Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Paul-André Meyer

Propriétés des fonctions excessives

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 5 (1960-1961), exp. nº 9, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1960-1961__5__A10_0>

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS EXCESSIVES

par Paul-André MEYER

Cet exposé, qui contient les résultats les plus importants de la première partie du mémoire de HUNT, est consacré à la "théorie fine du potentiel", c'est-à-dire à la théorie du potentiel envisagée sous l'aspect des fonctions excessives (par opposition à celui des mesures excessives). Nous conserverons les hypothèses et les notations de l'exposé 5 - le semi-groupe $\{P_t\}$ est, en particulier, supposé fortement continu sur l'espace invariant $C_0(X)$. Chaque fois que nous considérerons un ensemble presque analytique E, nous désignerons par T_E le temps d'entrée dans E, par P_E^λ l'opérateur défini par la relation :

$$P_E^\lambda(x , f) = E^x[f \circ X_{T_E} . \exp(- \lambda T_E)] \quad .$$

Où il importe de se rappeler, si $\lambda = 0$, que l'on a par convention (exposé 3, p. 2) $X_{T_E}(\omega) = \partial$ si $T_E(\omega) = \infty$, et $f(\partial) = 0$. Un opérateur P_T^λ peut d'ailleurs être défini de manière analogue pour tout temps d'arrêt T. La fonction $P_E^\lambda 1$ sera désignée par la notation Φ_E^λ.

I. Résultats préliminaires.

DÉFINITION. - Nous dirons que le semi-groupe $\{P_t\}$ est intégrable si le potentiel $U(x , K) = \int_0^\infty P_t(x , K)\, dt$ est, pour tout compact K de X, une fonction bornée de x.

Par exemple, le semi-groupe $\{\exp(- \lambda t) P_t\}$ est intégrable, quel que soit le semi-groupe sous-markovien $\{P_t\}$, lorsque λ est strictement positif.

THÉORÈME 1.1. - Soit $\{P_t\}$ un semi-groupe intégrable : toute fonction excessive f est la limite d'une suite croissante de potentiels bornés de fonctions positives bornées.

(La limite d'une suite croissante de fonctions excessives étant encore excessive la réciproque est d'ailleurs vraie ; ce théorème a déjà été utilisé dans l'exposé précédent).

DÉMONSTRATION.

a. - Soit f une fonction excessive bornée, telle que $\lim_{t\to\infty} P_t f = 0$. Posons $\Delta_t f = (f - P_t f)/t$: lorsque $t \to 0$, le potentiel de $\Delta_t f$ tend en croissant vers f. En effet :

$$\int_0^u P_s(\Delta_t f)\, ds = \frac{1}{t}\int_0^t P_s f\, ds - \frac{1}{t}\int_u^{u+t} P_s f\, ds \quad .$$

Lorsque $u \to \infty$, la seconde intégrale tend vers 0, et le premier membre vers $U(\Delta_t f)$. Lorsque $t \to 0$, la première intégrale tend en croissant vers f.

b. - Pour que l'énoncé du théorème soit vrai, il faut et il suffit qu'il existe une suite de potentiels bornés de fonctions positives bornées h_n, qui converge en croissant vers la fonction excessive $+\infty$. Soit en effet f une fonction excessive quelconque, f_n la fonction surmédiane égale à $\inf [Uh_n , f]$ (Cf. exposé 3, p. 11, la définition des fonctions surmédianes). Comme

$$P_t\, Uh_n = \int_t^\infty P_s\, h_n\, ds \quad ,$$

$\lim_{t\to\infty} P_t\, Uh_n = 0$, et a fortiori $\lim_{t\to\infty} P_t f_n = 0$. Le raisonnement fait plus haut montre alors que $U(\Delta_t f_n) = \frac{1}{t}\int_0^t P_s f_n\, ds$; cette fonction croît lorsque n croît, ou lorsque t décroît : il en résulte que

$$\lim_n U(\Delta_{1/n} f_n) = \lim_{t\to 0} \lim_n U(\Delta_t f_n) = \lim_t \int_0^t P_s f\, ds = f \quad .$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que les $\Delta_t f_n$ et leurs potentiels sont des fonctions bornées.

c. - Si le semi-groupe $\{P_t\}$ est intégrable, on peut construire des h_n possédant les propriétés ci-dessus : il suffit de remarquer que le potentiel de la fonction 1 est partout strictement positif, de choisir une suite croissante de compacts K_n dont la réunion est X, et de poser $h_n = n.\chi_{K_n}$.

