Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel

PHILIPPE COURRÈGE

Décomposition des martingales de carré intégrable

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 7 (1962-1963), exp. n° 6, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1962-1963__7__A5_0>

29 novembre 1962

DÉCOMPOSITION DES MARTINGALES DE CARRÉ INTÉGRABLE

par Philippe COURRÈGE

Le présent exposé reprend, à titre d'introduction à l'exposé suivant sur les intégrales stochastiques, certains résultats obtenus par P.-A. MEYER comme application de ses théorèmes sur la décomposition des surmartingales (cf. [3] et [4]).

0. Notations et rappels.

La terminologie utilisée sera celle de l'exposé de P.-A. MEYER sur la décomposition des surmartingales (cf. [7], page 11-01). Si E est un ensemble, et A une partie de E, 1_A^E (ou 1_A) désigne l'indicateur de A dans E.

0.1. - On considère un espace probabilisé complet (Ω, F, P), et une famille $(F_t)_{t\in I}$ de sous-tribus de F (I désignant un intervalle de la droite numérique achevée $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$) qui satisfait aux propriétés suivantes :

(T_1) F_t croît avec t.

(T_2) La famille (F_t) est continue à droite : on a

$$\bigcap_{s>t} F_s = F_t \quad \text{pour tout} \quad t \in I \quad .$$

(T_3) Pour tout t, F_t contient les ensembles P-négligeables de F.

Les propriétés étudiées dans la suite font intervenir, sans référence et sauf mention explicite du contraire, un terme $(\Omega, F, P, (F_t)_{t\in I})$ ayant les propriétés précédentes.

0.2. - Un temps d'arrêt T sur I est une application de Ω dans I telle que, pour tout $t \in I$, $\{T \leq t\} \in F_t$ (où $\{T \leq t\}$ désigne l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $T(\omega) \leq t$). On dira qu'un temps d'arrêt T sur I est borné, si $T(\Omega)$ est contenu dans un intervalle compact contenu dans I.

Si T est un temps d'arrêt sur I, la tribu F_T des événements antérieurs à T est constituée par les $A \in F$ tels que $A \cap \{T \leq t\} \in F_t$ pour tout $t \in I$. Si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$, on a : $F_S \subset F_T$.

0.3. - Un processus stochastique défini sur I est une application $\Phi = (\Phi_t)_{t\in I}$ de $I \times \Omega$ dans R, telle que, pour tout $t \in I$, Φ_t est une variable aléatoire.

Si T est un temps d'arrêt sur I et Φ un processus défini sur I, Φ_T désigne la fonction $\omega \to \Phi_{T(\omega)}(\omega)$.

Un processus Φ est <u>mesurable</u>, si l'application $(t, \omega) \to \Phi_t(\omega)$ est mesurable pour la tribu $\mathcal{B}_I \times \Omega$ sur $I \times \Omega$ (où $\mathcal{B}_I$ désigne la tribu borélienne de I).

Si Φ est mesurable, Φ_T est une variable aléatoire pour tout temps d'arrêt T.

Un processus Φ est <u>bien adapté</u> (resp. <u>fortement bien adapté</u>) si Φ_t est F_t-mesurable pour tout $t \in I$ (resp. Φ_T est F_T-mesurable pour tout temps d'arrêt borné T sur I).

Un processus Φ <u>est standard</u> si toutes ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limite à gauche ; pour tout (t, ω) on pose alors

$$\Phi_t^-(\omega) = \lim_{s \uparrow t} \Phi_t(\omega) \quad .$$

Tout processus standard est mesurable.

Un processus Φ est <u>intégrable</u> (resp. de carré <u>intégrable</u>) si $\Phi_t \in \mathcal{L}^1(\Omega, F, P)$ (resp. $\Phi_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, F, P)$) pour tout $t \in I$.

0.4. - Si Φ et Ψ sont deux processus définis sur I ; on dit que Φ est une version (ou une modification) de Ψ si, pour tout $t \in I$, $\Phi_t = \Psi_t$ p. s.

