

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

## Remarques sur un résultat non publié de B. Maurey

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1980-1981), exp. n° 5, p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1980-1981\\_\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1980-1981__A5_0)

© Séminaire analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz")  
(École Polytechnique), 1980-1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1980-1981

REMARQUES SUR UN RESULTAT NON PUBLIE DE B. MAUREY

G. PISIER



Soit  $E$  un espace de Banach de dimension finie. On note  $n(E)$  le plus petit entier  $n$  tel que  $E$  est 2-isomorphe<sup>♦</sup> à un sous-espace de  $\ell_n^\infty$ .

Le principal résultat de cet exposé est le théorème suivant, dû à Maurey, et non publié :

**Théorème 1** : Soit  $X$  un espace de Banach de dimension infinie. On a alors l'alternative suivante :

i) ou bien, pour tout  $n$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\ell_n^\infty$  est  $(1+\varepsilon)$ -isomorphe à un quotient de  $X$ . (Cela revient à dire que  $X$  contient des  $\ell_n^1$  uniformément, ou encore que  $X$  n'est pas B-convexe).

ii) Ou bien, il existe  $\delta > 0$  tel que tout quotient de dimension finie de  $X$ , noté  $E$ , vérifie

$$n(E) \geq 2^\delta \dim E .$$

Pour mieux comprendre la signification de ce résultat, faisons d'abord quelques rappels et introduisons des notations :

Soit  $X$  un espace de Banach. On notera  $B_X$  sa boule unité. Soit  $K \subset X$  une partie relativement compacte de  $X$ . On notera  $N(K, \varepsilon)$  le plus petit nombre de boules de rayon  $\varepsilon$  dans  $X$  dont la réunion recouvre  $K$ .

Rappelons un résultat bien connu : pour tout espace  $E$  de dimension  $n$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$(1) \quad \frac{1}{\varepsilon^n} \leq N(B_E, \varepsilon) \leq \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^n .$$

(Ce résultat se démontre aisément par des considérations de volume  $n$ -dimensionnel.)

Il en résulte immédiatement que l'on a, pour  $E$  arbitraire :

$$(2) \quad n(E) \leq 5^n .$$

En effet, d'après (1), on peut recouvrir  $B_E$ , par au plus  $5^n$  boules de rayon  $1/2$  dans  $E$ . Soit  $\{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq 5^n\}$  l'ensemble des centres

---

♦ 2 ne joue aucun rôle particulier. On pourrait prendre  $(1+\varepsilon)$  à la place, avec  $\varepsilon > 0$ , et étudier la dépendance en  $\varepsilon$ . Nous ne le ferons pas.

de ces boules. Soit maintenant  $x \in E$ , soit  $\xi \in B_E$ , tel que  $\langle \xi, x \rangle = \|x\|$ , et soit  $\xi_i$  tel que  $\|\xi - \xi_i\| < \frac{1}{2}$ . On a :

$$\begin{aligned} \|x\| &= \langle \xi, x \rangle = \langle \xi_i, x \rangle + \langle \xi - \xi_i, x \rangle \\ &\leq \sup_i |\langle \xi_i, x \rangle| + \frac{1}{2} \|x\|, \end{aligned}$$

d'où  $\sup_i |\langle \xi_i, x \rangle| \leq \|x\| \leq 2 \sup_i |\langle \xi_i, x \rangle|$ ,

ce qui établit (2).

Le théorème 1 montre que l'estimation (2) donne, le plus souvent, le meilleur ordre de grandeur de  $n(E)$ .

Si l'on pose  $\lambda_n^X = \inf\{n(E), E \text{ quotient de } X, \dim E = n\}$ , le théorème 1 dit que seuls les cas extrêmes se produisent. Ou bien  $\lambda_n = n \forall n \in \mathbb{N}$ , ou bien

$$\inf_n \frac{\text{Log } \lambda_n}{n} > 0.$$

Donc,  $\lambda_n$  est ou bien le plus petit possible, ou bien le plus grand possible asymptotiquement. On a donc là une dichotomie tout-à-fait remarquable.

Pour la démonstration, nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 2 (Maurey)** : Soit  $E$  un espace de type  $p$ , soit  $m$  un entier et  $u: \ell_m^1 \rightarrow E$  un opérateur. Notons  $K$  l'image de la boule unité de  $\ell_m^1$ . On a alors pour tout entier  $k$  :

$$N(K, 2k^{-1/p'} T_p(E) \|u\|) \leq (2m)^k, \quad \text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

où l'on a noté  $T_p(E)$  la constante de type  $p$  de  $E$  (cf. exposé II).

