Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

NOBUYUKI NINOMIYA

Sur le principe du maximum et le balayage

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. n° 8, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958-1959__3__A7_0>

SUR LE PRINCIPE DU MAXIMUM ET LE BALAYAGE

par Nobuyuki NINOMIYA

L'objet principal de la théorie du potentiel est l'étude du problème de l'équilibre et du problème du balayage. Dans la théorie classique du potentiel, on les a étudiés pour le potentiel newtonien dans l'espace ordinaire et pour le potentiel logarithmique dans le plan. La thèse célèbre de FROSTMAN a été le point de départ de cette étude pour les potentiels généralisés. FROSTMAN ([6]) a considéré les potentiels d'ordree α dans R^3

$$U^{\mu}(x) = \int |x - y|^{-\alpha} \, d\mu(y) , \qquad 1 \leq \alpha < 3 .$$

Il a démontré que, étant donné dans R^3 un compact F de capacité d'ordre α positive, il existe une seule mesure positive λ portée par F telle que $U^{\lambda}(x) = 1$ sur F hors d'un ensemble de capacité d'ordre α nulle, et $U^{\lambda}(x) \leq 1$ dans tout l'espace. Il a démontré encore la possibilité du balayage imparfait pour les potentiels d'ordre α , c'est-à-dire que, étant donné dans R^3 un compact F de capacité d'ordre α positive, et un point p , il existe une constante $\gamma \geq 0$ et une mesure positive λ portée par F , de masse totale 1, telle que $U^{\lambda}(x) \geq |x - p|^{-\alpha} + \gamma$ sur F hors d'un ensemble de capacité d'ordre α nulle et $\leq |x - p|^{-\alpha} + \gamma$ sur le support de λ . C'est RIESZ ([9]) qui a établi le balayage parfait pour les potentiels d'ordre α par une méthode ingénieuse (l'utilisation de la transformation de Kelvin). Ainsi, la possibilité de l'équilibre et du balayage pour le potentiel d'ordre α a été établie entièrement par FROSTMAN et RIESZ. Depuis, leurs études sur les potentiels généralisés ont été poursuivies par quelques mathématiciens ([3], [4], [5], [7], [8]). On doit souligner que BEURLING et DENY ([1]) ont réussi à déterminer effectivement les noyaux de compositions symétriques pour lesquels le balayage est possible.

On va travailler aux relations entre les principes du maximum et certains types d'équilibre et de balayage. Soit $K(x , y)$ une fonction positive, continue et symétrique dans l'espace euclidien ou plus généralement dans l'espace topologique localement compact Ω . Le noyau $K(x , y)$ pourra être $+ \infty$ en $x = y$.

On considère les potentiels des mesures μ :

$$U^{\mu}(x) = \int K(x , y)\, d\mu(y) \quad .$$

On suppose que tout ensemble ouvert de Ω est de K-capacité positive.

1. Principes ordinaires.

1. a. - Le noyau K est dit satisfaire au principe du balayage lorsque, pour toute mesure positive μ et pour tout compact F , il existe au moins une mesure positive μ' portée par F telle que

(1) $U^{\mu'}(x) = U^{\mu}(x)$ sur F hors d'un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\mu'}(x) \leq U^{\mu}(x)$ dans tout l'espace.

Cette mesure μ' est dite mesure balayée de μ sur F , et le potentiel $U^{\mu'}$ est dit potentiel balayé de μ sur F . On va démontrer :

THÉORÈME 1. - Pour qu'un noyau K satisfasse au principe du balayage, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété suivante :

[A] Soient μ une mesure positive à support compact F et p un point quelconque n'appartenant pas à F . Si on a

$$U^{\mu}(x) \leq K(x , p)$$

sur F , on a la même inégalité dans tout l'espace.