Si Φ est une modification de Ψ, Φ et Ψ sont équivalents (au sens classique, cf. [6], page 2-04). " Φ est une version de Ψ " est une relation d'équivalence ; une classe d'équivalence relative à cette relation peut être identifiée à une famille $S = (S_t)_{t \in I}$ de classes de variables aléatoires équivalentes (pour la mesure P) ; par abus de langage on appellera aussi processus stochastique une telle classe ; si le processus Φ appartient à la classe S (c'est-à-dire $\Phi_t \in S_t$, $\forall\ t \in I$), on dira aussi que Φ est <u>une version</u> de la classe S.

0.5. - Une <u>martingale</u>, définie sur I, est un processus $(X_t)_{t \in I} = X$ bien adapté, intégrable et tel que $E\{X_t | F_s\} = X_s$ p. s. pour tout $s \leq t$. Toute martingale admet une <u>version standard</u> (cf. appendice 1).

0.6. - $A = (A_t)_{t \in I}$ est un <u>processus croissant sur</u> I si pour tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire $t \to A_t(\omega)$ est une fonction croissante et continue à droite.

0.7. - Si $A = (A_t)_{t \in [a, b[}$ est un processus croissant défini sur $[a, b[$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, et si $\Phi = (\Phi_t)_{t \in [a,b[}$ est un processus mesurable, par exemple ≥ 0 ou borné, on désignera par

$$\int_a^b \Phi_t \, dA_t \quad (\text{resp. } \int_u^v \Phi_t \, dA_t \text{, où } a \leqslant u < v < b)$$

la variable aléatoire, obtenue, pour chaque $\omega \in \Omega$, en intégrant la fonction $t \to \Phi_t(\omega)$ (resp. la fonction $t \to 1_{]u,v]}(t)\ \Phi_t(\omega)$) par rapport à la mesure $\geqslant 0$ sur $[a, b[$ associée à la fonction croissante et continue à droite $t \to A_t(\omega)$.

1. Le processus croissant naturel associé à une martingale de carré intégrable.

1.1. - Premier exemple : le mouvement brownien (cf. [1], p. 97). - Soit $(\xi_t)_{t \in R}$ un mouvement brownien défini sur R . Pour tout $t \in R_+$, soient $X_t = \xi_t - \xi_0$, et F_t la plus petite tribu sur Ω contenant les ensembles négligeables, et rendant mesurables les variables aléatoires ξ_s ; $(s \leqslant t)$ (1). $(X_t)_{t \in R_+}$ est une martingale de carré sommable, satisfaisant la relation suivante :

Pour tout $s \leqslant t$, $E\{(X_t - X_s)^2 | F_s\} = t - s$ p. s.

Cette relation peut aussi s'écrire :

$$E\{(X_t - X_s)^2 | F_s\} = E\{A_t - A_s | F_s\}$$

où $(A_t)_{t \in R_+}$ est le processus croissant intégrable défini par : $A_t(\omega) = t$, $\forall\ t \in R_+$, $\forall\ \omega \in \Omega$.

Par ailleurs, si $(Y_u)_{u \in R_+}$ est une martingale standard bornée sur R_+ , on a

$$E\{\int_0^t (Y_u - Y_u^-)\, du\} = 0 \quad \text{pour tout } t \in R_+$$

(on verra ci-dessous, en 1.3, l'utilité de cette propriété).

1.2. - Deuxième exemple : le cas discret ; Position du problème. - Soient $(F_n)_{n \in N}$ une suite croissante de sous-tribus de F contenant les ensembles P-négligeables, et $(X_n)_{n \in N}$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable telle que $E\{X_{n+1} | F_n\} = X_n$ p. s. pour tout $n \in N$. Pour chaque $n \in N$, et t tel que $n \leqslant t < n + 1$, posons $\hat{F}_t = F_n$ et $\hat{X}_t = X_n$. La famille $(F_t)_{t \in R_+}$ de sous-tribus de F possède les propriétés (T_1), (T_2) et (T_3) et le processus

---

(1) On notera que la famille $(F_t)_{t \geqslant 0}$ de sous-tribus de F ainsi construire satisfait aux propriétés (T_1), (T_2), (T_3) introduites en 0.1 ; cf. à ce sujet la remarque en 3.1.