**Démonstration** : On sait (cf. [11], exposé No VII) que si  $E$  est de type  $p$ , on a, pour toute suite  $Z_1, \dots, Z_k, \dots$  de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $E$  :

$$(3) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^k Z_i - \mathbb{E} Z_i \right\| \leq 2 T_p(E) \left( \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \|Z_i\|^p \right)^{1/p}.$$

Notons  $(e_j)$  les vecteurs de base de  $\ell_m^1$  et posons  $x_j = u(e_j)$ .

Soit  $A$  l'ensemble  $\{\pm x_j, 1 \leq j \leq m\}$ .

On a  $\text{card}(A) \leq 2m$ , et il est clair que

$$(4) \quad K = \text{conv}(A) \quad .$$

Soit  $x \in K$ . D'après (4), il existe une variable aléatoire  $Z$  à valeurs dans  $A$  telle que  $\mathbb{E} Z = x$ . Soient  $Z_1, Z_2, \dots$  une suite de copies indépendantes de  $Z$ . On a d'après (3) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^k Z_i - kx \right\| \leq 2 T_p(E) k^{1/p} (\mathbb{E} \|Z\|^p)^{1/p} \\ \leq 2 \|u\| T_p(E) k^{1/p} \quad .$$

Il existe donc au moins  $(z_1, \dots, z_k) \in A^k$  tel que :

$$(5) \quad \left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i - x \right\| \leq 2 T_p(E) k^{-1/p'} \|u\| \quad .$$

Posons  $\delta_k = 2 \|u\| T_p(E) k^{-1/p'}$ . Soit  $S_k$  l'ensemble des points de la forme  $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i$  avec  $(z_i) \in A^k$ . On a trivialement  $\text{card}(S_k) \leq \text{card}(A^k) \leq (2m)^k$ , et d'après (5), la réunion des boules de rayon  $\delta_k$  centrées en  $S_k$  recouvrent  $K$ .

Par conséquent :  $N(K, \delta_k) \leq \text{card}(S_k) \leq (2m)^k$ , ce qui est le résultat annoncé.

Remarque : On peut reformuler le résultat précédent d'une manière un peu plus générale dans le langage des nombres d'entropie (cf. [6]) : Soit  $u : X \rightarrow Y$  un opérateur compact entre espaces de Banach, on pose  $e_n(u) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid N(u(B_X), \varepsilon) \leq 2^n\}$ . La démonstration précédente (à peine modifiée) donne alors : pour tout opérateur  $u : \ell_m^1 \rightarrow E$  on a :

$$\forall n \geq k \log_2(2m) \quad e_n(u) \leq 2 T_p(u) k^{-1/p'} \quad ,$$

d'où l'on tire immédiatement :

$$\sup_{n \geq 1} n^{1/p'} e_n(u) \leq \alpha_p T_p(u) (\log m + 1)^{1/p'}$$

où  $\alpha_p$  est une constante ne dépendant que de  $p$ .

Le lemme 2 a pour conséquence immédiate :

Théorème 3 (Maurey) : Soit  $E$  un espace de Banach de dimension  $n$ .

On a :

$$(6) \quad \text{Log}(n(E) + 1) \geq \delta_p (T_p(E'))^{-p'} n$$

où  $\delta_p > 0$  est une constante ne dépendant que de  $p$ .

Démonstration : Posons  $m = n(E)$ . Il existe alors un plongement  $j : E \rightarrow \ell_m^\infty$  tel que  $\forall x \in E, \|x\| \leq \|j(x)\| \leq 2 \|x\|$ . En appliquant le lemme 2 à  $j' : \ell_m^1 \rightarrow E'$ , on trouve, (puisque  $j'(B_{\ell_m^1}) \supset B_{E'}$ , et  $\|j'\| \leq 2$ ) :

$$N(B_{E'}, 4k^{-1/p'} T_p(E')) \leq (2m)^k$$

d'où, d'après (1) :

$$(7) \quad (4k^{-1/p'} T_p(E'))^{-n} \leq (2m)^k .$$

Il est clair que l'on peut trouver un entier  $k_0$  assez grand pour que  $4k_0^{-1/p'} T_p(E') < 1/2$  mais, néanmoins tel que  $k_0 \leq \alpha_p T_p(E')^{p'}$  où  $\alpha_p$  est une constante ne dépendant que de  $p$ . On déduit donc immédiatement de (7) :

$$2^n \leq (2m)^{k_0}$$

d'où 
$$\text{Log}_2 m \geq \frac{n}{k_0} - 1 ,$$

l'inégalité (6) en résulte immédiatement.

