrable scalaire ou banachique, et si $X^i = X^{\mathcal{E}^i}$,

alors $X^{\mathcal{E}^i}$ converge vers $X^{\mathcal{E}^\infty}$ dans L^1. On appellera martingale relative à I, $(\mathcal{E}^i)_{i \in I}$, une famille de fonctions $(X^i)_{i \in I}$, λ-intégrables, X_i $\mathcal{E}^i$-mesurable, avec $(X^j)^{\mathcal{E}^i} = X^i$ pour $i \leq j$.
Alors :

<u>Lemme 7.3</u> : <u>Soit E un Banach tel que toute martingale uniformément intégrable à valeurs dans E, à ensemble $I = \mathbb{N}$, à tribus $\mathcal{E}^n$ finies, avec $\Omega_o = [0,1]$, λ_o = mesure de Lebesgue, ait une limite dans $L^1(\Omega_o,\lambda_o\,;E)$. Alors toute martingale uniformément intégrable à valeurs dans E converge dans $L^1(\Omega,\lambda\,;E)$.</u>

<u>Démonstration</u> : 1) Supposons d'abord $I = \mathbb{N}$, les $\mathcal{E}^n$ finies, mais (Ω,λ) arbitraire. Chaque $\mathcal{E}^n$ est définie par une partition finie Ω_k^n, $k \in K_n$ fini, de Ω. On peut trouver une partition $(\Omega_o)_k^n$ de $[0,1]$, telle que $\lambda_o((\Omega_o)_k^n) = \lambda(\Omega_k^n)$. Sur Ω_k^n, X^n prend une certaine valeur $e_k^n \in E$; nous prendrons $X_o^n = e_k^n$ sur $(\Omega_o)_k^n$. Les X^n forment une martingale pour la suite croissante des $\mathcal{E}^n$; cela veut dire que $\mathcal{E}^{n+1}$ est définie par une sous-partition de celle qui définit $\mathcal{E}^n$, et que $\int_{\Omega_k^n} X^{n+1} = \lambda(\Omega_k^n)\, e_k^n$.

Alors, on choisira les $(\Omega_o)_k^n$ de proche en proche de manière que $\mathcal{E}_o^{n+1}$ soit aussi définie par une sous-partition de celle qui définit $\mathcal{E}_o^n$, donc $\mathcal{E}_o^{n+1} \supset \mathcal{E}_o^n$. Alors, d'après l'hypothèse, les X_o^n auront une limite dans $L^1(\Omega_o,\lambda_o\,;E)$, donc formeront une suite de Cauchy ; mais $\int_\Omega (X^m - X^n)\, d\lambda = \int_{\Omega_o} (X_o^m - X_o^n)\, d\lambda_o$, donc les X^n formeront aussi une suite de Cauchy dans $L^1(\Omega,\lambda\,;E)$, donc auront une limite.

2) Gardons maintenant $I = \mathbb{N}$, mais ne supposons plus les tribus $\mathcal{E}^n$ finies. Pour chaque n, $\mathcal{E}^n$ est la tribu engendrée par la réunion de ses sous-tribus finies. Donc X^n est la limite dans $L^1(\Omega,\lambda\,;\,E)$ de ses espérances conditionnelles sur les sous-tribus finies de $\mathcal{E}^n$. Donc il existe $\mathcal{S}^n \subset \mathcal{E}^n$, finie, telle que $\int |(X^n)^{\mathcal{S}^n} - X^n|\, d\lambda \leq \frac{1}{n}$.
On pourra, de proche en proche, supposer la suite des $\mathcal{S}^n$ croissante, $\mathcal{S}^{n+1} \supset \mathcal{S}^n$. Alors les $(X^n)^{\mathcal{S}^n}$ ont une limite dans $L^1(\Omega,\lambda\,;\,E)$ par 1), donc aussi les X^n.

3) Soient enfin Ω,λ,I quelconques. Si le résultat n'était pas vrai, les X^i ne formeraient pas un filtre de Cauchy dans $L^1(\Omega,\lambda\,;\,E)$. Donc, il existerait un $\varepsilon > 0$, et une suite $i_o < i_1 < i_2 \ldots$ telle que, pour tout n, $\int |X_{i_{n+1}} - X_{i_n}|\, d\lambda > \varepsilon$.
Alors les $(X_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ formeraient une martingale uniformément intégrable à ensemble $I = \mathbb{N}$, sans limite dans $L^1(\Omega,\lambda\,;\,E)$, ce qui est absurde.