$\hat{X} = (\hat{X}_t)_{t\in R_+}$ est une martingale de carré intégrable, (relativement à cette famille $(\hat{F}_t)$ de tribus).

Etudions d'abord la martingale discrète $(X_n)_{n\in N}$:

Posons $A_0 = 0$, et, pour $n > 1$,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} (E\{X_{k+1}^2 | F_k\} - X_k^2) \quad \text{p. s.}$$

Le processus discret $(A_n)_{n\in N}$ ainsi défini a les propriétés suivantes :

(1) $\forall\ n \quad A_n \leq A_{n+1}$ p. s., $\quad A_n \in \mathcal{L}^1$, A_n est F_n-mesurable.

(2) $\forall\ n \quad E\{X_{n+1}^2 - X_n^2 \mid F_n\} = E\{A_{n+1} - A_n \mid F_n\}$.

(3) Pour toute martingale discrète bornée $(Y_n)_{n\in N}$, on a :

$$\forall\ n \qquad E\{\sum_{k=0}^{n-1} (Y_{k+1} - Y_k)(A_{k+1} - A_k)\} = 0$$

((3) résultant de ce que A_n est F_{n-1} mesurable).

Inversement, si $(B_n)_{n\in N}$ est un processus discret ayant les propriétés (1) (2) (3) ci-dessus, on a nécessairement :

$$\forall\ n \qquad A_n = B_n \quad \text{p. s.}$$

En effet, d'après la propriété de martingale de (Y_n),

$$E\{Y_n A_n\} = E\{\sum_{k=0}^{n-1} Y_{k+1}(A_{k+1} - A_k)\} \qquad .$$

La relation (3) s'écrit donc :

$$\forall\ n \qquad E\{Y_n A_n\} = E\{\sum_{k=0}^{n-1} Y_k(A_{k+1} - A_k\} \qquad .$$

D'où, puisque (A_n) et (B_n) satisfont la relation (2),

$$\forall\ n \qquad E\{Y_n A_n\} = E\{Y_n B_n\} \qquad .$$

D'où le résultat, puisqu'on peut choisir pour Y_n une variable aléatoire F_n-mesurable et borné quelconque.

Ceci étant, posons, pour chaque n et t tel que $n \leq t < n+1$, $\hat{A}_t = A_n$ (après avoir modifié les A_n sur un ensemble négligeable, de manière à ce que, $\forall\ \omega$, $n \to A_n(\omega)$ soit une suite croissante) ; $(\hat{A}_t)_{t\in R_+}$ est un processus croissant intégrable, satisfaisant aux propriétés suivantes :

(D_0) $\hat{A}_0 = 0$ et $\hat{A}_t$ est F_t-mesurable pour tous $t \in R_+$.

(D_1) Pour $s \in t$, $E\{\hat{X}_t^2 - \hat{X}_s^2 \mid \hat{F}_s\} = E\{\hat{A}_t - \hat{A}_s \mid \hat{F}_s\}$.

(D_2') Pour toute martingale $(\hat{Y}_u)_{u\in R_+}$ associée à une martingale discrète bornée, et tout $t \in R_+$,

$$E\{\int_0^t (\hat{Y}_u - \hat{Y}_u^-)\, d\hat{A}_u\} = 0 \quad .$$

Ainsi, à la martingale de carré intégrable $(\hat{X}_t)_{t\in R_+}$, nous avons associé le processus croissant intégrable $(\hat{A}_t)_{t\in R_+}$ vérifiant les deux relations (D_1) et (D_2'), et nous avons montré, qu'à une équivalence près, $(\hat{A}_t)$ est le seul processus croissant (discret) ayant ces propriétés.

