Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Paul-André Meyer

Définition des processus de Markov et des martingales

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 5 (1960-1961), exp. nº 3, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1960-1961__5__A4_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
5e année, 1960/61, n° 3

DÉFINITION DES PROCESSUS DE MARKOV ET DES MARTINGALES

par Paul-André MEYER

Dans tout cet exposé, l'ensemble d'indices $\mathcal{T}$ est un intervalle de N ou de R_+, admettant 0 pour premier élément.

I. La notion de temps d'arrêt.

A. Processus adapté à une famille de tribus.

DÉFINITION 1. - Soit $(\Omega , F , p , \{X_t\}_{t\in\mathcal{T}})$ un processus stochastique à valeurs dans un espace d'états (X , B). On dit qu'une famille $\{F_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ de sous-tribus de F est adaptée au processus (ou le processus à la famille) si :

1° Pour tout couple (s , t) de points de $\mathcal{T}$, tels que $s \leqslant t$, on a $F_s \subset F_t$.

2° $\forall\ t \in \mathcal{T}$, X_t est une variable aléatoire F_t-mesurable.

Étant donné un processus stochastique, on peut toujours construire une famille de tribus qui lui soit adaptée, il suffit de poser $F_t = B(X_s\ ,\ s \leqslant t)$.

Soit F_t une famille de tribus adaptée à un processus stochastique. Posons $F_{t+} = \bigcap_{s>t} F_s$; la famille de tribus $\{F_{t+}\}_{t\in\mathcal{T}}$ est encore adaptée au processus.

La terminologie suivante nous sera très commode : nous considérerons $\mathcal{T}$ comme un ensemble de "temps", de sorte que nous dirons "soit t un instant" pour signifier "soit $t \in \mathcal{T}$". Nous appellerons alors F_t la tribu des évènements <u>antérieurs</u> au temps t et nous appellerons tribu des évènements <u>postérieurs</u> au temps t, la tribu $B(X_s\ ,\ s \geqslant t)$.

B. Définition des temps d'arrêt.

DÉFINITION 2. - Soit $(\Omega , F , p , \{X_t\}_{t\in\mathcal{T}})$ un processus stochastique adapté à une famille de tribus $\{F_t\}_{t\in\mathcal{T}}$. On appelle <u>temps d'arrêt</u> (relatif aux $\{F_t\}_{t\in\mathcal{T}}$) une variable aléatoire sur (Ω , F , p), prenant ses valeurs dans l'ensemble $\mathcal{T} \cup \{\infty\}$, tel que

$$\forall\ t \in \mathcal{T}, \quad \text{l'ensemble } \{\omega : T(\omega) \leqslant t\} \quad \text{appartient à } F_t .$$

On appelle tribu des évènements antérieurs à T, et on note F_T, la tribu des évènements A de F tels que

$$\forall \; t \in \mathcal{T} , \quad \text{l'ensemble } A \cap \{\omega : T(\omega) \leqslant t\} \quad \text{appartient à } F_t \quad .$$

REMARQUES.

1° La fonction constante $T(\omega) = t \in \mathcal{T}$ est un temps d'arrêt.

2° T est F_T-mesurable.

3° Si dans la définition ci-dessus on remplace "$T \leqslant t$" par "$T < t$", on obtient exactement les temps d'arrêt par rapport à la famille $\{F_{t+}\}_{t\in\mathcal{T}}$.

4° Si $\mathcal{T} = N$ ou R_+, et si T est un temps d'arrêt, il en est de même de $T + t$.

5° Si T_1 et T_2 sont des temps d'arrêt, $\inf(T_1 , T_2)$ et $\sup(T_1 , T_2)$ sont des temps d'arrêt.

6° Si T_1 et T_2 sont des temps d'arrêt, et $\forall\, \omega$, $T_1(\omega) < T_2(\omega)$, on a $F_{T_1} \subset F_{T_2}$.

