Gabriel Mokobodzki

Quelques propriétés des fonctions numériques convexes (s. c. i. ou s. c. s.) sur un ensemble convexe compact

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, nº 2 (1961-1962), exp. nº 9, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_2_A4_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
6e année, 1962, n° 9

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS NUMÉRIQUES CONVEXES (s. c. i. ou s. c. s.) SUR UN ENSEMBLE CONVEXE COMPACT

par Gabriel MOKOBODZKI

Notations. - Soient E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$ localement convexe séparé, X un convexe compact de E. On désignera par E' l'espace produit $E \times \mathbb{R}$.

PROPOSITION 1. - *Soit φ une fonction numérique $\geqslant 0$ sur X, semi-continue inférieurement et convexe.*

Alors φ est enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines continues sur X.

Démonstration. - Soit Γ l'ensemble des couples (x , y) de $X \times \mathbb{R}$ tels que $y \geqslant \varphi(x)$. Alors Γ est convexe et fermé. Il est donc l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

En particulier si $x \in X$, $(x , y) \notin \Gamma$, un hyperplan fermé, qui sépare strictement (x , y) et Γ, définit une fonction affine continue sur X, f telle que

$$f \leqslant \varphi \quad \text{et} \quad y < f(x) \quad .$$

PROPOSITION 2. - *Soit φ une fonction numérique semi-continue supérieurement, convexe sur X.*

Alors φ est enveloppe inférieure d'une famille filtrante décroissante de fonctions convexes continues majorant strictement φ.

Démonstration. - La démonstration va résulter des deux lemmes suivants.

LEMME 1. - *L'enveloppe convexe d'une famille finie d'ensembles convexes compacts de E' est encore compacte* (voir BOURBAKI).

LEMME 2. - *Soient f_1, f_2 s. c. i. convexes bornées supérieurement sur X, majorant strictement φ.*

Il existe alors une fonction f_3 s. c. i. convexe sur X telle que

$$\varphi < f_3 \leqslant \inf(f_1\ ,\ f_2) \quad .$$

Soit

$$\lambda > \sup(f_1\ ,\ f_2\ ,\ \varphi) + \varepsilon\ ,\ \text{avec}\quad \varepsilon > 0 \quad .$$

On considère les convexes compacts $\Gamma_1\ ,\ \Gamma_2\ ,\ \Gamma$ de $X \times \underset{\sim}{R}$ définis respectivement par

$$\Gamma = \{\,(x\ ,\ y)\ ;\ \ x \in X\ ;\ \ y \in \underset{\sim}{R}\ ;\ \ \lambda \geqslant y > \varphi(x)\,\}$$

$$\Gamma_i = \{\,(x\ ,\ y)\ ;\ \ x \in X\ ;\ \ y \in \underset{\sim}{R}\ ;\ \ \lambda \geqslant y \geqslant f_i(x)\,\} \qquad i = 1\ ,\ 2\ .$$

Les ensembles $\Gamma_1\ ,\ \Gamma_2\ ,\ \Gamma$ sont convexes et Γ_1 et Γ_2 sont compacts.

Or $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset \Gamma$; si Γ_3 désigne l'enveloppe convexe de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, alors $\Gamma_3 \subset \Gamma$.

Soit alors f_3 sur X définie par

$$f_3(x) = \inf_{(x,y)\in\Gamma_3} y \quad .$$

Il est clair que f_3 est convexe et s. c. i., et que, $\forall\ \ x \in X$,

$$\inf(f_1\ ,\ f_2)(x) \geqslant f_3(x) > \varphi(x) \quad .$$

Ces lemmes étant démontrés, la proposition s'ensuit immédiatement :

Soit $(x\ ,\ y) \in X \times \underset{\sim}{R}$ tel que

$$\lambda \geqslant y > \varphi(x) \quad .$$

Soit $\Gamma_{(x,y)}$ l'enveloppe convexe (donc compacte) de l'ensemble

$$(X \times \{\lambda\}) \cup (x\ ,\ y) \quad .$$

Alors $\Gamma_{(x,y)}$ définit une fonction s. c. i. convexe $f_{(x,y)}$

$$f_{(x,y)}(x') = \inf_{(x',z)\in\Gamma_y} z$$

et il est clair que $\varphi = \inf f_{(x,y)}$.

Soit alors (f_α) une famille de fonctions affines continues sur X telle que

$$f_{(x,y)} = \sup f_\alpha \quad .$$

D'après le lemme de Dini, il existe une sous-famille $(f_1 , f_2 , \ldots , f_n)$ telle que

$$\varphi < \sup(f_1 , \ldots , f_n) \leqslant f_y \quad .$$

En effet il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi + \varepsilon \leqslant f_y$, car f_y est s. c. i. et φ est s. c. s.

COROLLAIRE. - Soit f une fonction affine s. c. s., sur X , alors f est enveloppe inférieure d'une famille filtrante décroissante de fonctions affines continues majorant strictement f .