DÉMONSTRATION. - Supposons qu'un noyau K satisfasse au principe du balayage. Soient p un point quelconque et μ une mesure positive dont le support soit un compact ne contenant pas p , telle que

$$U^{\mu}(x) \leq K(x , p)$$

sur le support de μ . Alors, μ est évidemment d'énergie finie. Désignons par ε'_x une mesure balayée de la mesure ponctuelle ε_x placée en un point x sur le support F de μ . On a

$$U^{\mu}(x) = (\varepsilon_x , \mu) = (\varepsilon'_x , \mu) = (\mu , \varepsilon'_x)$$

$$\leq (\varepsilon_p , \varepsilon'_x) = (\varepsilon'_x , \varepsilon_p) \leq (\varepsilon_x , \varepsilon_p) = K(x , p) \quad ,$$

en faisant attention au fait que toute mesure d'énergie finie ne porte aucune mesure sur tout ensemble de K-diamètre transfini nul. Inversement, supposons qu'un noyau K jouisse de la propriété [A]. Soient F un compact de K-diamètre transfini positif et p un point n'appartenant pas à F. Pour construire une mesure balayée de ε_p sur F, prenons une mesure μ_0 qui rende minimum

$$G(\mu) = \frac{\|\mu\|^2}{(\mu,\ \varepsilon_p)^2}$$

parmi toutes les mesures positives ($\neq 0$) portées par F. Si on pose

$$a = \|\mu_0\|^2 \quad , \quad c = (\mu_0\ ,\ \varepsilon_p) \ , \quad \varepsilon'_p = \frac{c}{a}\mu_0 \qquad ,$$

on a

(1) $U^{\varepsilon_p'}(x) \geqslant K(x\ ,\ p)$ sur F hors d'un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\varepsilon_p'}(x) \leqslant K(x\ ,\ p)$ sur le support de ε'_p.

La propriété [A] entraîne que ε'_p est une mesure balayée de ε_p sur F. Ensuite, pour construire une mesure balayée de la mesure ponctuelle ε_p placée en un point p de F sur F, prenons une suite de voisinages de p telle que $G_n \downarrow \{p\}$. Alors, la limite de la suite des mesures balayées ε'_{pn} de ε_p sur $F_n = F - G_n$ est une mesure balayée de ε_p sur F. Enfin, pour construire une mesure balayée d'une mesure positive quelconque μ sur F, prenons une suite de mesures ponctuelles μ_n convergeant vers μ. Alors, la limite de la suite des mesures balayées μ'_n de μ_n sur F est une mesure balayée de μ sur F.

REMARQUE 1. - La propriété [A] est d'apparence plus simple que le second principe du maximum. Mais, la propriété [A] entraîne le second prindipe du maximum. D'ailleurs, elle est équivalente au second principe du maximum. En effet, soient μ une mesure positive d'énergie finie à support compact F et ν une mesure positive quelconque, telle que

$$U^{\mu}(x) \leqslant U^{\nu}(x)$$

sur F. Quand un noyau K jouit de la propriété [A], on a, en désignant ε'_x une mesure balayée de la mesure ponctuelle placée en un point x n'appartenant pas à F dur F,

$$U^{\mu}(x) = (\mu\ ,\ \varepsilon_x) = (\varepsilon_x\ ,\ \mu) = (\varepsilon'_x\ ,\ \mu) = (\mu\ ,\ \varepsilon'_x)$$

$$\leq (\nu\ ,\ \varepsilon'_x) = (\varepsilon'_x\ ,\ \nu) \leqslant (\varepsilon_x\ ,\ \nu) = U^{\nu}(x) \qquad .$$

REMARQUE 2. - On peut faire le balayage de manière qu'on ait la relation de réciprocité

$$(\mu, \nu') = (\mu', \nu)$$

pour toute mesure positive μ et pour toute mesure positive d'énergie finie ν. Cette relation est évidente au cas où μ et ν sont tous les deux d'énergie finie. Mais on peut établir cette relation même au cas où μ n'est pas d'énergie finie. En effet, soient

$$G_n = \{x ; U^{\mu}(x) > n\} \quad ,$$

μ'_n une mesure balayée de μ sur $F_n = F - G_n$ et μ' la limite de la suite $\{\mu'_n\}$. L'ensemble $G_\infty = \bigcap_n G_n$ est de K-capacité nulle comme il est bien connu. Comme (K-capacité nulle) entraîne (K-diamètre transfini nul) pour tout noyau K satisfaisant au second principe du maximum, G_∞ est de K-diamètre transfini nul. Alors, μ' est une mesure balayée de μ sur F et μ'_n est d'énergie finie. Par suite, on a pour toute mesure positive ν d'énergie finie

$$(\mu, \nu') = (\mu', \nu')$$

et

$$(\mu', \nu) = \lim (\mu'_n, \nu) = \lim (\mu'_n, \nu') = (\mu', \nu') \quad ,$$

d'où la relation de réciprocité.