<u>Remarque 7.3 bis</u> : $(\Omega_o,\lambda_o) = ([0,1]$, Lebesgue) peut être remplacé par n'importe quel (Ω_1,λ_1) diffus.

<u>Corollaire 7.4</u> : <u>Si E vérifie RNP ou plus généralement RNP_o (définition à la remarque 7.2 bis), toute martingale uniformément intégrable converge dans $L^1(\Omega,\lambda\,;\,E)$.</u>

<u>Démonstration</u> : On applique le théorème 7.2. Nous allons maintenant démontrer la réciproque de 7.2 et 7.4 sous la forme la plus forte possible :

<u>Théorème 7.5</u> : <u>Soit E un Banach tel que toute martingale à valeurs dans E, uniformément intégrable, indexée par $I = \mathbb{N}$, avec des $\mathcal{E}^n$ finies, et</u> $(\Omega_o,\lambda_o) = ([0,1]$, Lebesgue) <u>converge dans $L^1(\Omega,\lambda\,;\,E)$. Alors E vérifie RNP.</u>

<u>Démonstration</u> : D'après le lemme 7.3, toute martingale uniformément intégrable à valeurs dans E converge dans $L^1(\Omega,\lambda\,;\,E)$.
Soit u une application linéaire continue de $L^1(\Omega,\lambda)$ dans E. Soit $\mathcal{E}$ une

sous-tribu finie de la tribu $\mathcal{O}$ définie par une partition $(\Omega_k)_{k \in K}$ finie de Ω. L'application linéaire continue $u^{\mathcal{C}} : f \to u(f^{\mathcal{C}})$ de $L^1(\Omega,\lambda)$ dans E est évidemment définie par une $\Phi^{\mathcal{C}} \in L^{\infty}(\Omega,\lambda\,;E)$, $\mathcal{C}$-mesurable.
En effet, $u^{\mathcal{C}}(f) = \sum_{k \in K} \frac{1}{\lambda(\Omega_k)} \int_{\Omega_k} f\, d\lambda\; u(1_{\Omega_k}) = \int \Phi^{\mathcal{C}} f\, d\lambda$, avec

$\Phi^{\mathcal{C}} = \sum_{k \in K} \frac{1}{\lambda(\Omega_k)} u(1_{\Omega_k})\, 1_{\Omega_k}$; $|\Phi^{\mathcal{C}}| \leq \|u\|$, car, sur Ω_k, elle vaut

$u(1_{\Omega_k})/\lambda(\Omega_k)$, majoré en module par $\frac{1}{\lambda(\Omega_k)} \|u\|\, \|1_{\Omega_k}\|_{L^1(\Omega,\lambda)} = \|u\|$.

Si $f \in L^1(\Omega,\lambda)$ est $\mathcal{C}$-mesurable, $f^{\mathcal{C}} = f$, donc $u^{\mathcal{C}}(f) = u(f)$, donc $u(f) = \int \Phi^{\mathcal{C}} f\, d\lambda$. Donc, si $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$, et, si f est $\mathcal{C}$-mesurable, $\int \Phi^{\mathcal{U}} f\, d\lambda = \int \Phi^{\mathcal{C}} f\, d\lambda = u(f)$; donc, $\Phi^{\mathcal{C}}$ est l'espérance conditionnelle de $\Phi^{\mathcal{U}}$ sur $\mathcal{C}$: les $\Phi^{\mathcal{C}}$ forment une martingale bornée, indexée par l'ordonné filtrant des sous-tribus finies de $\mathcal{O}$, dont la réunion engendre $\mathcal{C}^{\infty} = \mathcal{O}$. D'un côté, $f^{\mathcal{C}}$ converge vers f dans $L^1(\Omega,\lambda)$, donc $u^{\mathcal{C}}(f)$ vers $u(f)$ dans E. D'un autre côté, d'après l'hypothèse, $\Phi^{\mathcal{C}}$ doit converger vers une limite Φ dans $L^1(\Omega,\lambda\,;E)$. Comme la boule unité de $L^{\infty}(\Omega,\lambda\,;E)$ est fermée dans $L^1(\Omega,\lambda\,;E)$ (car, de toute suite convergente dans L^1, on peut extraire une sous-suite convergeant λ-pp.), on a encore $|\Phi| \leq 1$.
Si f est bornée, comme $\Phi^{\mathcal{C}}$ converge vers Φ dans $L^1(\Omega,\lambda\,;E)$,

$$\int \Phi\, f\, d\lambda = \lim_{\mathcal{C}} \int \Phi^{\mathcal{C}} f\, d\lambda = \lim_{\mathcal{C}} u^{\mathcal{C}}(f) = u(f).$$

Alors u et $f \to \int \Phi\, f\, d\lambda$ sont deux applications linéaires continues de $L^1(\Omega,\lambda)$ dans E, elles coincident sur $L^{\infty}(\Omega,\lambda)$ donc partout. Et E vérifie RNP.