THÉORÈME 1.2. (Cf. HUNT, proposition 12.5). - Soit $\{P_t\}$ un semi-groupe intégrable ; quelle que soit la mesure initiale ν, P^ν-presque toutes les trajectoires du processus $\{X_t\}$ s'éloignent à l'infini lorsque $t \to \infty$ (cette expression signifiant que l'on a presque sûrement, ou bien $\lim_{t\to\infty} X_t(\omega) = \partial$, ou bien $X_t(\omega) = \partial$, dès que t est assez grand).

DÉMONSTRATION. - Il nous suffit de montrer que, pour tout ouvert K relativement compact dans X, l'ensemble des trajectoires qui rencontrent K pour des valeurs de t arbitrairement grandes est P^{ν}-négligeable. Soit G un ouvert relativement compact qui contient $\overline{K}$; la fonction $f(x) = U(x, G)$ est strictement positive sur $\overline{K}$, et semi-continue inférieurement : sa borne inférieure sur $\overline{K}$ est donc un nombre strictement positif a. Le processus $Y_t = f \circ X_t$ est une supermartingale positive, il admet donc une limite presque sûre lorsque $t \to \infty$ par valeurs rationnelles (généraliser le raisonnement du théorème 1.4, exposé 4). Si nous supposons que la mesure ν est bornée, ce que nous pouvons faire (exposé 3, p. 8, théorème 5), l'espérance mathématique $E(Y_t) = \langle \nu P_t , f \rangle = \langle \nu , P_t f \rangle$ tend vers 0 lorsque $t \to \infty$, puisque f est un potentiel fini. La limite presque sûre ne peut donc être que 0, d'après le lemme de Fatou : comme $f \geq a$ sur K, presque aucune trajectoire ne rencontre K pour des valeurs rationnelles très grandes du temps t ; la même propriété est vraie pour t quelconque, en vertu de la continuité à droite des trajectoires, et du fait que K est ouvert.

REMARQUE. - Ce théorème reste vrai si l'on remplace "borné" par "fini" dans la définition des semi-groupes intégrables.

II. Un théorème fondamental.

Le théorème suivant a été démontré par DOOB dans les cas du mouvement brownien et du processus de la chaleur, par HUNT dans le cas général.

THÉORÈME 2.1. - Soit f une fonction λ-excessive ($\lambda \geq 0$).

1° f est presque borélienne ;

2° Quelle que soit la mesure initiale ν, l'application $t \to f \circ X_t(\omega)$ est continue à droite et pourvue d'une limite à gauche en tout point, pour P^{ν}-presque toute trajectoire ω.

DÉMONSTRATION. - Il nous suffit de raisonner dans le cas où $\lambda > 0$, une fonction 0-excessive étant λ-excessive pour tout λ. Nous nous bornerons au cas des fonctions finies, en laissant aux soins du lecteur les quelques changements de notation très faciles qu'exige l'extension au cas général. La démonstration a été partagée en plusieurs parties.

a. - Soient f une fonction λ-excessive, E un ensemble presque borélien, x un point régulier pour E. Posons $a = \inf_{y \in E} f(y)$, $b = \sup_{y \in E} f(y)$: $f(x)$ est compris entre a et b.

Soit en effet K un compact de E ; comme f est λ-excessive, $P_K^\lambda f \leq f$ (exposé 8). La répartition de X_{T_K} étant portée par K (exposé 5, p. 14, théorème 3.5), et f minorée par a sur K, on a $a.\Phi_K^\lambda \leq P_K^\lambda f \leq f$. Faisons croître K, de telle sorte que T_K tende en décroissant, P^x-presque sûrement, vers T_E - qui est nul P^x-p. s., puisque x est régulier pour E (exposé 5, p. 13, théorème 3.4): $\Phi_K^\lambda(x)$ tend vers $\Phi_E^\lambda(x) = 1$. Il en résulte bien que $a \leq f(x)$.