REMARQUE 3. - Si on fait le balayage de manière qu'on ait la relation de réciprocité, les potentiels balayés de toute mesure positive sur un compact sont bien déterminés dans tout l'espace. En effet, soient μ' et μ'' des mesures balayées d'une mesure positive μ sur un compact F. Alors, on a $(\mu', \nu) = (\mu, \nu')$ et $(\mu'', \nu) = (\mu, \nu')$ pour toute mesure positive ν d'énergie finie. Par suite, on a

$$U^{\mu'}(x) = U^{\mu''}(x)$$

dans tout l'espace hors d'un ensemble de K-diamètre transfini nul.

On souligne que DENY ([5]) a étendu dernièrement le théorème 1 aux noyaux positifs quelconques (symétriques ou non).

1. b. - Un noyau K est dit satisfaire au principe de l'équilibre lorsque, pour tout compact F, il existe au moins une mesure positive λ portées par F telle que

(1) $U^{\lambda}(x) = 1$ sur F hors d'un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\lambda}(x) \leq 1$ dans tout l'espace.

Cette mesure λ est dite une mesure capacitaire sur F et le potentiel U^{λ} est dit un potentiel capacitaire sur F.

THÉORÈME 2. - Pour qu'un noyau K satisfasse au principe de l'équilibre, il faut et il suffit qu'il satisfasse au premier principe du maximum. Alors, des potentiels capacitaires sur tout compact sont bien déterminés dans tout l'espace.

DÉMONSTRATION. - Supposons qu'un noyau K satisfasse au premier principe du maximum. Étant donné un compact F de K-diamètre transfini nul, prenons une mesure μ_0 qui rende minimum l'intégrale d'énergie parmi toutes les mesures positives portées par F de masse totale 1. Posons

$$\lambda = \frac{1}{\|\mu_0\|^2} \cdot \mu_0 \quad .$$

On a, comme il est bien connu,

(1) $U^{\lambda}(x) \geq 1$ sur F hors d'un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\lambda}(x) \leq 1$ sur le support de λ.

Alors, le premier principe du maximum entraîne que λ est une mesure capacitaire sur F. Inversement, supposons qu'un noyau K satisfasse au principe de l'équilibre. Soit une mesure positive λ à support compact F, telle que $U^{\lambda}(x) \leq 1$ sur F. S'il y avait un point p où $U^{\lambda}(p) > 1$, prenons une mesure positive μ_0 qui rende minimum

$$G(\mu) = \frac{\|\mu\|^2}{(\mu , \varepsilon_p)^2}$$

parmi toutes les mesures positives μ portées par F. Si on pose

$$a = \|\mu_0\|^2 , \qquad c = (\mu_0 , \varepsilon_p) , \qquad g(x) = cU^{\mu_0}(x) - aK(x , p) \quad ,$$

on a

$$0 \leq \int g(x)\, d\lambda(x) = c(\mu_0 , \lambda) - a(\varepsilon_p , \lambda) < c - a \quad .$$

D'autre part, on a pour toute mesure capacitaire λ_0 sur le support de μ_0.

$$0 \geq \int g(x)\, d\lambda_0(x) = c(\mu_0 , \lambda_0) - a(\varepsilon_p , \lambda_0) \geq c - a \quad .$$

C'est contradictoire. Par suite, on a

$$U^{\lambda}(x) \leq 1$$

dans tout l'espace. Enfin, le lemme suivant entraîne facilement que des potentiels capacitaires sur tout compact soient bien déterminés dans tout l'espace.

