J. Bourgain

Un espace $\mathfrak{L}^\infty$ jouissant de la propriété de Schur et de la propriété de Radon-Nikodym

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 4, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

UN ESPACE $\mathcal{L}^{\infty}$ JOUISSANT DE LA PROPRIETE DE SCHUR ET DE LA PROPRIETE DE RADON-NIKODYM

J. BOURGAIN

(Université de Bruxelles)

Exposé No IV

13 Octobre 1978

§ 1. PRELIMINAIRES SUR LES ESPACES $\mathcal{L}^{\infty}$.

Rappelons tout d'abord que si E et F sont deux espaces normés de même dimension finie, la distance d(E,F) de Banach-Mazur sera donnée par

$$d(E,F) = \inf\{\|u\| \, \|u^{-1}\| \; ; \; u : E \to F\} \quad .$$

Pour $n = 1,2,\ldots$ et $1 \le p \le \infty$, l'espace ℓ^p_n sera l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|x\|_p = [\,|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p]^{1/p}$.

<u>Définition 1</u> : Supposons $1 \le p \le \infty$ et $\lambda \ge 1$. On dit que l'espace X est un espace $\mathcal{L}^p_\lambda$ si pour tout sous-espace E de X de dimension finie, il existe un sous-espace F de X de dimension finie, tel que $E \subset F$ et $d(\ell^p_n, F) \le \lambda$ où $n = \dim F$. Si X est un $\mathcal{L}^p_{\lambda'}$ pour tout $\lambda' > \lambda$, on dit que X est $\mathcal{L}^p_{\lambda+}$. Un espace $\mathcal{L}^p$ est un $\mathcal{L}^p_\lambda$ pour un certain $\lambda \ge 1$.

La théorie des espaces $\mathcal{L}^p$ a été développée principalement par Lindenstrauss, Pełczyński et Rosenthal. Mentionnons quelques propriétés fondamentales.

<u>Proposition 1</u> : X est $\mathcal{L}^p$ ssi son dual X^* est $\mathcal{L}^q$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$.

<u>Proposition 2</u> : 1. Tout espace du type C(K) est un espace $\mathcal{L}^{\infty}$.

2. X est $\mathcal{L}^{\infty}$ ssi son bidual X^{**} est un sous-espace complémenté d'un espace C(K).

3. Un sous-espace complémenté d'un espace $\mathcal{L}^{\infty}$ est un espace $\mathcal{L}^{\infty}$.

4. Si X est $\mathcal{L}^{\infty}$, alors X^* est faiblement séquentiellement complet (une suite de Cauchy dans X^*, $\sigma(X^*, X^{**})$ est faiblement convergente).

5. Tous les duals d'un espace $\mathcal{L}^{\infty}$ ont la propriété de Dunford-Pettis.

<u>Définition 2</u> : Soit X un espace de Banach. On dit que X a la propriété d'extension compacte (resp. faiblement compacte) si la propriété

suivante est vérifiée :
Soit Y et Z des espaces de Banach tel que $Y \subset Z$ et soit $T : Y \to X$ un opérateur compact (resp. faiblement compact). Alors T admet une extension compacte (resp. faiblement compacte) $\tilde{T} : Z \to X$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i"'] & X \\ Z \arrow[ur, dashed, "\tilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Les espaces $\mathcal{L}^{\infty}$ se caractérisent également de la manière suivante :

<u>Proposition 3</u> : X est $\mathcal{L}^{\infty}$ ssi X a la propriété d'extension compacte.

Passons maintenant à la propriété d'extension pour les opérateurs faiblement compacts. On usera du résultat suivant dû à Davis, Figiel, Johnson et Pełczynski.

<u>Proposition 4</u> : Soit A une partie faiblement compacte d'un espace X. Il existe alors un espace réflexif Y et un opérateur $T : Y \to X$ tel que A soit contenu dans $\{Ty \; ; \; y \in Y \text{ et } \|y\| \leq 1\}$.