Toute fonction λ-excessive étant limite d'une suite croissante de λ-potentiels, il nous suffit de prouver l'inégalité $f(x) \leq b$ lorsque f est un potentiel $U^\lambda h$, où h est positive bornée. Le même raisonnement que ci-dessus prouve que

$$P_K^\lambda U^\lambda h(x) \leq b.\Phi_K^\lambda(x) \qquad ;$$

si nous faisons encore croître K comme ci-dessus, le second membre tend vers b ; il nous reste donc à démontrer que le premier membre tend vers $U^\lambda h(x)$: or il est égal (exposé 8) à $E^x[\int_{T_K}^\infty \exp(-\lambda t)\, h \circ X_t\, dt]$; T_K tendant vers 0 en décroissant, il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue.

b. Soient f une fonction presque borélienne positive, ε un nombre positif. Posons $T^\varepsilon(\omega) = \inf\{t : |f \circ X_t(\omega) - f \circ X_0(\omega)| > \varepsilon\}$; T^ε est un temps d'arrêt

(Si la mesure initiale est une masse unité ε_x, T^ε est simplement le temps d'entrée dans l'ensemble presque borélien $\{y : |f(y) - f(x)| > \varepsilon\}$; si f est en outre excessive, (a) signifie que cet ensemble est effilé en x, ou encore que $T^\varepsilon(\omega) > 0$, P^x-p. s. : il en est alors ainsi pour toute mesure initiale).

DÉMONSTRATION. - Soit G l'ensemble $\{\omega : T^\varepsilon(\omega) > a\}$; il est identique à l'ensemble $\{\omega : \forall\ r,\ 0 \leq r \leq a,\ |f \circ X_r(\omega) - f \circ X_0(\omega)| \leq \varepsilon\}$. Soient des entiers $n > 0$, $k \geq 0$, et désignons par $G_{k,n}$ l'ensemble :

$$\{\omega : k/n \leq f \circ X_0(\omega) < (k+1)/n\ ; \forall\, r,\ 0 \leq r \leq a,\ (k/n) - \varepsilon < (f \circ X_r(\omega) < [(k+1)/n] + \varepsilon\}.$$

D'après le théorème sur la mesurabilité des temps d'entrée, $G_{k,n}$ est un évènement de F_a, et il en est de même de $G = \bigcap_n \bigcup_k G_{k,n}$.

c. Soit f une fonction λ-excessive et presque borélienne (par exemple : un λ-potentiel de fonction borélienne positive). Quelle que soit la mesure initiale ν, le processus $\{f \circ X_t(\omega)\}$ a, P^ν-presque sûrement, des trajectoires continues à droite.

Définissons des temps d'arrêt $T_\alpha(\omega)$ suivant les règles de récurrence transfinie suivantes :

1° $T_0 = 0$;

2° Si β est un ordinal de seconde espèce, $T_\beta(\omega) = \sup_{\alpha<\beta} T_\alpha(\omega)$;

3° Si $T_\alpha(\omega) = \infty$, $T_{\alpha+1}(\omega) = \infty$; sinon, $T_{\alpha+1}(\omega) = T_\alpha(\omega) + T^\varepsilon(\theta_{T_\alpha}\omega)$.

D'après la propriété forte de Markov, $P^\nu[T_\alpha(\omega) < \infty , T_{\alpha+1}(\omega) = T_\alpha(\omega)]$ est égal à $P^{\nu P_{T_\alpha}}[T^\varepsilon(\omega) = 0] = 0$. Considérons la suite transfinie de nombres réels décroissants $E[\exp(- T_\alpha)]$: il existe un ordinal γ tel que

$$E^\nu[\exp(- T_\gamma)] = E^\nu[\exp(- T_{\gamma+1})] \quad ;$$

ceci n'est compatible avec les remarques précédentes que si $T_\gamma(\omega) = \infty$, P^ν-p. s.

Or, supposons que ω soit une trajectoire telle que l'application $t \to f \circ X_t(\omega)$ ne soit pas continue à droite à l'instant s : il existe alors un ε , de la forme $1/n$ (n entier), tel que tous les $T_\alpha(\omega)$ relatifs à cette valeur de ε restent inférieurs à s . L'ensemble de ces ω , étant contenus dans une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle, est de mesure nulle.

d.-Soit f une fonction λ-excessive et presque borélienne. P^ν-presque toutes les trajectoires du processus $\{f \circ X_t(\omega)\}$ sont pourvues de limites à gauche en tout point.

