Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Beauzamy

Réitération de modèles étalés

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 18, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

REITERATION DE MODELES ETALES

B. BEAUZAMY

Exposé No XVIII

23 Février 1979

Le but du présent exposé est de présenter un article [2] dû à Bernard Maurey et à l'auteur, et qui doit paraître dans Arkiv för Math.

Soit E un espace de Banach, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E. A. Brunel et L. Sucheston ont montré dans [3] qu'il existe une sous-suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la limite de $\|a_1 x'_{n_1} + \dots + a_k x'_{n_k}\|$ existe, lorsque $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ tendent vers l'infini, pour toutes les suites de scalaires $a_1, \dots, a_k$.

Une suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant cette propriété s'appellera une bonne suite.

Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la base canonique de l'espace S des suites finies de scalaires, nous notons $|a_1 e_1 + \dots + a_k e_k|$ la limite précédente. C'est une norme sur cet espace, pourvu que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ait pas de sous-suite convergente. Soit F la complétion de S pour cette norme : nous appellerons F le modèle étalé de E, construit sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appellera "suite fondamentale" de F (ce n'est pas une base de Schauder en général).

Cette notion a été initialement introduite et étudiée par A. Brunel et L. Sucheston (voir par ex. [3] et [4]) : elle a été appliquée à l'étude des propriétés de Banach-Saks par l'auteur dans [1], où le lecteur pourra trouver les démonstrations des assertions que nous donnons ici.

Notre but dans les pages qui suivent est d'étudier la question suivante, soulevée par H.P. Rosenthal : étant donnés un espace E, un modèle étalé F_1 construit sur une suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, un modèle étalé F_2 construit sur une suite bornée $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F_1, F_2 est-il isomorphe à un modèle étalé F de E, construit sur une certaine suite bornée $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E ?

La version isométrique de cette question a été résolue négativement par les auteurs dans [1]. Nous montrerons ici que la question, dans toute sa généralité, a aussi une réponse négative : nous allons construire un espace de Banach E, un modèle étalé F_1 de E, un modèle étalé F_2 de F_1, qui ne soit isomorphe à aucun modèle étalé de E.

L'outil que nous utiliserons est la relation entre les propriétés de Banach-Saks et l'isomorphisme d'un modèle étalé avec ℓ^1, établi par l'auteur dans [1]. Plus précisément, rappelons les énoncés suivants, donnés dans [1] :

<u>Définition</u> : Un espace de Banach E a la propriété $(\mathcal{P}_1)$ si, pour un $\delta > 0$, il existe une suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dans E, telle que :

$\forall\, k,\ \forall\, n_1 < n_2 < \ldots < n_k\ ,\ \forall\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k = \pm 1\ ,$

(1) $$\Big\|\frac{1}{k}\sum_1^k \varepsilon_i\, x_{n_i}\Big\|_E \geq \delta\ .$$

<u>Théorème</u> ([1]) :

a) E a la propriété $(\mathcal{P}_1)$ si et seulement si il possède un modèle étalé dont la suite fondamentale est équivalente à la base canonique de ℓ^1.

b) Si $(\mathcal{P}_1)$ est satisfaite, on peut, pour tout $\eta > 0$, trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de norme 1 qui donne l'estimation (1) avec $1-\eta$ au lieu de δ.

A propose de ce théorème, mentionnons que, comme l'a observé J.T. Lapresté, le modèle est isomorphe à ℓ^1 si et seulement si sa suite fondamentale est équivalente à la base canonique de ℓ^1.

Passons maintenant à la construction de notre exemple. Nous allons construire un espace qui n'a pas la propriété $(\mathcal{P}_1)$ (c'est-à-dire, d'après [1], qui a la propriété "Banach-Saks-Alternée"), mais a un modèle étalé F_1 qui contient ℓ^1. C'est de toute évidence suffisant pour répondre à la question de H.P. Rosenthal.

Considérons la fonction d'Orlicz

$$\varphi(t) = \frac{t}{1 - \operatorname{Log} t} \quad \text{si} \quad 0 < t \leq 1$$

$$= 2t - 1 \quad \text{si} \quad t \geq 1\ ,$$

et soit ℓ^φ l'espace d'Orlicz associé à cette fonction. La norme $\|(x(k))_{k\in\mathbb{N}}\|_\varphi$ de la suite $(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est par définition

$$\inf\left\{C,\ \sum_{k=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{|x(k)|}{C}\right) \leq 1\right\}\ .$$

On sait qu'avec une telle fonction φ, l'espace d'Orlicz ℓ^φ a les propriétés suivantes :

a) $\ell^1 \subset \ell^\varphi \subset \ell^p$, $\forall\, p > 1$, avec injections continues

b) l'espace ℓ^φ contient ℓ^1 : on peut trouver une suite de blocs consé-

cutifs sur la base canonique qui est équivalente à la base de ℓ^1.
c) Il y a un nombre δ_o, $0<\delta_o<1$, tel que, si $(a(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b(k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont des suites finies, à supports disjoints, avec $\|(a(k))_{k\in\mathbb{N}}\|_\varphi \geq \delta_o$ et $\|(b(k))_{k\in\mathbb{N}}\|_\varphi \geq \delta_o$, alors $\|(a(k)+b(k))_{k\in\mathbb{N}}\|_\varphi > 1$ (on vérifie immédiatement que $\delta_o < \frac{4}{5}$) .