L'espace X a la propriété de Schur si les parties faiblement compactes de X sont compactes pour la norme.

<u>Proposition 5</u> : Soit X un Banach. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. X a la propriété d'extension faiblement compacte.
2. X est $\mathcal{L}^{\infty}$ et a la propriété de Schur.

<u>Démonstration</u> : (2) $\Rightarrow$ (1) trivialement, puisque un opérateur dans X est compact ssi il est faiblement compact.

(1) $\Rightarrow$ (2), il suffit de démontrer que X a la propriété de Schur (ensuite on applique la prop. 3). Soit donc A une partie faiblement compacte de X et considérons $T : Y \to X$ comme dans la prop. 4. L'espace Y est contenu dans un espace $C(K)$ et puisque T est faiblement compact, le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "T"] \arrow[d, hook] & X \\ C(K) \arrow[ur, dashed, "\tilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

factorise par un faiblement compact $\tilde{T} : C(K) \to X$.
On emploie maintenant la propriété de Dunford-Pettis des espaces $C(K)$. Puisque $\{y \in Y \,;\, \|y\| \leq 1\}$ est faiblement compact dans $C(K)$, on en déduit que $A \subset \{\tilde{T}y \,;\, y \in Y \,;\, \|y\| \leq 1\}$ est relativement compact pour la norme, ce qui achève la démonstration.

M. Zippin a démontré que si X est un espace $\mathcal{L}^\infty_{1+}$, $\dim X = \infty$, X a un sous-espace c_0 complémenté. De là la conjecture suivante : Tout espace $\mathcal{L}^\infty$ X, $\dim X = \infty$, contient c_0 isomorphiquement. En somme, on ne connaissait pas d'espaces $\mathcal{L}^\infty$ non isomorphes à un $\mathcal{L}^\infty_{1+}$.

La conjecture la plus forte est certainement le fait que seulement les espaces de dimension finie ont la propriété d'extension faiblement compacte. Puisque notre espace $\mathcal{L}^\infty$ a la propriété de Schur, elle est fausse.

§ 2. PRELIMINAIRES SUR LA PROPRIETE DE RADON-NIKODYM.

Définition 3 : Un espace de Banach X a la propriété de Radon-Nikodym si la condition suivante est satisfaite : soit (Ω, Σ, μ) un espace probabilisé et $F : \Sigma \to X$ une mesure à variation bornée et μ-régulière. Il existe alors $\xi \in L^1_X(\Omega, \Sigma, \mu)$ tel que $F(A) = \int_A \xi \, d\mu$ pour tout $A \in \Sigma$.
(F a une dérivée).

Proposition 6 : X est Radon-Nikodym ssi toute martingale uniformément bornée à valeurs dans X converge presque partout.

On peut démontrer que si chaque sous-espace séparable de X est sous-espace d'un dual séparable, alors X a la propriété de Radon-Nikodym.

En fait, J.J. Uhl conjectura l'équivalence des deux propriétés. La construction d'espace $\mathcal{L}^\infty$ jouissant de la propriété de Radon-

Nikodym nous fournit les premiers contre-exemples. Ceci est une conséquence du lemme suivant.

Proposition 7 : Soit X $\mathcal{L}^{\infty}$, $\dim X = \infty$ et Y un Banach tel que $X \subset Y^{*}$. Alors Y contient un sous-espace ℓ^{1}.

Démonstration : Soit $i : X \to Y^{*}$ l'injection et $T : Y \to X^{*}$ la restriction de i^{*} à $Y \subset Y^{**}$. On distingue les deux possibilités suivantes :

1. T est faiblement compacte. Dans ce cas $T^{*} : X^{**} \to Y^{*}$ l'est également et donc $T^{*}|X = i$. Mais ceci veut dire que X est réflexif, ce qui est impossible puisque X est Dunford-Pettis et $\dim X = \infty$.