<u>Convention importante</u>. - Nous aurons souvent besoin dans la suite de considérer des variables aléatoires non partout définies sur Ω ; voici comment on les ramène aux variables aléatoires ordinaires : soient ∂ un point qui n'appartient pas à X, et X' l'espace $X \cup \{\partial\}$ muni de la tribu B' engendrée par les ensembles de B, et l'ensemble $\{\partial\}$. Le processus $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ peut être considéré comme prenant ses valeurs dans (X' , B'). Nous lui adjoindrons une variable aléatoire X_∞ telle que $X_\infty(\omega) = \partial \;\; \forall \; \omega$. Lorsque X est un espace LCD, il est très commode de faire de X' un espace compact (à base dénombrable), en considérant ∂ comme le point à l'infini de X (point qui est isolé si X est compact). Il sera toujours convenu qu'une fonction sur X est identifiée à une fonction sur X' nulle au point ∂, et qu'aucune autre fonction sur X' n'est envisagée, sauf mention du contraire, l'expression : "la fonction 1" par exemple, désigne la fonction sur X' égale à 1 sur X, à 0 au point ∂. Le lecteur se persuadera aisément, en lisant la suite, de la commodité de cette convention.

NOTATION. - Soit T un temps d'arrêt. Nous désignerons par la notation $X_T(\omega)$ la fonction sur Ω à valeurs dans X', égale à $X_{T(\omega)}(\omega)$ si $T(\omega) < \infty$, à ∂ si $T(\omega) = \infty$. Si cette fonction est une variable aléatoire, nous appellerons cette fonction "position du processus à l'instant T", et sa répartition "répartition du processus à l'instant T". Si $\mathcal{T} = N$ ou R_+, et si toutes les fonctions $X_{T+t}(\omega)$ $(t \in \mathcal{T})$ sont mesurables, nous appellerons tribu des évènements postérieurs au temps T la tribu engendrée par les $\{X_{T+t}\}_{t\in\mathcal{T}}$.

C. Transformation des processus.

Soient $\mathfrak{J}$ un sous-ensemble de R_+, et $\{T_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$ une famille de temps d'arrêt relatifs aux tribus F_t, telle que, pour tout couple (i, j) de points de $\mathfrak{J}$, avec $i \leqslant j$, on ait $T_i \leqslant T_j$ p. s. Si les $X_{T_i}(\omega)$ sont des variables aléatoires, le processus $\{X_{T_i}\}_{i\in\mathfrak{J}}$ est dit obtenu en transformant le processus X_t au moyen du système de temps d'arrêts T_i. Deux exemples de ces transformations sont particulièrement importants :

1° S est un temps d'arrêt, $\mathfrak{J} = \mathfrak{T}$, $T_i = \inf(S, i)$; le nouveau processus est "obtenu par arrêt du processus X_t à l'instant S ".

2° Les notations étant les mêmes, on pose $T_i(\omega) = i$ si $i < S(\omega)$, $T_i(\omega) = +\infty$ si $i \geqslant S(\omega)$; le nouveau processus est dit "obtenu par destruction du processus X_t à l'instant S "

II. Processus de Markov.

A. Définition des processus de Markov. -

DÉFINITION 1. - Soit $(\Omega, F, p, \{X_t\}_{t\in\mathfrak{T}})$ un processus stochastique à valeurs dans un espace (X, B). On dit que le processus $\{X_t\}$ est de Markov si, pour tout t, les tribus $B(X_s, s \leqslant t)$ et $B(X_s, s \geqslant t)$ sont conditionnellement indépendantes, X_t étant donnée.

Cette propriété s'exprime par des phrases telles que "le passé et le futur sont conditionnellement indépendants, le présent étant donné".

Le théorème 3.2, (exposé 2) permet immédiatement d'énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. - Un processus markovien reste markovien après inversion du sens du temps.

THÉORÈME 2. - Soit F_t la tribu $B(X_s, s \leqslant t)$. Pour que le processus $\{X_t\}$ soit markovien, il faut et il suffit que, pour tout $t \in \mathfrak{T}$ et pour toute variable aléatoire Y intégrable, mesurable sur $B(X_s, s \geqslant t)$ on ait : $E(Y|F_t) = E(Y|X_t)$ p. s.

Le théorème suivant montre en particulier que si un processus possède le caractère markovien, tout processus équivalent le possède aussi.