Le théorème suivant, démontré par MEYER (cf. [3], page 203, théorème 4) généralise ces résultats au cas d'une martingale de carré intégrable quelconque.

1.3. Le processus croissant naturel associé à une martingale de carré intégrable. - Remarquons d'abord que, si $(X_t)_{a<t<b}$ est une martingale standard définie sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il résulte des théorèmes de convergence des surmartingales (cf. [6], page 406) que $\lim_{t\downarrow a} X_t$ existe p. s. ; et, si $X_a = \lim_{t\downarrow a} X_t$, $(X_t)_{a\leq t<b}$ est une martingale sur $[a, b[$. On ne perd donc pas en généralité en supposant X définie sur $[a, b[$ fermé à gauche.

On a alors le théorème de décomposition :

THÉORÈME 1. - Soit $(X_t)_{a\leq t<b}$ une martingale de carré intégrable définie sur l'intervalle $[a, b[$. Il existe un processus croissant intégrable $A = (A_t)_{a\leq t<b}$, et un seul, à une modification près, tel que :

(D_0) $A_a = 0$ et A_t est F_t-mesurable pour tous $t \in [a, b[$.

(D_1) $\forall \ s \leq t$, $E\{|X_t - X_s|^2 \mid F_s\} = E\{X_t^2 - X_s^2 \mid F_s\} = E\{A_t - A_s \mid F_s\}$.

(D_2) Pour toute martingale standard bornée $(Y_t)_{a\leq t<b}$, et tout $t \in [a, b[$, $E\{\int_a^t (Y_u - Y_u^-)\, dA_u\} = 0$.

Le processus $(A_t)_{t\in[a,b[}$ est appelé processus croissant naturel associé à la martingale $(X_t)_{t\in[a,b[}$.

1.4. Démonstration du théorème 1.

- Unicité de (A_t). - Elle repose sur les deux lemmes suivants qui peuvent être démontrés simplement en approchant (Y_u) et (Y_u^-) par des processus étagés de la forme

$$\sum_i Y_{t_{i+1}} 1_{]t_i, t_{i+1}]}(u) \quad \text{et} \quad \sum_i Y_{t_i} 1_{]t_i, t_{i+1}]}(u) \quad ,$$

et en utilisant la propriété de martingale de (Y_u) :

LEMME 1. - Soient $(A_t)_{a\leq t<b}$ un processus croissant intégrable, et $(Y_t)_{a\leq t<b}$ une martingale standard bornée. Alors, pour tout $t \in [a , b[$,

$$E\{Y_t\, A_t\} - E\{Y_a\, A_a\} = E\{\int_a^t Y_u\, dA_u\} \quad .$$

LEMME 2. - Si $A = (A_t)$ et $B = (B_t)$ sont deux processus croissants intégrables tels que

$$\forall\ s \leq t \qquad E\{A_t - A_s \mid F_s\} = E\{B_t - B_s \mid F_s\} \quad ,$$

alors, pour toute martingale standard bornée $(Y_u)_{a\leq u<b}$, et tout $t \in [a , b[$,

$$E\{\int_a^t Y_u^- \, dA_u\} = E\{\int_a^t Y_u^- \, dB_u\} \quad .$$

Si alors, A et B sont des processus croissants intégrables, vérifiant (D_0), (D_1), (D_2), il résulte des lemmes 1 et 2 que

$$E\{Y_t\, A_t\} = E\{Y_t\, B_t\} \text{ pour tout } t \in [a , b[$$

et toute martingale standard bornée $(Y_t)_{a\leq t<b}$. On en déduit que $A_t = B_t$ p. s., puisque Y_t peut être prise égale à une variable aléatoire bornée F_t-mesurable quelconque, d'où l'unicité.