2. T n'est pas faiblement compact. Usons du fait que X^{*} est faiblement séquentiellement complet pour conclure que T fixe une copie de ℓ^{1} (en vertu du théorème de Rosenthal).

§ 3. UN ESPACE $\mathcal{L}^{\infty}$ ETRANGE.

La construction est directe dans ce sens que l'on n'utilise aucun résultat préalable. Elle ne fait également pas intervenir des techniques probabilistes. Nous nous bornons ici à l'énoncé du lemme principal. Fixons $\lambda > 1$ et $\delta > 0$ tel que $1 + 2\delta\lambda \le \lambda$.

Proposition 8 : Il existe une suite d'entiers strictement croissante $(d_n)_n$, une suite croissante $(X_n)_n$ de sous-espaces de ℓ^{∞} et des opérateurs $j_n : E_n = \ell^{\infty}_{d_n} \to X_n$, tel que

1. $\|j_n\| \le \lambda$.
2. j_n est un isomorphisme et $\pi_n j_n$ est l'identité sur E_n ($\pi_n : \ell^{\infty} \to \ell^{\infty}_{d_n}$ est la restriction aux d_n premières coordonnées).
3. $\|x\| = \max(\|\pi_m x\| + \delta\|x - j_m \pi_m x\| \ ; \ m \le n)$, si $x \in X_n$.

Posons maintenant $X = \overline{\bigcup_n X_n}$. Il est clair que $d(X_n, E_n) \le \|j_n\| \, \|\pi_n\| \le \lambda$. On en déduit que X est un espace $\mathcal{L}^{\infty}_{\lambda+}$. On déduit aisément de (3) que

$$(*) \qquad \|x\| \ge \|\pi_n x\| + \delta\|x - j_n \pi_n x\|$$

et en particulier

$$(**)\qquad \|x\| \geq \|\pi_n x\| + \delta\, \mathrm{dist}(x, X_n)$$

pour tout $x \in X$ et tout entier $n > 0$.

C'est à-partir des inégalités fondamentales (*) et (**) que les propriétés de Schur et de Radon-Nikodym s'obtiendront.

<u>Proposition 9</u> : X est Schur.

<u>Démonstration</u> : Il est suffisant de montrer que pour toute suite $(x_r)_r$ dans X tel que $\|x_r\| = 1$ et $\lim_{r\to\infty} x_r = 0 \quad \sigma(\ell^\infty, \ell^1)$, il existe une sous-suite équivalente à la base de ℓ^1. Soit $(\rho_s)_s$, $\frac{1}{2} < \rho_s < 1$, une suite strictement décroissante.

Il est aisé de construire une sous-suite $(y_s)_s$ de $(x_r)_r$ ainsi qu'une suite croissante $(m_s)_s$ d'entiers, satisfaisant les conditions suivantes :

1. $y_1, \ldots, y_s \in X_{m_s}$.

2. $\|\pi_{m_s}(y)\| \geq \frac{\rho_{s+1}}{\rho_s} \|y\|$ si $y \in \mathrm{span}(y_1, \ldots, y_s)$.

3. $\|\pi_{m_s}(y_{s+1})\| < \frac{\delta}{4\lambda}$.

Nous démontrons par récurrence sur s la propriété suivante

$$\left\| \sum_{t=1}^{s} a_t y_t \right\| \geq \frac{\delta}{2} \rho_s \sum_{t=1}^{s} |a_t|$$

pour tout s-uple $a_1, \ldots, a_s$ de réels. Ceci achèvera la démonstration.
Le cas $s = 1$ est évident.
En vertu de (*), on a

$$\left\| \sum_{t=1}^{s+1} a_t y_t \right\| \geq \left\| \pi_{m_s}\left(\sum_{t=1}^{s+1} a_t y_t \right) \right\| + \delta \left\| \sum_{t=1}^{s+1} a_t y_t - j_{m_s} \pi_{m_s}\left(\sum_{t=1}^{s+1} a_t y_t \right) \right\| =$$