THÉORÈME 3. - Pour qu'un processus $\{X_t\}$ soit de Markov, il faut et il suffit que, pour tout système fini d'instants croissants t_1, $t_2 \dots t_n$, t, toute partie B-mesurable A de $\mathfrak{X}$, on ait :

$$P(X_t \in A | X_{t_1}, X_{t_2} \dots X_{t_n}) = P(X_t \in A | X_{t_n}) \quad \text{p. s.}$$

DÉMONSTRATION. - D'après la propriété 6° (exposé 2, p. 2), cette relation est vérifiée pour un processus de Markov. Réciproquement, soit H l'espace vectoriel des fonctions bornées $h(\omega)$ sur Ω, mesurables sur la tribu $B(X_s, s \geq t_n)$, telles que :

$$E(h | X_{t_1} \dots X_{t_n}) = E(h | X_{t_n}) \quad \text{p. s.}$$

Il est bien clair que la limite de toute suite croissante, majorée par une constante, de fonctions positives de H appartient à H. H contient aussi bien évidemment les fonctions de la forme $h \circ X_t(\omega)$, où h est B-mesurable bornée sur X, et $t_n \leq t$. Montrons par récurrence qu'il contient les produits finis de telles fonctions. Soient s_1, $s_2 \dots s_k$, des instants croissants postérieurs à t_n, et $h_1 \dots h_k$, des fonctions B-mesurables bornées sur X, nous avons :

$$E(h_1 \circ X_{s_1} \dots h_k \circ X_{s_k} | X_{t_1} \dots X_{t_n})$$
$$= E[E(h_1 \circ X_{s_1} \dots h_k \circ X_{s_k} | X_{t_1} \dots X_{t_n}, X_{s_1} \dots X_{s_{k-1}}) | X_{t_1} \dots X_{t_n}]$$

(propriété 6°, p. 2, exposé 2)

$$= E[h_1 \circ X_{s_1} \dots h_{k-1} \circ X_{s_{k-1}} E(h_k \circ X_{s_k} | X_{t_1} \dots X_{t_n}, X_{s_1} \dots X_{s_{k-1}}) | X_{t_1} \dots X_{t_n}]$$

(propriété 5°).

L'espérance mathématique intérieure est égale à $E(h_k \circ X_{s_k} | X_{s_{k-1}})$ p. s. d'après notre hypothèse. D'après le théorème 4, exposé 1, page 3, cette fonction est de la forme $g \circ X_{s_{k-1}}$, où g est B-mesurable sur X. On est alors ramené au même problème, avec $k - 1$ fonctions au lieu de k.

Appliquons alors le théorème 5, exposé 1, p. 3. H contient toutes les fonctions mesurables par rapport à la tribu $B(X_s, s \geq t_n)$. Il en résulte que, si h est mesurable sur cette tribu, h et $E(h | X_{t_n})$ ont même intégrale sur les ensembles de la forme $\{X_{t_1} \in A_1 \dots X_{t_n} \in A_n\}$ où les A_i appartiennent à B ; comme ces ensembles engendrent F_{t_n}, une nouvelle application du théorème 5, exposé 1 p. 3 permet de conclure.

B. Processus à fonction de transition.

Nous n'aurons besoin dans la suite que de la notion de fonction de transition stationnaire ; cependant, pour la clarté de l'exposé, nous allons donner ci-après la définition générale. $\mathcal{T}$ est supposé égal à R_+ ou à N .

DÉFINITION 2. - Soit (X , B) un espace mesurable. Nous appellerons probabilité de transition (ou fonction de transition) de Markov sur (X , B) , une application $(s , t) , x , A \to P_{s,t}(x , A)$, où (s , t) parcourt l'ensemble des couples (s , t) de points de $\mathcal{T}$ tels que $s \leq t$, x parcourt X , et A parcourt B à valeurs dans R_+ , telle que :

1° Pour tout s t, A, la fonction $x \to P_{s,t}(x , A)$ est B-mesurable.

2° Pour tout s , t , x , la fonction $A \to P_{s,t}(x , A)$ est une loi de probabilité sur (X , B) .