Le processus $\{\exp(- \lambda t)\, f \circ X_t(\omega)\}$ est, en effet, une supermartingale dont les trajectoires sont p. s. continues à droite : il est donc séparable, et il suffit d'appliquer le théorème 2.2, exposé 4, p. 8.

e. - Toute fonction λ-excessive f est presque borélienne. Il suffit de le démontrer pour un potentiel $U^\lambda h$, où h est universellement mesurable, positive et bornée. Soit ν une mesure positive bornée, et soient h_1 , h_2 deux fonctions boréliennes positives telles que $h_1 \leq h \leq h_2$, et $\langle \nu U^\lambda , h_1\rangle = \langle \nu U^\lambda , h_2\rangle$. Elles sont égales νU^λ-presque partout, donc égales presque partout pour la mesure $\nu P_t U^\lambda$, qui est majorée par $\exp(\lambda t).\nu U^\lambda$. Nous avons donc presque sûrement, pour chaque t rationnel, $U^\lambda h_1 \circ X_t = U^\lambda h_2 \circ X_t$, le premier membre étant inférieur au second, et ayant même espérance mathématique. Mais les deux potentiels sont boréliens, donc presque boréliens, et la continuité à droite établie plus haut montre que l'on a presque sûrement $U^\lambda h_1 \circ X_t = U^\lambda h_2 \circ X_t$ <u>pour tout</u> t . Il suffit alors de se reporter à l'exposé 5, p. 11, définition 3.2 : cela signifie précisément que $U^\lambda h$ est presque borélienne.

III. Applications à la topologie fine et au balayage.

A. Étude des opérateurs P_E^λ.

THÉORÈME 3.1. - Soit g une fonction λ-excessive ($\lambda \geq 0$) et soit E un ensemble presque analytique.

1° La fonction $P_E^\lambda g$ (et en particulier la fonction $\Phi_E^\lambda = P_E^\lambda 1$) est λ-excessive, majorée par g, égale à g aux points réguliers pour E.

2° La fonction d'ensemble : $E \to P_E^\lambda g$ est positive, croissante, fortement sous-additive, continue à gauche ($P_E^\lambda g = \sup P_K^\lambda g$, où K parcourt la famille des parties compactes de E).

DÉMONSTRATION. - Une fonction excessive étant λ-excessive ($\lambda > 0$), et $P_E^\lambda g$ étant égal à $\sup_{\lambda > 0} P_E^\lambda g$, nous pouvons nous borner au cas où $\lambda > 0$. Toute fonction λ-excessive étant la limite d'une suite croissante de λ-potentiels de fonctions bornées, il suffit que nous démontrions le théorème lorsque $g = U^\lambda h$, où h est positive et bornée. Alors :

$$P_E^\lambda U^\lambda h(x) = E^x[\int_{T_E(\omega)}^\infty \exp(-\lambda t).h \circ X_t(\omega)\, dt]$$

$$\exp(-\lambda s)\, P_s\, P_E^\lambda U^\lambda h(x) = E^x[\int_{T_E(\theta_s \omega)}^\infty \exp(-\lambda(t+s)).h \circ X_t(\theta_s)\, dt]$$

$$= E^x[\int_{s+T_E(\theta_s \omega)}^\infty \exp(-\lambda r).h \circ X_r(\omega)\, dr]$$

(Voir dans l'appendice de l'exposé n° 5, le théorème 2). Il suffit alors de remarquer que $s + T_E(\theta_s\, \omega)$ est toujours $\geq T_E(\omega)$, et lui est égal si $T_E(\omega) > s$.

Les autres propriétés de 1 sont évidentes. Les deux premières assertions de 2 sont évidentes sur l'expression ci-dessus de $P_E^\lambda U^\lambda h(x)$. La sous-additivité forte résulte de la relation :

$$\int_{T_E}^\infty \exp(-\lambda t).h \circ X_t(\omega)\, dt + \int_{T_F}^\infty \cdots = \int_{\inf[T_E, T_F]}^\infty + \int_{\sup[T_E, T_F]}^\infty \cdots$$

du fait que $T_{[E \cup F]} = \inf[T_E , T_F]$, et $T_{[E \cap F]} \geq \sup[T_E , T_F]$. Enfin, on sait qu'il est possible de trouver, pour chaque x, une suite croissante de compacts K_n de E, telle que T_{K_n} tende en décroissant vers T_E, P^x-presque sûrement.

La dernière partie de 2° en résulte bien.

Le lemme suivant, qui nous servira plus loin, donne une propriété importante de la fonction Φ_E^λ.