Nous pouvons maintenant compléter la

Démonstration du théorème 1 : Dire que (i) est en défaut revient à dire que  $X'$  ne contient pas de  $\ell_n^1$  uniformément ; il en résulte (cf. [11], exposé VII) que  $X'$  (et donc tout sous-espace de  $X'$ ) est de type  $p$  pour un  $p > 1$ . Soit alors  $E$  un quotient de  $X$  de dimension  $n$ . D'après le théorème 3, on a : (puisque  $T_p(E') \leq T_p(X')$ )

$$\text{Log}(n(E) + 1) \geq \delta_p (T_p(X'))^{-p'} n$$

on a donc bien (ii). cqfd.

La formulation du théorème 1 suggère naturellement la question suivante : Y-a-t-il un analogue du théorème 1 si l'on remplace les quotients de  $X$  par ses sous-espaces ?

La conjecture suivante nous semble plausible.

Conjecture 4 : Le théorème 1 reste valable si l'on remplace dans (i) et dans (ii) le mot "quotient" par "sous-espace".

Cette conjecture équivaut (d'après des résultats connus, cf. [5]) à la suivante :

Conjecture 5 : Soit  $q < \infty$ . Si un Banach  $X$  est de cotype  $q$  alors il existe une constante  $\delta > 0$  ne dépendant que de  $q$  et de la constante de cotype  $q$  de  $X$  telle que :

$$\forall E \subset X \quad n(E) \geq 2^{\delta \dim E} .$$

On peut remarquer que dans le cas particulier  $q = 2$ , la conjecture précédente est vraie, car d'après [2], on sait que si  $X$  est de cotype 2, il existe  $\eta > 0$  ne dépendant que de la constante de cotype 2 de  $X$  vérifiant la propriété suivante : pour tout  $E \subset X$ , il existe  $F \subset E$  tel que  $d(F, \ell_{\dim F}^2) \leq 2$  et  $\dim F \geq \eta \dim E$ . Or il est bien connu que si  $d(F, \ell_{\dim F}^2) \leq 2$ , alors on a nécessairement  $n(F) \geq 2^{\delta' \dim F}$  où  $\delta' > 0$  est une constante absolue (signalons d'ailleurs que cela découle de (6)). On a donc :

$$n(E) \geq n(F) \geq 2^{\delta' \eta \dim E} ,$$

ce qui est bien le résultat annoncé, mais seulement pour  $q = 2$ . Si l'on applique l'argument précédent au cas d'un espace de cotype  $q$ , on trouve seulement une estimation du type :

$$\text{Log } n(E) \geq \delta (\dim E)^{2/q} .$$

Mais, pour  $q > 2$ , il se trouve qu'on peut considérablement améliorer ce dernier résultat. En effet, on a :

Théorème 6 : Soit  $E$  de dimension  $n$  et  $q \geq 2$ . On a :

$$\text{Log}(n(E) + 1) \geq \alpha_q C_q(E)^{-q} \frac{n}{(\text{Log}(n+1))^q} ,$$



où  $\alpha_q > 0$  est une constante ne dépendant que de  $q$ .

Ce théorème résulte du théorème 3 et de la proposition suivante :

Proposition 7 [7] : Il existe une constante  $K$  telle que, pour tout espace de Banach  $E$  de dimension finie, on a :

(8) 
$$K(E) \leq K \text{ Log}(\dim E + 1) .$$

(Rappelons que  $K(E)$  est la "constante de  $K$ -convexité" de  $E$  définie à l'exposé II, définition 1.1.)