3° Pour tout x , A , et tout triple (s , t , u) tel que $s \leq t \leq u$, on a la relation dite de Chapman-Kolmogorov

$$P_{s,u}(x , A) = \int_X P_{s,t}(x , dy)\, P_{t,u}(y , A) \quad .$$

La fonction de transition est dite stationnaire si l'on a, pour tout (s , t) , la relation $P_{s,t}(x , A) \equiv P_{0,t-s}(x , A)$. On pose alors $P_{0,t}(x , A) = P_t(x , A)$. Nous ne considérerons plus que des fonctions de transition stationnaires et nous omettrons le mot "stationnaire".

NOTATION. - Soit f une fonction sur X , B-mesurable : nous noterons souvent $P_t(x , f)$ l'intégrale $\int_X P_t(x , dy)\, f(y)$, et $P_t f$ l'application $x \to P_t(x , f)$.

Explicitons les axiomes des fonctions de transition stationnaires.

1° Pour tout t , A , l'application $x \to P_t(x , A)$ est B-mesurable.

2° Pour tout x , t , l'application $A \to P_t(x , A)$ est une loi de probabilité sur (X , B).

3° Pour tout x , A t , s on a la relation

$$P_{s+t}(x , A) = \int_X P_s(x , dy)\, P_t(y , A) \quad .$$

REMARQUES.

1° Lorsque dans la condition (2), on exige simplement que la fonction d'ensemble considérée soit complètement additive, positive, de masse inférieure ou égale à 1, on obtient la notion de fonction de transition sous-markovienne. Voici comment on ramène cette notion à celle de fonction de transition ordinaire. Soit (X', B') l'espace construit à la page 2 de cet exposé. Posons, si $x \in X$, $A \in B'$, $A \subset X$:

$$P'_t(x , A) = P_t(x , A)$$

et en outre :

$$P'_t(x , \{\partial\}) = 1 - P_t(x , X) , \quad P'_t(\partial , \{\partial\}) = 1 , \quad P'_t(\partial , X) = 0 .$$

La fonction $P'_t(x , A)$ est alors une fonction de transition de Markov sur (X' , B').

2° Soit G l'espace de Banach des fonctions B-mesurables et bornées (la norme étant celle de la convergence uniforme) : les applications $f \to P_t f$ sont des opérateurs linéaires positifs de norme ≤ 1, sur G, et la condition 3 exprime que ces opérateurs constituent un semi-groupe (en élargissant un peu la définition des semi-groupes, par la suppression de la condition $P_0 = 1$). Supposons que X soit un espace LCD, et soit M l'espace des mesures de Radon bornées sur X. Les espaces G et M sont en dualité, et il est assez facile de voir que la condition 2 exprime la continuité de chaque opérateur P_t pour la topologie faible $\sigma(G , M)$. Nous appellerons semi-groupe de Markov (resp. sous-markovien) un semi-groupe $\{P_t\}$ d'opérateurs linéaires sur G qui est ainsi associé à une fonction de transition de Markov (resp. sous-markovienne). (Cette fonction de transition est alors unique).

3° Lorsque X est un espace LCD, les opérateurs P_t admettent des opérateurs adjoints P_t^* sur M, qui forment un semi-groupe. Si μ est une mesure de Radon bornée, la valeur de la mesure $P_t^* \mu$ sur une fonction f de G est $\int_X P_t(x , f)\, d\mu(x)$. En calcul des probabilités, il est commode d'utiliser la notation μP_t au lieu de $P_t^* \mu$, on a alors la relation

$$\langle \mu P_t , f\rangle = \langle \mu , P_t f\rangle$$

où $\langle \, , \rangle$ est la forme bilinéaire canonique sur $M \times G$.

DÉFINITION 3. - Soit $(\Omega , F , p , \{X_t\}_{t\in\mathcal{T}})$ un processus stochastique, à valeurs dans (X , B) adapté à une famille de tribus $\{F_t\}_{t\in\mathcal{T}}$. On dit que le processus $\{X_t\}$ est un processus de Markov par rapport aux $\{F_t\}$, admet $P_t(x , A)$ comme fonction de transition, et admet ν comme répartition initiale, si :

1° ν est une loi de probabilité sur (X , B), et la répartition de X_0 est la loi νP_0.