LEMME 3.2. - Soit E un ensemble presque analytique, et soient T_n des temps d'arrêt qui tendent en croissant vers T_E. Soit Ω' l'ensemble des trajectoires ω telles que :

$$T_E(\omega) < \infty \ , \quad \forall \ n \ , \ T_n(\omega) < T_E(\omega) \quad .$$

La relation $\lim_n \Phi_E^\lambda \circ X_{T_n}(\omega) = 1$ a lieu presque sûrement sur Ω'.

DÉMONSTRATION. - Nous savons (théorème 1.1) que $\lim_n \Phi_E^\lambda \circ X_{T_n}(\omega) = \psi(\omega)$ existe et est majorée par 1. Nous pouvons aussi nous borner au cas où $\lambda > 0$ (car $\Phi_E \geqslant \Phi_E^\lambda$). Alors :

$$E^x[\exp(-\lambda T_E)] = \int_{[T_n < T_E]} \exp(-\lambda T_E)\, dP^x + \int_{[T_n = T_E]} \exp(-\lambda T_E)\, dP^x \ ;$$

l'évènement $[T_n < T_E]$ est antérieur à T_n, et sur cet ensemble on a la relation :

$$\exp(-\lambda T_E) = \exp(-\lambda T_n).\exp(-\lambda(T_E(\theta_{T_n})) \quad .$$

On a donc d'après la propriété forte de Markov ("rectifications", p. 6, théorème 2) :

$$E^x[\exp(-\lambda T_E)] = \int_{[T_n < T_E]} \exp(-\lambda T_n).\Phi_E^\lambda \circ X_{T_n}\, dP^x + \int_{[T_n = T_E]} \exp(-\lambda T_E)\, dP^x \ .$$

Passons à la limite ($n \to \infty$) ; il vient :

$$E^x[\exp(-\lambda T_E)] = \int_{\Omega'} \exp(-\lambda T_E).\psi.\, dP^x + \int_{\Omega - \Omega'} \exp(-\lambda T_E)\, dP^x \quad .$$

Comme $\psi \leqslant 1$, ψ est P^x-p. s. égale à 1 sur l'ensemble où $\exp(-\lambda T_E) \neq 0$.

B. Application à la topologie fine.

Soit E un ensemble presque analytique : la fonction Φ_E^λ, étant λ-excessive, est presque borélienne. L'ensemble $E' = \{x : \Phi_E^\lambda(x) = 1\}$ est donc presque borélien, l'ensemble $\bar{E} = E \cup E'$ presque analytique. Si $\lambda > 0$, E' est l'ensemble des points réguliers pour E. Il est bien clair alors que l'on a $T_E = T_{\bar{E}}$ p. s., et que $\Phi_E^\lambda = \Phi_{\bar{E}}^\lambda$. Soit enfin $E_n = E \cap \{x : \Phi_E^\lambda(x) < 1 - 1/n\}$: il est clair que E_n est effilé en tout point ; l'ensemble des points de E irréguliers pour E, qui est la réunion des E_n, est donc semi-polaire.

Nous donnons une définition de la topologie fine équivalente à celle qui a été donnée à l'exposé 5, mais que nous croyons être plus claire :

THÉORÈME 3.3. - Les parties presque boréliennes qui contiennent un point x, et dont le complémentaire est effilé en x, constituent une base du filtre des voisinages de x pour une topologie sur X, que l'on appelle la topologie fine. Toute fonction λ-excessive est finement continue.

DÉMONSTRATION. - Il suffit évidemment de vérifier le "quatrième axiome des voisinages" de Bourbaki. Nous démontrerons un résultat un peu meilleur : soit E un ensemble presque analytique, qui ne contient pas x, et qui est effilé en x. D'après le théorème 3.4, exposé 5, p. 13, il est contenu dans un G_δ, F, qui est effilé en x et ne contient pas x. L'ensemble presque borélien $\bar{F}$ possède alors la même propriété, l'ensemble $(X - \bar{F})$ contient x et est un voisinage fin de chacun de ses points. La dernière phrase de l'énoncé est évidente. Nous venons de voir qu'on obtient en fait la même topologie en remplaçant, dans la définition, "presque borélien" par "presque analytique", "borélien", ou même "G_δ".

La propriété la plus intéressante de la topologie fine, qui la rend très agréable à manier, est la suivante :

THÉORÈME 3.4. - Soit f une fonction presque borélienne positive. Désignons par $\bar{f}(\omega)$ la fonction (non mesurable a priori) :

$$\bar{f}(\omega) = \limsup_{t \to 0} f \circ X_t \quad .$$

Pour tout $x \in X$, $\bar{f}(\omega)$ est égale, P^x-p. s., à la constante $\limsup_{y \to x}$ fine $f(y)$. On a des propriétés analogues si l'on exclut la valeur $t = 0$ de la définition de $\bar{f}(\omega)$, et si l'on considère la $\limsup$ fine lorsque $y \to x$, $y \neq x$.