- <u>Existence de</u> (A_t). - Elle résulte (cf. [3], page 203, théorème 4) du théorème de décomposition d'un potentiel standard de classe (D) (cf. [7], page 11-04, et [3], page 196) :

a. En vertu de l'unicité, il suffit de montrer l'existence sur un intervalle compact $[a , c] \subset [a , b[$.

b. Soit $(\hat{X}_t)_{a\leq t\leq c}$ une version standard (cf. appendice 1) de la martingale $(X_t)_{a\leq t\leq c}$, et $(Z_t)_{a\leq t\leq c}$ une version standard du processus $(E\{\hat{X}_c^{2} \mid F_t\} - \hat{X}_t^2)_{a\leq t\leq c}$. En utilisant la propriété forte de martingale (cf. appendice 2) on vérifie que (Z_t) est un potentiel de classe (D) .

c. Il existe alors un processus croissant intégrable $(A_t)_{a\leq t\leq c}$ tel que, pour tout $t \in [a , c]$,

$$Z_t = E\{A_c \mid F_t\} - A_t \text{ p. s., et } E\{\int_a^t (Y_u - Y_u^-)\, dA_u\} = 0$$

pour toute martingale standard bornée $(Y_u)_{a\leq u<b}$ (cf. [7], page 11-13, théorème 4). On a alors, si $a \leq s \leq t < c$:

$$\begin{aligned} E\{X_t^2 - X_s^2 \mid F_s\} &= E\{\hat{X}_c^{2} - \hat{X}_s^2 \mid F_s\} - E\{E\{\hat{X}_c^{2} - \hat{X}_t^2 \mid F_t\} \mid F_s\} \\ &= Z_s - E\{Z_t \mid F_s\} \\ &= E\{A_c - A_s \mid F_s\} - E\{E\{A_c - A_t \mid F_t\} \mid F_s\} \\ &= E\{A_t - A_s \mid F_s\} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

d. Enfin, la relation $E\{(X_t - X_s)^2 \mid F_s\} = E\{X_t^2 - X_s^2 \mid F_s\}$ résulte de la propriété de martingale de (X_t).

1.6. - Propriété (D_1) forte.

PROPOSITION 1. - Soient $X = (X_t)_{a\leq t<b}$ une martingale standard de carré intégrable, et $A = (A_t)_{a\leq t<b}$ le processus croissant naturel associé. Si S et T sont deux temps d'arrêt bornés sur $[a, b[$ tels que $S \leq T$, on a :

$$(D_1\ F) \qquad E\{|X_T - X_S|^2 \mid F_S\} = E\{X_T^2 - X_S^2 \mid F_S\} = E\{A_T - A_S \mid F_S\} \quad .$$

Il suffit de remarquer que la propriété (D_1) entraîne que le processus $(X_t^2 - A_t)_{t\in[a,b[}$ est une martingale standard, et d'appliquer la propriété forte de martingale (cf. appendice 2).

2. Martingales de carré intégrable quasi continues à gauche.

Nous allons étudier, dans ce paragraphe, les martingales de carré intégrable pour lesquelles le processus croissant naturel a p. s. ses trajectoires continues.

2.1. DÉFINITION 1. - On dit qu'une martingale standard $(X_t)_{a\leq t<b}$ est quasi continue à gauche, si, pour toute suite (T_n) de temps d'arrêt sur $[a, b[$ croissant p. s. vers un temps d'arrêt borné T, on a

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_T \quad \text{p. s.}$$

on a alors le théorème suivant :

2.2. THÉORÈME 2. - Soient $X = (X_t)_{a\leq t<b}$ une martingale standard de carré intégrable. Pour que le processus croissant naturel A associé à X ait ses trajectoires p. s. continues, il faut et il suffit que X soit quasi continue à gauche.