Nous pouvons en donner une démonstration relativement simple :

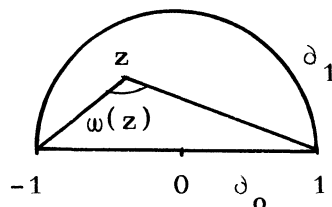
Démonstration : Nous reprenons les notations de l'exposé II, on pose  $D = \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ , on note  $\mu$  la probabilité uniforme sur  $D$  et  $(\varepsilon_n)$  les applications coordonnées sur  $\{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ . Pour toute partie finie  $A$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $w_A = \prod_{n \in A} \varepsilon_n$ . On note  $R_k$  la projection orthogonale sur le sous-espace de  $L^2(D, \mu)$  engendré par les fonctions  $\{w_A \mid |A| = k\}$ . Il nous suffit évidemment de démontrer la proposition 5 dans le cas d'un  $\mathbb{C}$ -espace de Banach  $E$ . Soit  $z$  complexe tel que  $|z| \leq 1$ . Posons

$$\tilde{T}(z) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} z^k R_k \right) \otimes \text{Id}_E .$$

On considère  $\tilde{T}(z)$  comme un opérateur sur l'espace  $L^2(D, \mu; E)$  (que l'on notera simplement  $L^2(E)$ ).

On sait que :  $\forall \varepsilon \in [-1, +1] \quad \|\tilde{T}(\varepsilon)\| \leq 1$ .

Considérons le demi-disque  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq 0, |z| \leq 1\}$ .



Le bord de  $\Delta$  est composé de  $\partial_0 = [-1, +1]$

et  $\partial_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \text{Im } z \geq 0\}$ .

Soit  $P_z$  le noyau de Poisson du domaine  $\Delta$ . Puisque  $z \rightarrow \tilde{T}(z)$  est holomorphe sur  $\overset{\circ}{\Delta}$ , on peut écrire (formule de Poisson-Jensen) :

$$\forall z \in \mathring{\Delta} \quad \text{Log } \|\tilde{T}(z)\| \leq \int \text{Log } \|\tilde{T}(u)\| P_z(du)$$

d'où :

$$(9) \quad \|\tilde{T}(z)\| \leq \left( \sup_{\varepsilon \in \partial_0} \|\tilde{T}(\varepsilon)\| \right)^{P_z(\partial_0)} \left( \sup_{u \in \partial_1} \|\tilde{T}(u)\| \right)^{P_z(\partial_1)} .$$

Soit  $n$  la dimension de  $E$ . D'après un résultat bien connu de F. John, on sait que :

$$d(E, \ell_n^2) \leq \sqrt{n} \quad (\text{cf. e.g. [13] exposé X}),$$

donc

$$\sup_{u \in \partial_1} \|\tilde{T}(u)\| \leq \sqrt{n} .$$

Posons  $\theta(z) = P_z(\partial_1)$ . On déduit donc de (9) :

$$(10) \quad \|\tilde{T}(z)\| \leq n^{\theta(z)/2} .$$

Il nous reste à évaluer  $\theta(z)$ . Pour cela, notons  $\omega(z)$  l'angle sous lequel est vu le segment  $[-1, +1]$  à partir du point  $z$ . Il est bien connu que  $\omega(z)$  (et donc aussi  $\pi - \omega(z)$ ) est une fonction harmonique dans  $\mathring{\Delta}$  (cf. e.g. [14], p. 74), on a donc :

$$\pi - \omega(z) = \int (\pi - \omega(u)) P_z(du) = \frac{\pi}{2} \theta(z)$$

d'où

$$\theta(z) = \frac{2}{\pi} (\pi - \omega(z)) .$$

Notons que quand  $|z| \rightarrow 0$ ,  $|\theta(z)| \sim |z|$  ; on en déduit donc de (10) :

$$(11) \quad \forall z \in \Delta \quad \|\tilde{T}(z)\| \leq n^{\alpha|z|/2}$$

où  $\alpha > 0$  est une constante numérique.

Comme  $\|\tilde{T}(z)\| = \|\tilde{T}(-z)\|$ , (11) reste valable sur tout le disque unité.

Posons  $\beta_n = (\text{Log}(n+1))^{-1}$ . On a :

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ avec } |z| = \beta_n \quad \|\tilde{T}(z)\| \leq e^{\alpha/2} .$$

D'autre part :

$$(12) \quad \beta_n (R_1 \otimes \text{Id}_E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-it} \tilde{T}(\beta_n e^{it}) dt ,$$

d'où :

$$\|R_1 \otimes \text{Id}_E\| \beta_n \leq e^{\alpha/2} ,$$

soit finalement :  $K(E) \leq e^{\alpha/2} (\text{Log}(n+1))$  , cqfd.

Remarque : Signalons que la preuve précédente montre plus précisément que  $K(E) \leq (\text{constante}) \text{Log}(d(E, \ell_n^2) + 1)$ .