DÉMONSTRATION. - Soit a un nombre rationnel. Si $a > \limsup_{y \to x}$ fine $f(y)$, c'est que l'ensemble presque borélien $\{y : f(y) < a\}$ est un voisinage fin de x, ce qui entraîne encore que $\bar{f}(\omega) < a$ P^x-p. s. On voit de même que $a < \limsup$ fine $f(y)$ entraine que $\bar{f}(\omega) > a$ P^x-p. s.

C. Le théorème fondamental du balayage.

THÉORÈME 3.5. - Supposons que le semi-groupe $\{P_t\}$ soit intégrable. Soient g une fonction excessive, et E un ensemble presque analytique. La fonction $P_E\, g$, et l'enveloppe inférieure de la famille des fonctions excessives qui majorent g sur E, ne peuvent différer qu'en des points de E irréguliers pour E.

DÉMONSTRATION. - Nous nous bornerons ici au cas où g est finie, en renvoyant le lecteur à la démonstration du théorème 6.4 de Hunt pour le cas général. Nous allons commencer par ramener le problème à des cas particuliers plus simples.

a.-Soit h une fonction excessive qui majore g sur E : comme les deux fonctions sont finement continues, h majore g sur $\overline{E}$. Or, la répartition de toute mesure $P_E(x, dy)$ est portée par $\overline{E}$ (exposé 5, théorème 3.5) : il en résulte que l'on a la relation $P_E\, g \leq P_F\, h \leq h$. $P_E\, g$ est donc majorée par l'enveloppe inférieure ci-dessus. D'autre part, $P_E\, g$ lui est égale aux points réguliers pour E, puisqu'elle est égale à g en ces points. Nous avons donc à montrer que :

pour tout point $x \in X - E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction h qui majore g sur E, et qui est telle que $h(x) \leq P_E\, g(x) + \varepsilon$.

Soit F un ensemble presque analytique qui contient E, et qui est tel que tout point de E soit régulier pour F : les fonctions g et $P_F\, g$ sont égales sur E : nous allons chercher à déterminer des fonctions h de la forme $P_F\, g$.

b. - Soient K_n des compacts croissants dont la réunion est X. Désignons par E_0 l'ensemble E, par E_n ($n \geq 1$) l'ensemble :

$$K_n \cap \{y : g(y) \leq n\} \cap \{y : \Phi_E^\lambda(y) \leq 1 - 1/n\}$$

et supposons que nous ayons pu trouver pour chaque $n \geq 1$ un F_n, tel que tout point de E_n soit régulier pour F_n, et tel que l'on ait :

$$P_{F_n}\, g(x) \leq P_{E_n}\, g(x) + \varepsilon/2^n \quad .$$

Posons aussi $F_0 = E$. Notre problème sera alors résolu. On déduit en effet très facilement de la propriété de sous-additivité forte que l'on a, si $A_0 \ldots A_k$ sont des ensembles presque analytiques, $B_0 \ldots B_k$ des ensembles presque analytiques tels que $A_i \subset B_i$ pour tout i, l'inégalité :

$$P_{\cup B_i}\, g - P_{\cup A_i}\, g \leq \sum_0^k [P_{B_i}\, g - P_{A_i}\, g] \quad .$$

Posons ici $A_i = E_i$, $P_i = F_i$. Soit T_n le temps d'entrée dans $\bigcup_0^n F_n$; les T_n tendent en décroissant vers le temps d'entrée dans l'ensemble $F = \bigcup_0^\infty F_n$. Comme $E_0 = E$, le temps d'entrée dans $\bigcup_0^n E_n$ est identique à T_E. Il est clair que E est contenu dans F, et que tout point de E est régulier pour F. D'après la continuité à droite presque sûre de g sur les trajectoires,

$$\lim g \circ X_{T_n} = g \circ X_{T_F} ,$$

et on a donc, d'après le lemme de Fatou, $P_F\, g \leq \liminf P_{T_n}\, g$. Or

$$P_{T_n}\, g^x \leq P_E\, g^x + \sum_0^n [P_{F_n}\, g^x - P_{E_n}\, g^x] \leq P_E\, g^x + \varepsilon$$

ce que nous cherchons à démontrer.