La condition est nécessaire : supposons A continu ; et soit (T_n) une suite de temps d'arrêt croissant vers le temps d'arrêt borné T ; d'après la proposition 1,

$$E\{|X_T - X_{T_n}|^2\} = E\{A_T - A_{T_n}\} \quad ;$$

d'où le résultat, puisque pour toute sous-suite (T_{n_k}) de (T_n),

$$\lim_{k\to\infty} X_{T_{n_k}} = \lim_{n\to\infty} X_{T_n} \quad .$$

Pour montrer que la condition est suffisante, il suffit de montrer que le potentiel $(Z_t)_{a\leq t\leq c}$ $(c < b)$ introduit en 1.4 est régulier, si X est quasi continue à gauche (cf. [7], page 11-09, théorème 3, et [3], page 200, théorème 3). Or, si (T_n) est une suite de temps d'arrêt sur $[a , c]$ croissant vers T, on a, d'après la propriété forte de martingale,

$$E\{Z_T - Z_{T_n}\} = E\{\hat{X}_T^2 - \hat{X}_{T_n}^2\} \quad .$$

D'où le résultat, puisque la sous-martingale discrète positive $(\hat{X}_{T_n}^2)_{n\in N}$ est uniformément intégrable.

COROLLAIRE 1. - Si la martingale X a ses trajectoires presque sûrement continues, il en est de même du processus croissant naturel associé.

2.3. - <u>Cas où la famille</u> (F_t) <u>n'a pas de temps de discontinuité</u>. Rappelons (cf. [7], page 11-16, et [4], § 2, définition 6) qu'un temps d'arrêt T sur $[a , b[$ est <u>appelé temps de discontinuité de la famille</u> $(F_t)_{a\leq t<b}$, s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt croissant vers T telle que $F_T \neq \sigma(\bigcup_n F_{T_n})$ (2)

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 2. - <u>Pour que la famille</u> $(F_t)_{a\leq t<b}$ <u>de sous-tribus de</u> F <u>n'ait pas de temps de discontinuité, il faut et il suffit que toute martingale standard</u> $(X_t)_{a\leq t<b}$ <u>sur</u> $[a , b[$ <u>soit quasi-continue à gauche</u>.

La proposition résulte des deux lemmes suivants :

LEMME 3. - Pour que la famille $(F_t)_{a\leq t<b}$ n'ait pas de temps de discontinuité, il suffit qu'elle n'ait pas de temps de discontinuité borné.

En effet, soit $b_n = b - \frac{1}{n}$, et soit T_k une suite de temps d'arrêt sur $[a , b[$ croissant vers un temps d'arrêt T sur $[a , b[$. On a

$$F_T = \sigma(\bigcup_n F_{T\wedge b_n}) \quad ,$$

car, si $A \in F_T$, $A \cap [T \leq b_n] \in F_{T\wedge b_n}$ pour tout n ; d'où

$$F_T = \sigma(\bigcup_n F_{T\wedge b_n}) = \sigma(\bigcup_n \sigma(F_{T_k\wedge b_n}))$$

---

(2) où $\sigma(\mathcal{A})$ désigne la tribu engendrée par l'ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω.

puisque, $T \wedge b_n$ étant borné, on a $F_{T\wedge b_n} = \sigma(\bigcup_k F_{T_k \wedge b_n})$ par hypothèse ; d'où

$$F_T = \sigma(\bigcup_{n}\bigcup_{k} F_{T_k \wedge b_n}) = \sigma(\bigcup_k F_{T_k}) \quad .$$

C. Q. F. D.

LEMME 4. - Soit (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt sur $[a , c]$ croissant vers T . Pour que $F_T = \sigma(\bigcup_n F_{T_n})$, il faut et il suffit que, pour toute martingale standard $(X_t)_{a\leq t\leq c}$,

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_T \quad \text{p. s.}$$

La condition est nécessaire, car, d'après la propriété forte de martingale, $E\{X_T | F_{T_n}\} = X_{T_n}$ p. s. ; d'où

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = \lim_{n\to\infty} E\{X_T | F_{T_n}\} = E\{X_T | \sigma(\bigcup_n F_{T_n})\} = X_T \quad \text{p. s.}$$

Inversement, supposons que $F_T \neq \sigma(\bigcup_n F_{T_n})$; soit M un élément de F_T n'appartenant pas à $\sigma(\bigcup_n F_{T_n})$, et $(X_t)_{a\leq t\leq c}$ une version standard (appendice 1) de la martingale $(E\{1_M | F_t\})_{a\leq t\leq c}$. D'après la propriété forte de martingale, on a $X_T = 1_M$ p. s. ; on ne peut donc avoir

$$\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_T \quad \text{p. s.}$$

C. Q. F. D.

3. Exemples.

3.1. Processus à accroissements indépendants. - Soit $\xi = (\xi_t)_{a\leq t<b}$ un processus ayant les propriétés suivantes (3) :

(1) ξ est standard, bien adapté et de carré intégrable.