<u>Corollaire 7.6</u> : <u>Si E vérifie RNP, tous ses sous-Banach aussi. Inversement, si tous les sous-Banach séparables de E vérifient</u> RNP_o (<u>remarque 7.2 bis</u>), <u>E vérifie RNP</u>.

<u>Démonstration</u> : Supposons que E vérifie RNP, et soit F un sous-Banach. Alors toute martingale uniformément intégrable à valeurs dans F converge dans $L^1(\Omega,\lambda\,;E)$, mais la limite est nécessairement dans $L^1(\Omega,\lambda\,;F)$, donc F vérifie RNP.

Inversement, supposons que tout sous-Banach séparable de E vérifie $\check{\mathrm{RNP}}_o$. Alors E vérifie les hypothèses du théorème 7.5, car une martingale $\tilde{\text{in}}$-dexée par $\mathbb{N}$ sur $(\Omega_o,\lambda_o) = ([0,1],\text{Lebesgue})$ prend ses valeurs dans un sous-Banach séparable de E ; donc E vérifie RNP.

7.7 : Opérateurs RNP et martingales.

Il y aurait eu lieu de définir, dès le début, la propriété RNP pour un opérateur linéaire continu $w : E \to F$. Il y a au moins deux notions possibles, a priori pas identiques :

1) w a la propriété RNP_1 si, pour toute $\Phi \in \mathcal{L}^\infty_{**}(\Omega,\lambda\,;E'')$, alors $w \circ \Phi$ est $*$-scalairement λ-pp. égale à une fonction de $\mathcal{L}^\infty(\Omega,\lambda\,;F)$; autrement dit, si $w(L^\infty_{**}(\Omega,\lambda\,;E'')) \subset L^\infty(\Omega,\lambda\,;F)$.

2) w a la propriété RNP_2 si, pour toute $\Phi \in \mathcal{L}^\infty_{*}(\Omega,\lambda\,;E'')$ telle que $w\circ\Phi \in \mathcal{L}^\infty_{**}(\Omega,\lambda\,;F'')$, $w\circ\Phi$ est $*$-scalairement λ-pp. égale à une fonction de $\mathcal{L}^\infty(\Omega,\lambda\,;F)$; autrement dit, si
$$w(L^\infty_{*}(\Omega,\lambda\,;E'')) \cap L^\infty_{**}(\Omega,\lambda\,;F) \subset L^\infty(\Omega,\lambda\,;F).$$

RNP_2 entraîne RNP_1. Tout opérateur faiblement compact vérifie RNP_2, car il transite par un espace réflexif [(1)] (c'est aussi très facile de le montrer directement).
Nous n'allons pas faire la théorie de ces opérateurs, mais il est au moins nécessaire d'énoncer la propriété des martingales, donnée sous forme purement topologique par Kelley et Namioka.

Théorème 7.8 : Soit $(X^t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale régulière à valeurs dans un faiblement compact K d'un Banach E. Alors il existe $X^\infty \in L^1(\Omega,\lambda\,;E)$ à valeurs dans K, telle que X^t converge λ-ps. et dans $L^1(\Omega,\lambda\,;E)$ vers X^∞. Toute martingale $(X^i)_{i\in I}$, à ensemble d'indices filtrant quelconque, à valeurs dans K, a une limite dans $L^1(\Omega,\lambda\,;E)$ à valeurs dans K, qui est aussi la limite d'une suite extraite convenable.