2° $P_t(x , A)$ est une fonction de transition sur (X , B) , et l'on a, pour tout $A \in B$, et pour couple (s , t) de temps tels que $s \leq t$,

$$P[X_t \in A | F_s] = P_{t-s}[X_s(\omega) , A] \ .$$

REMARQUES.

1° Il est clair que cette relation implique bien que le processus $\{X_t\}$ est de Markov au sens de la définition 1.

2° Nous ne considérerons ici que des fonctions de transition pour lesquelles l'opérateur P_0 est l'identité, les autres sont très intéressantes, et se rencontrent souvent dans la pratique, mais leur étude complique les notations et ne présente aucune difficulté nouvelle, il suffit de ne considérer que des mesures initiales de la forme νP_0 .

3° Lorsqu'on utilise l'expression "processus de Markov admettant $P_t(x , A)$ comme fonction de transition", sans spécifier la famille de tribus, il est toujours sous-entendu que $F_t = B(X_s , s \leq t)$.

4° Soient $P_t(x , A)$ une fonction de transition sous-markovienne sur (X , B) ; $P'_t(x , A)$ la fonction de transition markovienne sur $(X' B')$ associée à $\{P_t\}$, construite ci-dessus. Un processus de Markov, admettant $\{P_t\}$ comme fonction de transition, et dont la mesure initiale est concentrée sur X , est encore appelé "processus admettant $\{P_t\}$ comme fonction de transition".

Le théorème suivant est fondamental pour toute la suite.

THÉORÈME 4. - Soient X un espace compact métrisable, B sa tribu borélienne, et $P_t(x , A)$ une fonction de transition de Markov sur (X , B) . Soit ν une loi de Radon sur X . Il existe un processus de Markov (et un seul à une équivalence près) admettant $P_t(x , A)$ comme fonction de transition et ν comme répartition initiale.

DÉMONSTRATION. - Nous allons exhiber un processus canonique. Prenons pour (Ω , F) l'espace $(X^{\mathcal{T}} , B^{\mathcal{T}})$. Soient X_t les applications coordonnées. Définissons les répartitions finies par la formule

$$P^{\nu}[X_{t_0} \in A_0 \dots X_{t_n} \in A_n] =$$

$$= \int_{A_0} \nu(dy_0) \int_{A_1} P_{t_1}(y_0 , dy_1) \int_{A_2} P_{t_2-t_1}(y_1 , dy_2) \int \dots \int_{A_n} P_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1} , dy_n)$$

où $t_0 = 0$, $t_1 \dots t_n$ sont des instants croissants de $\mathcal{T}$, et $A_0 \dots A_n$ sont des parties B-mesurables de X . La grande intégrale se lit de droite à gauche.

Il est immédiat que ces répartitions finies forment un système projectif de lois de probabilité. La limite projective P^ν existe donc d'après le théorème 4.1 , exposé 2, p. 5. La vérification du caractère markovien du processus obtenu se fait en utilisant le théorème 3 du présent exposé.

6. Opérateurs de translation.

Les différentes lois P^ν , que nous venons d'associer aux lois initiales ν sont définies sur le même espace (Ω , F) . Si ν est la masse unité ε_x placée au point x , nous noterons P^x la loi P^ν . Nous utiliserons de même les symboles E^ν , E^x , pour des espérances mathématiques.

THÉORÈME 5. - Soit A un évènement de F . La fonction $x \to P^x(A)$ est B-mesurable sur X , et l'on a, pour toute loi initiale ν , la relation

$$P^\nu(A) = \int_X P^x(A)\, d\nu(x) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - La famille H des fonctions $f(\omega)$, F-mesurables, bornées sur Ω telles que $E^\nu[f] = \int_X E^x[f]\, d\nu(x)$ vérifie les hypothèses du théorème 5, exposé 1, page 3.

Désormais, nous considérerons des mesures initiales ν positives quelconques, bornées ou non, la relation ci-dessus étant prise pour définition de la mesure P^ν sur (Ω , F) .