(2) $\forall\ s , t ,\ E\{\xi_t\} = E\{\xi_s\}$.

(3) $\forall\ s \leq t ,\ \xi_t - \xi_s$ est indépendant de F_s .

Alors, si $X_t = \xi_t - \xi_a$, $X = (X_t)_{a\leq t<b}$ est une martingale de carré intégrable, et le processus croissant naturel associé à toutes ses trajectoires identiques à la fonction $t \to E\{X_t^2\}$.

---

(3) On suppose toujours donnée une famille $(F_t)_{t\in[a,b[}$ de sous-tribus de F ayant les propriétés T_1, T_2, T_3 introduites en 0.1.

En effet : d'abord (X_t) est une martingale et on a :

$$E\{(X_t - X_s)^2 | F_s\} = E\{(X_t - X_s)^2\} = E\{X_t^2\} - E\{X_s^2\} \quad \text{si} \quad s \leq t \quad .$$

Soit a la fonction $t \to E\{X_t^2\}$; a est croissante d'après la relation précédente, et continue à droite puisque (X_t^2) est une sous-martingale standard ≥ 0 (donc uniformément intégrable).

D'autre part, soit (Y_u) une martingale standard bornée ; on a

$$E\{\int_a^t Y_u \, da(u)\} = E\{\int_a^t Y_u^- \, da(u)\} \quad \text{pour tout} \quad t \in [a , b[\quad ,$$

comme on le voit en approchant Y_u et Y_u^- par les processus étagés

$$\sum_i Y_{t_{i+1}} 1_{]t_i, t_{i+1}]}(u) \quad \text{et} \quad \sum_i Y_{t_i} 1_{]t_i, t_{i+1}]}(u)$$

respectivement.

La dernière partie de la démonstration précédente montre que la relation (D_2) (cf. 1.3) est toujours satisfaite par un processus croissant ayant toutes ses trajectoires identiques (cas envisagé par DOOB, cf. [1], page 437).

<u>Cas particuliers</u> :

1° <u>Mouvement brownien</u> (cf. n° 1.1).

2° <u>Processus de Poisson</u>. Soit $(\theta_t)_{t\in R}$ le processus de Poisson (cf. [1], page 98). On a

$$E\{\theta_t - \theta_s\} = t - s \ , \quad \text{et} \quad E\{(\theta_t - \theta_s - (t - s))^2 = t - s \quad ;$$

les conditions (1), (2), (3) sont satisfaites en prenant $\xi_t = \theta_t - t$.

On notera que la martingale ainsi associée au processus de Poisson, et celle associé au mouvement brownien admettent le même processus croissant naturel continu ; pourtant, presque toutes les trajectoires de la première admettent des discontinuités tandis que celles de la deuxième sont continues.

<u>Remarque</u>. - Au début de ce numéro, on a supposé la famille de sous-tribus (F_t) donnée, avec les propriétés (T_1), (T_2), (T_3). Par contre, dans le cas particulier des martingales associées au mouvement brownien et au processus de Poisson, la famille (F_t) est canoniquement construite à partir de ces processus, en prenant pour F_t la plus petite tribu contenant les ensembles P-négligeables de F et rendant mesurables les ξ_s , $s \leq t$. La propriété (T_2) résulte alors du fait que les martingales considérées sont aussi des processus de Markov, et du résultat correspondant pour ces derniers (cf. n° 3.2 ci-après).