$$\left\| \pi_{m_s}\left(\sum_{t=1}^{s} a_t y_t \right) + a_{s+1} \pi_{m_s}(y_{s+1}) \right\| + \delta \left\| y_{s+1} - j_{m_s} \pi_{m_s}(y_{s+1}) \right\| |a_{s+1}| \geq$$

$$\left\| \pi_{m_s}\left(\sum_{t=1}^{s} a_t y_t \right) \right\| + \delta |a_{s+1}| - (1 + \delta\lambda) \left\| \pi_{m_s}(y_{s+1}) \right\| |a_{s+1}| \geq$$

$$\frac{\rho_{s+1}}{\rho_s} \left\| \sum_{t=1}^{s} a_t y_t \right\| + \left(\delta - 2\lambda \frac{\delta}{4\lambda}\right) |a_{s+1}| \geq$$

$$\frac{\delta}{2} \rho_{s+1} \sum_{t=1}^{s} |a_t| + \frac{\delta}{2} |a_{s+1}| \geq \frac{\delta}{2} \rho_{s+1} \sum_{t=1}^{s+1} |a_t| \quad .$$

Proposition 10 : X a la propriété de Radon-Nikodym.

Démonstration : Soit (Ω,Σ,μ) un espace probabilisé et $(\xi_n,\Sigma_n)_n$ une martingale uniformément bornée à valeurs dans X. Donc nous démontrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int \mathrm{dist}(\xi_n(t),X_m)\mu(dt) \leq \varepsilon$$

pour tout n.
La convergence de $(\xi_n)_n$ s'obtient alors facilement en utilisant les critères bien connus sur la convergence des martingales vectorielles.
Puisque $(\xi_n)_n$ est une martingale, $(\|\xi_n\|_1)_n$ est une suite croissante et il existe donc n_o tel que $\|\xi_{n_o}\|_1 \geq \sup_n \|\xi_n\|_1 - \frac{\varepsilon\delta}{2}$. On déduit du lemme de Beppo-Lévy que $\|\xi_{n_o}\|_1 = \lim_{m\to\infty} \|\pi_m \circ \xi_{n_o}\|_1$. Choisissons m tel que $\int \mathrm{dist}(\xi_n(t),X_m)\mu(dt) \leq \varepsilon$ pour $n = 1,\ldots,n_o$ et en plus $\|\xi_{n_o}\|_1 \leq \|\pi_m \circ \xi_{n_o}\|_1 + \frac{\varepsilon\delta}{2}$. Fixons $n > n_o$. Pour tout $t \in \Omega$ on obtient en vertu de (**)

$$\|\xi_n(t)\| \geq \|\pi_m \circ \xi_n(t)\| + \delta\ \mathrm{dist}(\xi_n(t),X_m)$$

L'intégration donne

$$\|\xi_n\|_1 \geq \|\pi_m \circ \xi_n\|_1 + \delta \int \mathrm{dist}(\xi_n(t),X_m)\mu(dt) \quad .$$

Puisque $(\pi_m \circ \xi_i)_i$ est une martingale (à valeurs dans E_m), on a également $\|\pi_m \circ \xi_n\|_1 \geq \|\pi_m \circ \xi_{n_o}\|_1$. Donc

$$\delta \int \mathrm{dist}(\xi_n(t),X_m)\mu(dt) \leq \|\xi_n\|_1 - \|\pi_m \circ \xi_{n_o}\|_1 \leq$$

$$\|\xi_n\|_1 - \|\xi_{n_o}\|_1 + \frac{\varepsilon\delta}{2} \leq \varepsilon\delta \quad ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque : Une construction très voisine premet de démontrer l'existence d'un Banach X qui a les propriétés suivantes :

1. X^* est isomorphe à ℓ^1.
2. X a la propriété de Radon-Nikodym.

3. Tout espace $Y \subset X$, dim $Y = \infty$ contient un sous-espace réflexif Z de dimension infinie.

Ceci résout négativement une conjecture de Davis.