Soit $t \in \mathcal{T}$. On appelle opérateur de translation par t , et on note θ_t , l'application de Ω dans Ω qui associe à la trajectoire ω la trajectoire $\theta_t\, \omega$ définie par la relation $X_s(\theta_t\, \omega) = X_{t+s}(\omega)$; cette application est évidemment mesurable.

Les θ_t opèrent aussi sur les fonctions (si f est une fonction sur Ω , $\theta_t f$ est la fonction $f \circ \theta_t$) et en particulier sur les ensembles de F , identifiés à leur fonction caractéristique. Ainsi, le translaté de l'ensemble cylindrique $\{X_{s_1} \in A_1 \dots X_{s_n} \in A_n\}$ est l'ensemble $\{X_{t+s_1} \in A_1 \dots X_{t+s_n} \in A_n\}$. On a alors le résultat suivant, qui exprime de manière très commode la propriété de Markov :

THÉORÈME o. - Soient $\varphi(\omega)$ une fonction bornée, F-mesurable, et $\Phi(x)$ la fonction $x \to E^x[\varphi]$ sur X ; on a la relation :

$$E^\nu[\varphi \circ \theta_t \mid F_t] = \Phi \circ X_t(\omega)$$

P^ν-presque sûrement, quelle que soit la mesure initiale ν.

DÉMONSTRATION. - L'espace vectoriel H des fonctions bornées et F-mesurables, qui satisfont à cette relation, vérifie les hypothèses du théorème 5 (exposé n° 1, p. 3).

D. Exemples de fonctions de transition.

Nous allons déterminer certaines probabilités de transition importantes. Les calculs que nous ferons dans le cas où $X = R$, s'étendent bien à R^n.

Nous dirons qu'une fonction de transition sur R est invariante par translation si la relation $P_t(x , A) = P_t(0 , A - x)$ est vérifiée identiquement. Notons π_t la mesure $P_t(0 , dx)$. Il est immédiat que, pour toute fonction borélienne bornée f sur R, on a $P_t(x , f) = \int_R f(x + y)\, d\pi_t(y)$; autrement dit, si l'on désigne par $\circ$ l'opérateur de symétrie par rapport à 0, on a $P_t\, f = f * \pi_t^\circ$. De même, si la répartition de X_t pour un processus admettant $\{P_t\}$ comme semi-groupe de transition est μ_t, on a la relation $\mu_{t+s} = \mu_t * \pi_s$. L'équation de Chapman-Kolmogorov devient donc simplement l'équation de convolution $\pi_s * \pi_t = \pi_{s+t}$. Cette relation a une importante signification probabiliste, elle exprime que, si $t_1 \dots t_n$ sont des temps croissants, les accroissements $X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$ sont indépendants.

EXEMPLE. - On appelle fonction de transition du mouvement brownien la fonction de transition invariante par translation définie par la relation (où σ^2 est une constante prise en général égale à 2)

$$\pi_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\, t}} \exp(- y^2/2\sigma^2\, t)\, dy$$

où dy est la mesure de Lebesgue.

On définit de même le mouvement brownien à n dimensions, où

$$\pi_t = (1/2\pi\sigma^2\, t)^{n/2} \exp(- \|y\|^2/2\sigma^2\, t)\, dy \quad .$$

On a le théorème de représentation général, qui donne la forme de tous ces semi-groupes de convolution.

THÉORÈME de Khintchine-Lévy. - Soit μ une loi de probabilité sur R . Pour qu'il existe un semi-groupe de convolution $\{\pi_t\}$ tel que $\pi_1 = \mu$, il faut et il suffit que le logarithme de la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ existe, et soit de la forme

$$\log \hat{\mu}(u) = iau - \frac{\sigma^2}{2} u^2 + \int_R \left((\exp iux) - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\, dM(x)$$

où a , σ sont des constantes, et M une mesure positive bornée ne comportant pas de masses à l'origine. Une telle représentation est unique.