---

(1) Voir Séminaire Maurey-Schwartz, Ecole Polytechnique, 1973-1974, p. XVII

<u>Démonstration</u> : Comme toutes les X^t prennent leurs valeurs dans un sous-Banach séparable de E, on peut supposer E séparable. Soit D' un ensemble dénombrable, $*$-faiblement dense dans E'. Alors, λ-ps., $< X^t, \xi >$ converge vers une limite pour tout $\xi \in D'$. Mais la topologie de K est identique à la topologie moins fine séparée de la convergence simple sur D'. Donc X^t converge λ-ps. vers une limite X^∞ à valeurs dans K ; X^∞ est λ-mesurable et bornée donc λ-intégrable, et X^t converge vers X^∞ dans $L^1(\Omega,\lambda ; E)$.
Si maintenant I est quelconque, les X^i forment un filtre de Cauchy dans $L^1(\Omega,\lambda ; E)$, sans quoi (voir démonstration du lemme 7.3) on en extrairait une suite qui ne serait pas de Cauchy et ce serait contradictoire ; alors, les X^i ont une limite X^∞ dans $L^1(\Omega,\lambda ; E)$, qui est aussi la limite d'une suite extraite convenable.

<u>Théorème 7.9</u> : <u>La superpriorité de RNP est la super-réflexivité</u> [(1)].

<u>Démonstration</u> : Si E est réflexif, il vérifie RNP, donc la super-reflexivité implique super-RNP. Mais, si E vérifie RNP, il n'a pas d'arbre infini ; car un arbre infini serait une martingale bornée non ps-convergente. Donc super-RNP implique la super-propriété de la propriété "E n'a pas d'arbre infini" et celle-ci est : "E n'a pas d'arbre fini" ou "E est super-réflexif".

---

(1) Voir Séminaire Maurey-Schwartz, Ecole Polytechnique, 1973-1974, exposé XIV.

§ 8. LA PROPRIETE RNP ET LE THEOREME INTEGRAL DE CHOQUET POUR LES CONVEXES FERMES BORNES.

Théorème 8.1 (Edgar)[2] : Soit C un ensemble convexe fermé borné séparable d'un Banach E ayant la propriété RNP. Alors tout point a de C est la barycentre $a = \int x\, d\Lambda(x)$ d'une probabilité de Radon Λ de E, portée par l'ensemble C_{ex} des points extrêmaux de C.

Démonstration : C, fermé d'un Banach séparable, est polonais, donc aussi $C \times C$, et encore $(C\times C) \setminus \Delta$, Δ diagonale de $C \times C$. L'application α : $(x,y) \to \frac{x+y}{2}$ est continue de $C\times C$ sur C. L'image $\alpha((C\times C)\setminus \Delta)$ est exactement le complémentaire $\complement C_{ex}$ de l'ensemble des points extrêmaux de C. Il en résulte d'abord que $\complement C_{ex}$ est souslinien, donc C_{ex} universellement mesurable.
D'après Von Neumann, il existe une section $\sigma : \complement C_{ex} \to (C\times C) \setminus \Delta$, universellement mesurable, $\alpha \circ \sigma = \mathrm{Id}$[1].
Nous prolongerons σ par Id sur C_{ex}, σ est donc une application universellement mesurable de C dans $C \times C$, $\alpha \circ \sigma = \mathrm{Id}$, et σ est l'identité sur C_{ex} et seulement sur lui.
Posons $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, où σ_1 et σ_2 sont universellement mesurables $C \to C$.
Soit I l'ensemble des ordinaux dénombrables. Nous allons définir une martingale $(X^i)_{i\in I}$ à valeurs dans E comme suit. Ω sera le produit $\{1,2\}^I$ muni de la mesure produit λ des mesures de pile ou face $\frac{1}{2}\,\delta_{(1)} + \frac{1}{2}\,\delta_{(2)}$.
Pour $i \in I$, $\mathcal{C}^i$ sera la tribu engendrée par les projections p_j, $j \leq i$, du produit, et les parties λ-négligeables.
Nous poserons $X^0 \equiv a \in C$. Supposons défini X^i, nous définirons X^{i+1} par : $X^{i+1}(\omega) = \sigma_1(X^i(\omega))$ ou $\sigma_2(X^i(\omega))$ selon que $p_{i+1}(\omega) = 1$ ou 2.

Alors, puisque σ_1 et σ_2 sont universellement mesurables, donc λ-mesurables, X^{i+1} est dans la tribu $\mathcal{C}^{i+1}$.

---

(1) Voir par exemple L. Schwartz : "Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures". Oxford University Press, 1973, Part I chap. II, n° 3, theor. 13, page 127.

---

(2) demander la référence à Maurey ou Beauzamy.