Démonstration du théorème 6 : Rappelons (voir l'exposé II) que

$$(13) \quad T_p(E') \leq K(E) C_q(E) \quad \text{si} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Le théorème 6 est alors une combinaison de (6), (13) et (8).

Remarque : Rappelons que nous conjecturons que, dans la situation de la proposition 5, on a en fait  $K(E) \leq K' (\text{Log}(\dim E + 1))^{1/2}$  avec  $K'$  indépendant de  $E$ . Dans le cas particulier des espaces à base inconditionnelle on peut effectivement vérifier cette conjecture :

Proposition 8 : Soit  $E$  un espace à base inconditionnelle, de constante 1, de dimension  $n$ . On a

$$K(E) \leq K_1 (\text{Log } n + 1)^{1/2}$$

où  $K_1$  est une constante numérique.

Démonstration : Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base 1-inconditionnelle de  $E$ .

Là encore, on part de :  $d(E, \ell_n^2) \leq \sqrt{n}$  et on se place dans le cas complexe. On voit facilement que l'on peut trouver un "bon" isomorphisme avec  $\ell_n^2$  qui respecte la structure d'ordre : on montre aisément, en effet, qu'il existe des scalaires  $\alpha_i > 0$  tel

$$\forall (x_i) \in \mathbb{C}^n \quad (\sum |x_i|^2 \alpha_i)^{1/2} \leq \left\| \sum x_i e_i \right\| \leq \sqrt{n} (\sum |x_i|^2 \alpha_i)^{1/2} .$$

Posons  $\left\| \sum x_i e_i \right\|_{E_1} = (\sum \alpha_i |x_i|^2)^{1/2}$  et soit  $E_\theta$  l'espace obtenu par interpolation complexe entre  $E$  et  $E_1$ ,  $E_\theta = [E, E_1]_\theta$  (voir e.g. [13], exposé XVII). Notons simplement  $\| \cdot \|_\theta$  la norme de  $E_\theta$ . On a évidemment  $\forall x \in E$

$$(14) \quad \|x\|_\theta \leq \|x\|_E \leq \sqrt{n}^\theta \|x\|_\theta .$$

D'autre part, soient  $p, q$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et  $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}$ . On voit facilement par interpolation que :

$\forall x, y \in E$

$$(15) \quad (\|x\|_{\theta}^q + \|y\|_{\theta}^q)^{1/q} \leq \left\| \sum_1^n (|x_i|^q + |y_i|^q)^{1/q} e_i \right\|_{\theta}$$

et

$$(16) \quad \left\| \sum_1^n (|x_i|^p + |y_i|^p)^{1/p} e_i \right\|_{\theta} \leq (\|x\|_{\theta}^p + \|y\|_{\theta}^p)^{1/p} .$$

Rappelons alors l'inégalité de W. Beckner qui est à la base de l'article [1] :

$\forall x, y \in \mathbb{C}$

$$(17) \quad \left( \frac{|x + i\sqrt{p-1}y|^q + |x - i\sqrt{p-1}y|^q}{2} \right)^{1/q} \leq \left( \frac{|x+y|^p + |x-y|^p}{2} \right)^{1/p} .$$

On déduit facilement de (15), (16) et (17) que l'on a :

$\forall x, y \in E$

$$\left( \frac{\|x + i\sqrt{p-1}y\|_{\theta}^q + \|x - i\sqrt{p-1}y\|_{\theta}^q}{2} \right)^{1/q} \leq \left( \frac{\|x+y\|_{\theta}^p + \|x-y\|_{\theta}^p}{2} \right)^{1/p} .$$

et, a fortiori, on a pour  $z = \pm i\sqrt{p-1}$  :

$$(18) \quad \left( \frac{\|x + zy\|_{\theta}^2 + \|x - zy\|_{\theta}^2}{2} \right)^{1/2} \leq \left( \frac{\|x+y\|_{\theta}^2 + \|x-y\|_{\theta}^2}{2} \right)^{1/2} .$$

Soit  $\mathcal{B}$  l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant (18) pour tous  $x, y$  dans  $E$ .  $\mathcal{B}$  est évidemment convexe et on a trivialement  $\mathcal{B} \supset [-1, +1]$ , donc

$$(19) \quad \mathcal{B} \supset \text{conv}\{[-1, +1], \pm i\sqrt{p-1}\} .$$

Posons  $\beta(p) = \sin \text{Arc tg } \sqrt{p-1}$ .