LEMME 1. - Soit K un noyau de type positif. Si on a

$$G(\mu, \nu) = 1$$

pour un couple (μ, ν) de deux mesures positives μ et ν portées par deux ensembles disjoints E_1 et E_2 respectivement, on a

$$g_1(x) = g_2(x)$$

dans tout l'espace hors d'un ensemble de K-capacité nulle, où

$$a = \|\mu\|^2 \quad , \quad b = \|\nu\|^2 \quad , \quad c = (\mu, \nu) \quad ,$$

$$g_1(x) = cU^{\mu}(x) - aU^{\nu}(x) \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = cU^{\nu}(x) - bU^{\mu}(x) \quad .$$

La démonstration du lemme se fait en s'appuyant sur l'égalité $cg_1(x) + ag_2(x) \equiv 0$ et sur le fait que (μ, ν) est un couple minimal.

REMARQUE 4. - On peut prouver facilement que le premier principe du maximum (équivalent au principe de l'équilibre) équivaut au principe de la masse totale : pour toute mesure positive μ d'énergie finie à support compact F et pour toute mesure positive ν, $U^{\mu}(x) \leq U^{\nu}(x)$ sur F entraîne $\mu(\Omega) \leq \nu(\Omega)$.

COROLLAIRE. - Tout noyau positif et symétrique satisfaisant au principe de l'équilibre ou du balayage est de type positif.

2. Principes inverses.

Dans un mémoire récent [2], CHOQUET et DENY ont introduit de nouveaux principes en théorie du potentiel, qui correspondent aux principes classiques de balayage, domination, maximum, équilibre, et qu'ils ont appelés principes inverses, et principes faibles. Leur étude a été faite sur un espace constitué par un nombre fini de points. Nous allons faire ici une étude de ces principes sur un espace localement compact, pour les noyaux K satisfaisant aux conditions de régularité indiquées plus haut.

Un noyau K est dit satisfaire au principe du balayage inverse lorsque, pour tout compact F et pour toute mesure positive μ, il existe au moins une mesure positive μ' portée par F telle que

(1) $U^{\mu'}(x) = U^{\mu}(x)$ sur F,

(2) $U^{\mu'}(x) \geq U^{\mu}(x)$ dans tout l'espace.

La dernière condition exige que tout noyau K satisfaisant au principe du balayage inverse soit borné et continu sur tout compact de l'ensemble diagonal $\Omega \times \Omega$, et donc que le K-diamètre transfini et la K-capacité de tout compact sont positifs tous les deux. Un noyau K est dit satisfaire au principe de l'équilibre inverse lorsque, étant donné un compact F de K-diamètre transfini positif, il existe au moins une mesure positive λ portée par F telle que

(1) $U^{\lambda}(x) = 1$ sur F hors d'un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\lambda}(x) \geq 1$ dans tout l'espace.

THÉORÈME 1'. - Pour qu'un noyau K satisfasse au principe du balayage inverse, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété :

[A'] Soient μ une mesure positive à support compact F et p un point n'appartenant pas à F. Si on a

$$U^{\mu}(x) \geq K(x, p)$$

sur F, on a la même inégalité dans tout l'espace.

THÉORÈME 2'. - Pour qu'un noyau K satisfasse au principe de l'équilibre inverse, il faut et il suffit qu'il jouisse du premier principe du maximum inverse : "Pour toute mesure positive λ d'énergie finie à support compact, si on a $U^{\lambda}(x) \geq 1$ sur le support de λ, on a la même inégalité dans tout l'espace".

Pour démontrer les théorèmes 1' et 2', considérons

$$G(\mu, \nu) = \frac{\|\mu\|^2 \times \|\nu\|^2}{(\mu, \nu)^2}$$

pour tout couple (μ, ν) de deux mesures positives μ et ν portées par deux compacts disjoints E_1 et E_2 respectivement. Si $K(x, y)$ est bornée et continue sur tout compact de $\Omega \times \Omega$, il existe un couple (μ_0, ν_0) qui rend maximum $G(\mu, \nu)$ parmi tous les couples (μ, ν). Alors,

LEMME 2. - Soit (μ_0, ν_0) un couple maximal. Si on pose

$$a = \|\mu_0\|^2 , \quad b = \|\nu_0\|^2 , \quad c = (\mu_0 , \nu_0)$$

$$g_1(x) = cU^{\mu_0}(x) - aU^{\nu_0}(x) \quad \text{et} \quad g_2(x) = cU^{\nu_0}(x) - bU^{\mu_0}(x) ,$$

on a

(1) $g_1(x) \leqslant 0$ sur E_2

(2) $g_1(x) \geqslant 0$ sur le support de μ_0 .