III. Martingales et semi-martingales

A. DÉFINITION. - Soit $(\Omega , F , p ,\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}})$ un processus stochastique à valeurs dans **R** , adapté à une famille de tribus $\{F_t\}_{t\in\mathcal{T}}$. On dit que le processus $\{X_t\}$ est une martingale (resp. super-martingale, sous-martingale) relativement aux tribus F_t si :

1° Les variables aléatoires sont intégrables.

2° On a, pour tout couple (s , t) d'instants tels que $s \leq t$, la relation

$$E[X_t|F_s] = X_s \quad (\text{resp.} \ \leq X_s , \geq X_s) \quad \text{p. s.}$$

Lorsqu'aucune famille de tribus n'est mentionnée, il est sous-entendu que $F_t = B(X_s , \ s \leq t)$.

REMARQUES.

1° Dans ce dernier cas, il est clair que la condition ci-dessus est équivalente à la suivante : pour tout système d'instants croissants $t_1 \dots t_n , t$, on a $E[X_t|X_{t_1} \dots X_{t_n}] = X_{t_n}$ (resp. $\leq , \geq$). Si un processus est une martingale, tout processus équivalent l'est aussi.

2° La restriction d'intégrabilité est un peu gênante. Il est clair que la relation fondamentale ci-dessus garde son sens lorsque les X_t sont, par exemple, positives ; nous parlerons alors de martingales (super-, sous-) généralisées.

Propriétés évidentes des martingales et semi-martingales.

a. Soient $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$ deux super-martingales par rapport à une même famille de tribus $\{F_t\}$, sur un même espace. Les processus $\{aX_t + bY_t\}$ (a , b , constantes positives), $\{\inf(X_t , Y_t)\}$, sont des super-martingales par rapport aux F_t .

b. Soient $\{X_t\}$ une martingale, g une fonction convexe sur R. Si les variables aléatoires $g \circ X_t$ sont intégrables, le processus $\{g \circ X_t\}$ est une sous-martingale.

Exemples de martingales.

1° Soit (Ω , F , p) un espace muni d'une loi de probabilité, et soient $\{F_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ des sous-tribus de F, qui croissent avec t. Soit X une variable aléatoire intégrable sur Ω. Le processus $X_t = E[X|F_t]$ est une martingale relativement aux F_t.

2° Soient X_n des variables aléatoires intégrables, d'espérance mathématique nulle, et indépendantes (ou plus généralement telles que $E[X_{n+1}|X_1, \dots X_n] = 0)$. Soit S_n la somme $X_1 + \dots + X_n$. Le processus S_n est une martingale.

3° Le mouvement brownien linéaire issu de l'origine (et plus généralement tout processus à accroissements indépendants, dont les variables aléatoires sont intégrables et ont une espérance mathématique nulle) est une martingale.

Deux exemples fondamentaux.

THÉORÈME 1. - Soit $(\Omega , F , p^\nu , \{X_t\}_{t\in\mathcal{T}})$ ($\mathcal{T} = R_+$ ou N), un processus à valeurs dans (X , B), markovien par rapport à une famille de tribus $\{F_t\}$ admettant ν comme mesure initiale, $P_t(x , A)$ comme probabilité de transition. Soit f une fonction positive B-mesurable sur X. Pour que le processus $\{e^{-\lambda t} f \circ X_t\}$ (où λ est une constante positive ou nulle), soit une super-martingale généralisée par rapport aux F_t, pour toute mesure initiale ν, il faut et il suffit que l'on ait pour tout t $e^{-\lambda t} P_t f \leqslant f$.

Démonstration facile. Une telle fonction f est dite λ-surmédiane.

THÉORÈME 2. - Soient $(\Omega , F , p , \{X_t\}_{t\in\mathcal{T}})$ un processus stochastique, $\{F_t\}$ une famille adaptée de tribus. Pour que le processus $\{X_t\}$ soit markovien par rapport aux F_t, et admette $P_t(x , A)$ comme probabilité de transition, il faut et il suffit que, pour toute fonction mesurable bornée f (ou si E est un espace LCD, pour toute fonction continue à support compact), le processus

$$\{Y_s(\omega)\} = \{ P_{t-s}[X_s(\omega) , f] \} \qquad (0 \leqslant s \leqslant t)$$

soit une martingale par rapport aux $\{F_s\}$.