Notons que  $\beta(p) \sim \sqrt{p-1}$  quand  $p \rightarrow 1$ .

On vérifie élémentairement que (19) entraîne :

$$\mathcal{B} \supset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \beta(p)\} .$$

On voit alors facilement que si  $z \in \mathcal{B}$ , on a :

$$\|\tilde{T}(z)\|_{L^2(E_{\theta}) \rightarrow L^2(E_{\theta})} \leq 1 .$$

D'où, d'après la formule (12) :

$$\|R_1 \otimes \text{Id}_{E_\theta}\|_{L^2(E_\theta) \rightarrow L^2(E_\theta)} \leq \frac{1}{\beta(p)},$$

soit finalement d'après (14)

$$\|R_1 \otimes \text{Id}_E\|_{L^2(E) \rightarrow L^2(E)} \leq n^{\theta/2} \beta(p)^{-1},$$

soit (puisque  $\beta(p) \sim \sqrt{p-1} \sim \frac{1}{\sqrt{q}}$  quand  $\theta \rightarrow 0$ ) :

$$\leq A n^{\theta/2} \sqrt{q} = A n^{\theta/2} \sqrt{\frac{2}{\theta}},$$

où  $A$  est une constante numérique.

On a donc, pour  $\theta = \frac{1}{\text{Log}(n+1)}$  :

$$\|R_1 \otimes \text{Id}_E\|_{L^2(E) \rightarrow L^2(E)} \leq A \sqrt{2} (\text{Log}(n+1))^{1/2} \sqrt{e}. \quad \text{cqfd.}$$

Remarque : La signification géométrique du théorème 1 est la suivante : Soit  $E$  un sous-espace de  $\ell_m^\infty$ . On va faire varier  $m$  et  $E$ . Si  $\dim E \sim \log m$ , on ne peut rien dire (en effet, d'après (2),  $E$  peut être à peu près n'importe quoi !).

Mais si, au contraire, la dimension de  $E$  est asymptotiquement plus grande que  $\text{Log } m$  (quand  $m \rightarrow \infty$ ), alors  $E$  contient un sous-espace 2-isomorphe à  $\ell_{k_m}^1$  où  $k_m \rightarrow \infty$  quand  $\frac{\dim E}{\text{Log } m} \rightarrow \infty$ .

La conjecture 5 revient à dire qu'en fait  $E$  contient alors un sous-espace 2-isomorphe à  $\ell_{k_m}^\infty$  avec  $k_m \rightarrow \infty$  quand  $\frac{\dim E}{\text{Log } m} \rightarrow \infty$ .

Le théorème 6 montre que cette dernière possibilité se produit effectivement, mais sous la condition plus restrictive :

$$\forall q < \infty \quad \frac{\dim E}{\text{Log } m (\text{Log } \text{Log } m)^q} \longrightarrow \infty.$$

Remarque : Soit  $G$  un groupe compact abélien et  $\Lambda$  une partie du groupe dual noté  $\Gamma$ . On note  $C_\Lambda(G)$  le sous-espace de  $C(G)$  formé des fonctions à spectre dans  $\Lambda$ . On sait (cf. [12] exposé XIV ou bien [3]) que si  $C_\Lambda$  est de cotype 2 alors  $\Lambda$  est un ensemble de Sidon, i.e.  $C_\Lambda \approx \ell^1$ .

Motivé par le théorème 6, je conjecture que si  $C_\Lambda$  est de cotype  $q$  pour un  $q < \infty$  alors  $\Lambda$  est un ensemble de Sidon. Il n'est pas difficile de voir que le théorème 6 donne des résultats dans cette direction ; par exemple, soit  $A \subset \Gamma$  un ensemble de Sidon infini, et soit  $\Lambda \subset A \times A \subset \Gamma \times \Gamma$  ; on peut montrer que si  $C_\Lambda(G \times G)$  est de cotype  $q$  pour un  $q < \infty$ , alors  $\Lambda$  est nécessairement un ensemble  $(1+\varepsilon)$ -Sidon pour tout  $\varepsilon > 0$  (au sens de [4] par exemple).

Si la conjecture 4 (ou si la conjecture 5) est correcte, alors il en résultera immédiatement une réponse affirmative à la conjecture ci-dessus dans le cas particulier des groupes  $G = \prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p_j)$  avec  $\sup_j p_j < \infty$ ; en effet, on sait pour ces groupes que  $\Lambda$  est un ensemble de Sidon ssi :  $\exists \delta > 0, \forall A \subset \Lambda$  avec  $|A| < \infty$ , on a  $\text{Log } n(C_A(G)) \geq \delta |A|$  (cf. [9] § 3, pour plus de détails et de références).