L'espace pour notre contre-exemple sera construit selon les mêmes lignes que dans [1], utilisant des ensembles admissibles, mais avec la norme ℓ^φ au lieu de la norme ℓ^1.

Rappelons qu'un sous-ensemble fini $A=\{n_1,\ldots,n_k\}$ (avec $n_1<n_2<\ldots<n_k$) est admissible si $k\leq n_1$. Nous notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-ensembles admissibles de $\mathbb{N}$.

Nous considérons les suites de scalaires $(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sup_{A\in\mathcal{A}} \|(x(k))_{k\in A}\|_\varphi < \infty$$

et nous appelons S_φ l'adhérence des suites finies pour la norme

$$\|(x(k))_{k\in\mathbb{N}}\|_{S_\varphi} = \sup_{A\in\mathcal{A}} \|(x(k))_{k\in A}\|_\varphi \quad .$$

C'est un espace "de type Schreier", qui, à plusieurs égards, est analogue à l'espace introduit par J. Schreier dans [7], et à l'espace étudié par l'auteur dans [1].

Nous passons maintenant à l'étude de cet espace. Observons d'abord que la base canonique $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ℓ^1 est aussi une base inconditionnelle de S_φ ; nous l'appellerons aussi base canonique de S_φ.

<u>Proposition 1</u> : Le modèle étalé construit sur la base canonique de S_φ est isométrique à ℓ^φ.

<u>Démonstration</u> : Pour une suite finie de scalaires, $a_1,\ldots,a_k$, calculons $\|a_1 e_{n_1}+\ldots+a_k e_{n_k}\|_{S_\varphi}$.

Lorsque n_1 est assez grand (précisément si $n_1\geq k$), il est clair que $\|a_1 e_{n_1}+\ldots+a_k e_{n_k}\|_{S_\varphi} = \|(a_i)\|_\varphi$, puisque l'ensemble $\{n_1,\ldots,n_k\}$ esy admissible. Ceci prouve la proposition.

<u>Proposition 2</u> : S_φ n'a pas de modèle étalé isomorphe à ℓ^1.

<u>Démonstration</u> : Supposons au contraire qu'un modèle étalé F de S_φ soit

isomorphe à ℓ^1. Alors, d'après le théorème, S_φ doit avoir la propriété $(\mathcal{P}_1)$. Choisissons $\eta > 0$ avec $\eta < \frac{1-\delta_0}{7}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de norme 1 qui donne $(\mathcal{P}_1)$ avec l'estimation $1-\eta$ dans (1). Pour tout $i \in \mathbb{N}$, les i-èmes coordonnées $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées ; on peut donc, par un procédé diagonal, trouver une sous-suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} x'_n(i)$ existent pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Si nous posons $y_n = \frac{1}{2}(x'_{2n-1} - x'_{2n})$, pour tout i, $y_n(i) \to 0$. On a évidemment $\|y_n\|_{S\varphi} \leq 1 \ \forall n$, et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne aussi $(\mathcal{P}_1)$ avec les mêmes estimations.

Puisque les formes linéaires coordonnées sont continues dans S_φ et puisque les suites finies sont denses dans cet espace, nous pouvons trouver une sous-suite $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de blocs consécutifs

$$z_n = \sum_{i=\ell_{n-1}+1}^{\ell_n} \alpha_i e_i \quad ,$$

avec $\|z_n\|_{S_\varphi} \leq 1$ et $\|z_n - y'_n\|_{S_\varphi} \leq \eta$.

La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne aussi $(\mathcal{P}_1)$ avec $1-2\eta$ dans (1) et est inconditionnelle :

$$(2) \qquad \begin{cases} \forall k, \ \forall n_1 < \dots < n_k, \ \forall \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k = \pm 1 \quad , \\ \left\|\frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i z_{n_i}\right\|_{S_\varphi} = \left\|\frac{1}{k} \sum_1^k z_{n_i}\right\|_{S_\varphi} \geq 1 - 2\eta \quad . \end{cases}$$

Considérons d'abord les termes :

$$\frac{1}{2} \|z_1 + z_n\|_{S_\varphi} \qquad n \geq 2$$

et notons ℓ l'indice du dernier terme non nul dans z_1.