c. - Nous avons donc ramené notre problème à la recherche d'un ensemble F , tel que tout point de E soit régulier pour F , que $P_F\, g \leq P_E\, g + \varepsilon$, dans le cas particulier suivant (celui des E_n ci-dessus) : E est relativement compact, g est bornée sur E , la fonction Φ_E^λ est majorée par une constante $a < 1$ sur E. La fonction g , étant finement continue, est bornée sur un ensemble H , finement ouvert, relativement compact, qui contient E . D'autre part, x n'appartenant pas à E , il existe une suite d'ouverts décroissants G_n , tels que les temps d'entrée T_{G_n} tendent en croissant vers T_E ; posons $G_n \cap H = F_n$ (1). Il résulte du lemme 3.2 ci-dessus que, pour presque toute trajectoire ω telle que $T_E(\omega) < \infty$, on a $T_{F_n}(\omega) = T_E(\omega)$ pour n assez grand, et du théorème 1.2, grâce à l'intégrabilité du semi-groupe, que les T_{F_n} ne peuvent tendre vers l'infini autrement qu'en sautant à l'infini : donc, que l'on a la même relation sur l'ensemble où $T_E(\omega) = \infty$. Les variables aléatoires $g \circ X_{T_{F_n}}$ étant bornées, on peut appliquer le théorème de Lebesgue, et en déduire l'existence d'un F_n tel que $P_{F_n}\, g \leq P_E g + \varepsilon$. Il ne reste plus qu'à remarquer que tout point de E est régulier pour F_n .

IV. Le théorème de convergence , d'après DOOB.

A. Ensembles exceptionnels de la théorie du potentiel.

DÉFINITION 4.1. - On dit qu'un ensemble universellement mesurable A est un ensemble de potentiel nul si l'on a, pour tout $x \in X$, et un $\lambda > 0$, la relation $U^\lambda(x , A) = 0$. Les expressions "presque partout" et "sauf sur un ensemble de potentiel nul" seront considérées comme synonymes.

L'interprétation du potentiel

$$U^\lambda(x , A) = E^x[\int_0^\infty \chi A \circ X_t(\omega).\exp(- \lambda t)\, dt]$$

montre que, pour qu'un ensemble A soit de potentiel nul, il faut et il suffit

---

(1) Voir : exposé 5, théorème 3.4.

que presque toute trajectoire ω ne la rencontre qu'en des instants dont l'ensemble est de mesure nulle. En particulier, le théorème suivant entraîne que <u>tout ensemble semi-polaire est de potentiel nul</u>.

THÉORÈME 4.1. - Soit A un ensemble semi-polaire. Quelle que soit la mesure initiale ν, l'ensemble $\{t : X_t(\omega) \in A\}$ est <u>dénombrable</u> pour P^ν-presque toute trajectoire ω.

DÉMONSTRATION. - Il nous suffit évidemment de raisonner dans le cas où A est un ensemble presque analytique effilé en tout point, et même dans le cas d'un ensemble tel que Φ_A^λ soit majorée par une constante $a < 1$ sur A (A étant réunion d'une suite de tels ensembles). Nous allons montrer alors que presque toute trajectoire rencontre A suivant un ensemble <u>discret</u>. Construisons, en effet, par récurrence, la suite des temps d'arrêt $T_0 = 0$, $T_1 = T_A$,

$$T_2 = T_A(\theta_{T_A}) \dots T_n = T_A(\theta_{T_{n-1}}) \quad .$$

Si l'ensemble des instants où la trajectoire ω rencontre A n'est pas discret, les $T_n(\omega)$ restent bornés, et $\sum_n \exp(-\lambda T_n(\omega)) = +\infty$: il nous suffit donc de montrer que l'espérance mathématique de cette somme est finie. Or, la propriété de Markov forte montre immédiatement que cette espérance mathématique est égale à la somme de la série :

$$1 + P_A^\lambda 1 + P_A^\lambda P_A^\lambda 1 + \dots$$

La fonction Φ_A^λ est majorée par a sur $\bar{A} = A$. Il en résulte que cette série converge plus vite que la série géométrique de raison a, et le théorème est démontré.