Résultats analogues pour $g_2(x)$.

Les démonstrations des théorèmes 1' et 2' se terminent de façon analogue à celles des théorèmes 1 et 2 , en s'appuyant sur le lemme 2. On a le corollaire suivant. Un noyau positif et symétrique K est dit de type négatif, lorsque

$$\|\mu\|^2 \times \|\nu\|^2 \leq (\mu, \nu)^2$$

pour toute mesure positive μ et ν . Alors, on a

COROLLAIRE. - Tout noyau positif et symétrique satisfaisant au principe de l'équilibre inverse ou du balayage inverse est de type négatif.

3. Principes faibles

Enfin, considérons le balayage faible et l'équilibre faible. Un noyau K est dit satisfaire au principe du balayage faible lorsque, pour toute mesure positive μ et pour tout compact F , il existe au moins une mesure positive μ' portée par F telle que $U^{\mu'}(x) = U^{\mu}(x)$ sur F hors d'un ensemble de K-diamètre transfini nul. Et un noyau K est dit satisfaire au principe de l'équilibre faible lorsque, étant donné un compact F , il existe au moins une mesure positive λ portée par F telle que $U^{\lambda}(x) = 1$ sur F hors d'un ensemble de K-diamètre transfini nul. Alors on a

THÉORÈME 3. - Si un noyau positif et symétrique K est de type positif, le principe du balayage faible entraîne le principe du balayage (ordinaire) et le principe de l'équilibre faible entraîne le principe de l'équilibre (ordinaire). Si un noyau positif et symétrique K est de type négatif, le principe du balayage faible entraîne le principe du balayage inverse et le principe de l'équilibre faible entraîne le principe de l'équilibre inverse.

DÉMONSTRATION. - Supposons qu'un noyau positif et symétrique K est de type positif et satisfait au principe du balayage faible. On peut prouver facilement que le principe du balayage faible entraîne le second principe du maximum faible : pour deux mesures positives μ et ν d'énergie finie à support compact, $U^{\mu}(x) \leq U^{\nu}(x)$ sur les supports de μ et ν entraîne la même inégalité dans tout l'espace. Soient F un compact de K-diamètre transfini positif, p un point n'appartenant pas à F et $\{G_n\}$ une suite de voisinages de p telle que $G_n \downarrow p$. Considérons

$$G(\mu, \nu) = \frac{\|\mu\|^2 \times \|\nu\|^2}{(\mu, \nu)^2}$$

pour tout couple (μ, ν) de deux mesures positives μ et ν , μ portée par F et ν portée par G_n . Soit (μ_0, ν_0) un couple minimal de $G(\mu, \nu)$. Si on pose

$$a = \|\mu_0\|^2 \quad , \quad b = \|\nu_0\|^2 \quad , \quad c = (\mu_0, \nu_0)$$

$$g_1(x) = cU^{\mu_0}(x) - aU^{\nu_0}(x) \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = cU^{\nu_0}(x) - bU^{\mu_0}(x) \quad ,$$

on a

(1) $g_1(x) \geq 0$ sur F hors d'un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $g_1(x) \leq 0$ sur le support de μ_0 ,

(3) $g_2(x) \leq 0$ sur le support de ν_0 .

L'inégalité $c^2 \leq ab$ entraîne, en posant $\mu_n = \frac{c}{a}\mu_0$,

(1) $U^{\mu_n}(x) \geq U^{\nu_0}(x)$ sur F hors d'un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\mu_n}(x) \leq U^{\nu_0}(x)$ sur les supports dd μ_n et ν_0 .

Le second principe du maximum faible exige que cette mesure μ_n soit une mesure balayée de ν_0 sur F . Alors, la limite ε'_p de la suite $\{\mu_n\}$ est une mesure balayée de ε_p sur F . Ainsi, on sait que le noyau K satisfait au principe du balayage. Ensuite, supposons qu'un noyau K soit de type positif et satisfasse au principe de l'équilibre faible. On peut prouver facilement que le principe de l'équilibre faible entraîne le principe de la masse totale faible : pour deux mesures positives μ et ν d'énergie finie à support compact,