[<u>Lemme 1</u> : On a, si $n > 1$,

$$\frac{1}{2} \|z_1 + z_n\|_{S_\varphi} = \sup \left\{ \frac{1}{2} \|(z_1(k) + z_n(k))_{k\in A}\|_\varphi \ ; \ A \in \mathcal{A}, \ |A| \leq \ell \right\} \quad .$$

<u>Démonstration du lemme 1</u> : Si un ensemble admissible A est tel que

$$\frac{1}{2} \|(z_1(k) + z_n(k))_{k\in A}\| \geq 1-3\eta \quad ,$$

on ne peut avoir $z_1(k) = 0 \ \forall k \in A$. Donc A commence avant ℓ, et donc a au plus ℓ éléments. Ceci prouve le lemme.

Lemme 2 : **Pour tout $i \geq 2$,** chaque bloc z_i contient un sous-bloc z'_i avec les propriétés suivantes :
- $z'_i(k) \neq 0$ pour au plus ℓ entiers k
- $\|z'_i\|_\varphi \geq 1-5\eta$.

(Par sous-blocs, nous entendons que $z'_i(k) = z_i(k)$ pour certains k, et 0 autrement).

Démonstration du lemme 2 : Supposons au contraire que l'on puisse trouver un z_i, $i \geq 2$, tel que pour tous les sous-blocs z'_i de z_i, de longueur ℓ, on ait $\|z'_i\|_\varphi < 1-5\eta$. Mais, si A est un ensemble admissible avec $|A| \leq \ell$, on a :

$$\frac{1}{2}\,\|(z_1(k)+z_i(k))_{k\in A}\| \leq \frac{1}{2}\,(\|z_1\|_\varphi + \|(z_i(k))_{k\in A}\|_\varphi)$$

$$\leq \frac{1}{2}\,(1+1-5\eta) \quad .$$

Mais ceci contredit (2) et le lemme 1.

z'_i étant le sous-bloc donné par le lemme 2, posons $z''_i = z_i - z'_i$. Nous allons maintenant voir que les (z''_i) donnent (P_1).

Lemme 3 : Lorsque $k \to +\infty$, $\sup\{\frac{1}{k}\|\sum_1^k z'_{n_i}\|_{S_\varphi} \,;\, n_1 < \ldots < n_k\} \to 0$.

Démonstration du lemme 3 : Il suffit de montrer que

$$\sup\{\frac{1}{k}\|\sum_1^k z'_{n_i}\|_\varphi \,;\, n_1 < \ldots < n_k\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad .$$

Mais, pour chaque i, on peut écrire $z_i = \sum_{j=1}^{\ell} x_i^j$, où $x_i^j(k)$ est non nul pour un k au plus, et $|x_i^j| \leq 1$; donc

$$\forall\, j \quad , \qquad \|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k x_{n_i}^j\|_\varphi \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad ;$$

le lemme en résulte.

Pour $k \geq 0$, on a, de ce fait :

$$\frac{1}{k}\,\|\sum_1^k z'_{n_i}\|_{S_\varphi} < \eta \qquad \forall\, n_1 < \ldots < n_k \quad ,$$

et donc,

(3)
$$\frac{1}{k}\left\|\sum_1^k z''_{n_i}\right\|_{S_\varphi} \geq 1 - 3\eta \quad .$$

Puisque les (z''_i) sont des sous-blocs des (z_i), on a aussi $\|z''_i\|_{S_\varphi} \leq 1$, $\forall$ i.

Considérons maintenant les termes de la forme suivante :

$$\frac{1}{2k_o}\|z''_1 + \dots + z''_{k_o} + z''_{n_1} + \dots + z''_{n_{k_o}}\|_{S_\varphi} \quad ; \quad k_o < n_1 < \dots < n_{k_o} \quad .$$

Des estimations (3) résulte, exactement comme au lemme 1, que :

$$\frac{1}{2k_o}\|z''_1 + \dots + z''_{k_o} + z''_{n_1} + \dots + z''_{n_{k_o}}\|_{S_\varphi} =$$

$$\sup\left\{\frac{1}{2k}\|(z''_1(k) + \dots + z''_{k_o}(k) + z''_{n_1}(k) + \dots + z''_{n_{k_o}}(k))_{k\in A}\|_\varphi \quad ; \quad A\in\mathcal{N},\ |A| \leq \ell'\right\} \quad ,$$

où ℓ' est l'indice du dernier terme non nul dans z''_{k_o}.

<u>Lemme 4</u> : Il existe un i_o tel que, $\forall$ $i > i_o$, tout bloc z''_i contient un sous-bloc z'''_i avec :

- $z'''_i(k) \neq 0$ pour au plus ℓ' entiers k,
- $\|z'''_i(k)\|_\varphi \geq 1 - 7\eta$.