THÉORÈME 4.2. - Soit g une fonction λ-surmédiane, et $\underline{g}$ la limite de $P_t g$, lorsque $t \to 0$. La fonction $\underline{g}$ est λ-excessive, majorée par g, égale à g presque partout. On l'appelle la <u>régularisée</u> de g. En tout point x, on a aussi la relation $\underline{g}(x) = \liminf_{y \to x} \text{fine}\ g(y)$, si g est presque borélienne.

DÉMONSTRATION. - Raisonnons pour simplifier en supposant que $\lambda = 0$. Comme $P_s P_t g \leq P_s g$, la fonction $s \to P_s g$ est décroissante. Elle admet donc, lorsque $t \to 0$, une limite $\underline{g} \leq g$. Il est immédiat que l'on a aussi $\underline{g} = \sup_{\lambda \to \infty} \lambda U^\lambda g$. Or les fonctions $\lambda U^\lambda g$ sont excessives, car surmédianes et finement continues.

Leur limite $\underline{g}$, qui est aussi leur sup , l'est donc aussi. D'autre part, on a $U^\lambda(\underline{g}) = U^\lambda(\sup_t P_t\, g) = \sup_t P_t\, U^\lambda g = U^\lambda g$, il en résulte bien que $g = \underline{g}$ presque partout - au moins si g est finie, mais on peut en déduire le cas général par passage à la limite. Enfin, si $x \in X$, comme $\underline{g} \leq g$, on a

$$\liminf_{y \to x} \text{fine}\ g(y) \leq \liminf_{y \to x} \text{fine}\ g(y) \quad .$$

Le premier membre est égal à $\underline{g}(x)$, puisque $\underline{g}$ est finement continue ; le second membre, d'autre part, est majoré par $\underline{g}(x)$, car l'ensemble où $g \neq \underline{g}$, étant de potentiel nul, rencontre presque toute trajectoire issue de x suivant un ensemble de mesure nulle, donc suivant un ensemble dont le complémentaire est partout dense : la quantité $\liminf_{t \to 0} g \circ X_t(\omega)$ minore donc $g(x)$, et il suffit d'utiliser le théorème 3.4.

B. Le théorème de Doob.

Voici maintenant la version très générale du "théorème fondamental de convergence de CARTAN-BRELOT", que l'on doit à DOOB.

THÉORÈME 4.3. - Soit une suite décroissante de fonctions λ-excessives g_n , et soit g la limite de cette suite, qui est une fonction λ-surmédiane. L'ensemble des points où g diffère de sa régularisée $\underline{g}$ est semi-polaire.

DÉMONSTRATION. - Nous supposerons λ nul, pour simplifier les notations. En remplaçant au besoin les g_n par $\inf[g_n , a]$, où a est une constante, on peut aussi se ramener au cas où les g_n sont bornées. La fonction g est évidemment presque borélienne, et nous avons vu que :

$$\underline{g}(x) = \liminf_{y \to x} \text{fine}\ g(x) \quad .$$

D'autre part, le processus $\{g \circ X_t\}$ est une supermartingale (non séparable). Si ω désigne une trajectoire, t un instant, si r_1 et r_2 sont des nombres rationnels tels que $r_1 < r_2$, le nombre des passages descendants de la fonction $g \circ X_s(\omega)$ sur l'intervalle r_1 , r_2 vérifie l'inégalité de Doob :

$$E^x[\underline{N}(g , \omega, r_1 , r_2)] \leq g(x)/r_2 - r_1$$

car il est clair que l'on a

$$N[g , \omega, r_1 , r_2] \leq \limsup_n \underline{N}[g_n , \omega, r_1 , r_2] \quad .$$

Il suffit alors d'écrire l'inégalité de Doob pour les supermartingales séparables $\{g_n \circ X_t\}$.

Mais l'inégalité de Doob implique l'impossibilité (sauf peut-être sur un ensemble de trajectoires P^x-négligeable) d'un comportement oscillatoire du processus $\{g \circ X_t(\omega)\}$; autrement dit :

$$\liminf_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} g \circ X_t(\omega) = \limsup_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} g \circ X_t(\omega) \quad P^x\text{-p. s.}$$

Il en résulte que, si E_ε désigne l'ensemble où g majore $\underline{g} + \varepsilon$, presque aucune trajectoire issue de x ne peut rencontrer E_ε pour des valeurs de $t > 0$ et aussi petites qu'on veut. Autrement dit, E_ε est effilé en tout point, et l'ensemble $\{y : g(y) \neq \underline{g}(y)\}$, qui est la réunion des $E_{1/n}$, est bien semi-polaire.