Remarque : L'étude des nombres  $n(E)$  s'insère naturellement dans un contexte plus général. Soit  $E$  un espace de Banach soit  $p$  tel que  $0 < p \leq \infty$ , et soit  $u$  un opérateur de rang fini de  $E$  à valeurs dans un espace  $L^p$ . On peut définir le nombre  $n_p(u)$  comme le plus petit entier  $m$  pour lequel l'opérateur  $u$  admet une factorisation  $E \xrightarrow{v} \ell_m^p \xrightarrow{w} L^p$  avec  $u = vw$  et  $\|w\| \|v\| \leq 2$ . Un cas particulièrement intéressant est celui où  $E$  est un sous-espace de dimension finie de  $L^p$  et où  $u : E \rightarrow L^p$  est l'injection canonique (noter que, dans le cas  $p = \infty$ , on retrouve  $n(E)$ ; en effet, on a alors  $n_{\infty}(u) = n(E)$ ). Dans le cas particulier  $p = 1$ , W.B. Johnson a démontré le résultat intéressant suivant (non publié) :

Soit  $n$  un entier, soit  $E_n$  le sous-espace de  $L^1([0,1])$  engendré par les  $n$  premières fonctions de Rademacher  $[r_1, \dots, r_n]$ , et soit  $j_n : E_n \rightarrow L^1([0,1])$  l'injection canonique. On a alors la minoration :

$$n_1(j_n) \geq 2^{\delta n}$$

avec  $\delta > 0$  indépendant de  $n$ .

Enfin, le lecteur notera que le cas  $p = 2$  est trivial (pour  $u : E \rightarrow L^2$ , on a  $n_2(u) = \text{rang}(u)$ ).

Remarque : Soit  $E$  de dimension finie.

Il est clair que  $n(E)$  peut être aussi défini à l'aide des points extrémaux des corps convexes dans  $E'$ ; en effet, on voit facilement que l'on a :

$$n(E) = \inf\{\text{card}(\text{ext}(C))\}$$

où l'infimum porte sur tous les convexes fermés équilibrés  $C \subset E'$  tels que  $B_{E'} \subset C \subset 2B_{E'}$ .

Ainsi, on peut aussi reformuler le théorème 1 de la manière suivante : soit  $p > 1$ , il existe un nombre  $\delta = \delta(p, T_p(E)) > 0$  (ne dépendant que de  $p > 1$  et  $T_p(E)$ ) tel que le cardinal de l'ensemble des points extrémaux

de la boule de  $E'$  soit supérieur à  $2^{\delta n}$ .

REFERENCES

- [1] W. Beckner, Inequalities in Fourier Analysis, *Annals of Maths.* 102 (1975) 159-182.
- [2] T. Figiel, J. Lindenstrauss et V. Milman, The dimension of almost spherical sections of convex bodies, *Acta Math.* 139 (1977) 53-94.
- [3] S. Kwapien' et A. Pełczyński, Absolutely summing operators and translation invariant spaces of functions on compact abelian groups, *Math. Nachr.* 94 (1980) 303-340.
- [4] J. Lopez et K. Ross, Sidon sets, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics No 13*, M. Dekker, New York (1975).
- [5] B. Maurey et G. Pisier, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, *Studia Math.* 58 (1976) 45-90.
- [6] A. Pietsch, *Operator ideals*, Berlin, North Holland (1980).
- [7] G. Pisier, Un théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un Hilbert, *Annales de l'E.N.S.* 13 (1980) 69-90.
- [8] G. Pisier, Some applications of the complex method of interpolation to Banach lattices, *Journal d'Analyse Math. de Jerusalem* 35 (1979) 264-281.
- [9] G. Pisier, De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon, *Advances in Maths.*, *Supplementary Studies*, à paraître.
- [10] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73, Ecole Polytechnique, Paris.
- [11] Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74, Ecole Polytechnique, Paris.
- [12] Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach 1977-78, Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [13] Séminaire d'analyse fonctionnelle 1978-79, Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [14] W.H.J. Fuchs, *Topics in the theory of functions of one complex variable*, Van Nostrand Math. Studies # 12, 1967.