<u>Démonstration du lemme</u> : Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver une sous-suite $(z''_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout sous-bloc z'''_{n_i} de z''_{n_i}, de longueur ℓ', on ait $\|z'''_{n_i}\|_\varphi < 1 - 7\eta$. Mais alors, $\forall$ $A\in\mathcal{N}$, avec $|A| \leq \ell'$,

$$\frac{1}{2k_o}\|(z''_1(k) + \dots + z''_{k_o}(k) + z''_{n_1}(k) + \dots + z''_{n_{k_o}}(k)\|_{S_\varphi}$$

$$\leq \frac{1}{2k_o}\left(\|z''_1\|_{S_\varphi} + \dots + \|z''_{k_o}\|_{S_\varphi} + \|(z''_{n_1}(k))_{k\in A}\|_\varphi + \dots + \|(z''_{n_{k_o}}(k))_{k\in A}\|_\varphi\right)$$

$$\leq \frac{1}{2k_o}\left(k_o + (1 - 7\eta)k_o\right) \quad ,$$

ce qui contredit (3) et prouve le lemme.

Il en résulte que, pour i assez grand, z_i contient deux sous-blocs : z''_i et z'''_i, tous deux avec des normes $\mathscr{N}_\varphi$ au moins égale à 1 - 7η. Mais ils ont des longueurs bornées (ℓ pour z'_i, ℓ' pour z'''_i), et, de ce fait, on peut pour i assez grand, trouver un ensemble admissible A qui couvre z_i' et z_i''' en même temps. Pour un tel i, on a :

$$\|z_i' + z_i'''\|_\varphi = \|z_i' + z_i'''\|_{S_\varphi} \leq \|z_i\|_{S_\varphi} \leq 1 \quad ,$$

et ceci contredit la propriété c) de l'espace ℓ^φ, puisque $1-7\eta > \delta_o$.

Remarques :

1) Il résulte évidemment de la proposition 2 que S_φ ne contient pas ℓ^1.

2) La discussion qui précède montre que, pour tout modèle étalé F de S_φ, la suite $u_n = e_{2n} - e_{2n-1}$ (qui est inconditionnelle, comme démontré dans [3]) est équivalente soit à la base canonique de ℓ^φ, soit à la base canonique de c_o. Si F est construit sur une bonne suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans S_φ, le premier cas se produit lorsque $\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_{n-1}\|_{c_o} > 0$, et le second lorsque $\lim \|x_n - x_{n-1}\|_{c_o} = 0$.

3) Dans la construction qui précède, nous avons choisi la fonction

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{t}{1 - \operatorname{Log} t} \qquad 0 < t \leq 1 \quad , \\ &= 2t - 1 \qquad\qquad t \geq 1 \quad . \end{aligned}$$

On peut voir facilement que le même résultat demeure, pour S_φ, si φ est une fonction d'Orlicz vérifiant la condition Δ_2 à l'origine, c'est-à-dire

$$\sup_{0<t<1} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty \quad .$$

En fait, il résulte de cette condition (voir [6], Ière partie, § 4), qu'il existe q et C tels que

$$\delta^q \varphi(x) \leq C\, \varphi(\delta x) \qquad \forall\, \delta, x \in [0,2] \quad .$$

On en déduit qu'il existe un nombre δ_o $(0 < \delta_o < 1)$ et un entier N tels que si $(a_1(k))_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_N(k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont des suites finies à supports disjoints, avec, pour $j = 1,\ldots,N$: $|a_j(k)| \leq 1$, $\forall$ k et $\|a_j\|_\varphi \geq \delta_o$, alors $\|\sum_{j=1}^{N} a_j\|_\varphi > 1$.

Avec cette propriété, on fait une démonstration analogue ; la différence est qu'il faut répéter l'argument N fois, afin de construire N sous-blocs disjoints, de longueurs bornées, dans tout bloc z_{n_i} d'une suite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Beauzamy, Banach-Saks properties and spreading models, à paraître à Mathematica Scandinavica.

[2] B. Beauzamy et B. Maurey, Iteration of spreading models, à paraître à Arkiv für Math.

[3] A. Brunel et L. Sucheston, On B-convex Banach spaces, Math. System theory, vol. 7 (1974) 294-299.

[4] A. Brunel et L. Sucheston, On $\mathcal{J}$-convexity and ergodic super properties of Banach spaces, Trans. A.M.S. 204 (1975) 79-90.

[5] J.T. Lapresté, Basic sequences invariant under spreading in Banach spaces, preprint.

[6] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, Classical Banach spaces, Lecture Notes No 338, Springer Verlag.

[7] J. Schreier, Ein Gegensbiespel Zur Theorie des schwachen Konvergenz, Studia Math. 2 (1930) 58-62.