Il est fastidieux, mais évident et sans intérêt de vérifier que $(X^i, \mathscr{C}^i)$, $(X^{i+1}, \mathscr{C}^{i+1})$ est une martingale. Supposons maintenant i ordinal limite, et les X^j définies pour $j < i$, et formant une martingale à valeurs dans C. Comme E a la propriété RNP, elles ont (corollaire 7.4) une limite λ-ps. et dans $L^1(\Omega, \lambda ; E)$, soit X^i, qui sera $\mathscr{C}^i$-mesurable, et

$(X^j, \mathscr{C}^j)$, $(X^i, \mathscr{C}^i)$, $j < i$, formera encore une martingale. Alors $(X^i)_{i \in I}$, ainsi formée par récurrence transfinie, est une martingale bornée. Chaque X^i est λ-mesurable Lusin, puisque C est souslinien. Encore une fois à cause de RNP, les X^i ont une limite dans $L^1(\Omega, \lambda ; E)$, qui est aussi la limite d'une suite extraite convenable. Donc, il existe un ordinal dénombrable X^i tel que $X^{i+1} = X^i$ λ-ps. Cela prouve que $X^i \in C_{ex}$ λ-ps. Alors $a = \int X^i \, d\lambda = \int x \, d\Lambda(x)$, si Λ est l'image $X^i(\lambda)$, probabilité de Radon sur C_{ex}, c.q.f.d.

Remarque : Ce procédé redonne le théorème de Choquet, si C est un compact convexe métrisable. En effet, C peut être plongé (affinement et topologiquement) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc aussi dans un Banach séparable E (ayant une injection continue dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Au lieu d'appliquer la propriété RNP et 7.4, on appliquera 7.8.

OUF !

Rectificatif : Il existe une différence regrettable entre la manière dont on a défini :

1) $\mathscr{L}^0_{**}(\Omega, \lambda ; E)$ comme espace des Φ, $*$-scalairement λ-mesurables à valeurs dans E'' et bornées , telles que, pour toute $B \in \mathcal{O}$ θλ-intégrable, (où θ est le module minimum de la classe $\Phi^{\bullet}$), $\int_B \Phi \, d\lambda$ (intégrale $*$-scalaire) $\in E$, et

2) $\mathscr{L}^{\infty}_{**}(\Omega, \lambda ; E)$ comme espace des Φ, $*$-scalairement λ-mesurables à valeurs dans E'' et bornées, telles que, pour toute $B \in \mathcal{O}$ λ-intégrable, $\int_B \Phi \, d\lambda \in E$.

Il y a une meilleure définition, qui est la même dans les 2 cas :

3) $\mathcal{L}^p_{**}(\Omega,\lambda\,;E)$, $0\leq p\leq+\infty$, est l'espace des fonctions Φ, $*$-scalairement λ-mesurables à valeurs dans E'', telles que $\theta\in L^p(\Omega,\lambda)$ si θ est le module minimum de la classe $\Phi^{\bullet}$, et que, pour toute $B\in\mathcal{O}$, à la fois λ et $\theta\lambda$-intégrable, $\int_B \Phi\, d\lambda\in E$.

Cela redonne 2), car, pour Φ bornée, θ est bornée, donc toute B λ-intégrable est aussi $\theta\lambda$-intégrable. Cela redonne aussi 1). Supposons en effet Φ vérifiant 3, montrons qu'elle vérifie 1 (la réciproque est évidente). Soit B $\theta\lambda$-intégrable. Alors $B=(B\cap\{\theta=0\})\cup(B\cap\{\theta>0\})$, et le premier est $\theta\lambda$-négligeable. Ensuite $B\cap\{\theta\geq\frac{1}{n}\}$ est à la fois λ et $\theta\lambda$-intégrable, car, sur cet ensemble, $\lambda\leq n\,\theta\,\lambda$; donc $\int_{B\cap\{\theta\geq\frac{1}{n}\}}\Phi\, d\lambda\in E$. Enfin

$$\left|\int_B \Phi\, d\lambda - \int_{B\cap\{\theta\geq\frac{1}{n}\}}\Phi\, d\lambda\right| \leq \int_{B\cap\{\theta<\frac{1}{n}\}}\theta\, d\lambda\ ,$$

et ceci tend vers 0 par Lebesgue puisque B est $\theta\lambda$-intégrable ; donc $\int_B \Phi\, d\lambda\in E$, et Φ vérifie bien 1.