3.2. Le cas markovien. – Soient E un espace compact métrisable $\{P_t\}$ un semi-groupe fortement continu et markovien de transformations de $C(E)$, et

$$\xi = \{\Omega\ ,\ F\ ,\ (\xi_t)_{t\in R_+}\ ,\ (P_x)_{x\in E}\ ,\ (\theta_t)_{t\in R_+}\}$$

le processus de Markov stationnaire canonique admettant $\{P_t\}$ comme fonction de transition (cf. [6], page 5-04, et [7], p. 6-06).

Pour toute probabilité μ sur $(E\ ,\ \mathcal{B}_E)$ et tout $t \in R_+$, soit F_t^{μ} la plus petite tribu sur Ω contenant les ensembles P_μ négligeables et rendant mesurables les ξ_s ; $s \leq t$. On peut montrer (cf. [6], p. 5-05, et [4], § 4 , théorème 10) que la famille $(F_t^{\mu})_{t\in R_+}$ satisfait la propriété (T_2) (cf. n° 0.1), et n'a pas de temps de discontinuité.

Soient alors h une fonction de $C(E)$ telle que $P_t\, h = h$ pour tout t ("fonction harmonique"), et X le processus $(h \circ \xi_t)_{t\in R_+}$.

X est une martingale standard de carré intégrable (X est même bornée), et le processus croissant naturel $A = (A_t)_{t\in R_+}$ associé à X est la fonctionnelle additive de classe (U) (cf. [5], p. 58, définition 3.2, et p. 62, théorème 3.4) du processus de Markov ξ associée au potentiel de classe (D) provenant de la décomposition de Riesz de la fonction excessive $-h^2$.

En effet, cette décomposition s'écrit $-h^2 = u + v$, où $u = \lim\limits_{t\to+\infty} - P_t\, h^2$; et on a, pour tout t ,

$$P_t\, u = u \quad \text{et} \quad P_t\, v \leq v\ , \qquad \lim_{t\downarrow 0} P_t\, v = v\ , \quad \text{et} \quad \lim_{t\uparrow+\infty} P_t\, v = 0 \qquad ;$$

ces trois dernières relations axpriment que v est un potentiel ; ce potentiel est en outre de classe (D), puisque borné. $A = (A_t)_{t\in R}$ étant la fonctionnelle additive de classe (U) associée à v , (cf. [5], page 62, théorème 3.4), on a, par définition :

$$v \circ \xi_t = E_\mu\{A_\infty | F_t^{\mu}\} - At \qquad P_\mu \text{ p. s.}$$

d'où

$$E_\mu\{v \circ \xi_s - v \circ \xi_t \mid F_s^{\mu}\} = E_\mu\{A_t - A_s \mid F_s^{\mu}\}\ ,\ \text{si} \quad s \leq t \qquad ;$$

ou encore,

$$(D_1) \qquad E_\mu\{X_t^2 - X_s^2 \mid F_s^{\mu}\} = E_\mu\{A_t - A_s \mid F_s^{\mu}\} \qquad (s \leq t) \qquad ,$$

puisque

$$E_\mu\{u \circ \xi_t \mid F_s^{\mu}\} = P_{t-s}\, u \circ \xi_s = u \circ \xi_s \qquad P_\mu \text{ p. s.}$$

Enfin d'une part le fait que A est de classe (U) entraîne que $A_T = A_T^-$ P_μ p. s. pour tout temps d'arrêt T totalement inaccessible (cf. [4], § 4, théorème 10, (2), et § 2, définition 5) ; d'autre part, cette dernière condition entraîne (D_2) (cf. [4], § 2, théorème 7, et [7], p. 11-19, théorème 6), compte tenu du fait que la famille (F_t^μ) n'a pas de temps de discontinuité.

4. Martingales généralisées.

Les notions introduites dans ce numéro seront utilisées, dans l'exposé suivant de ce séminaire, pour l'étude des intégrales stochastiques.

4.1. - A titre introductif, considérons un mouvement brownien réel $(\xi_t)_{t\in R}$ défini sur E $(\xi_0 = 0)$. Pour chaque $t \in R$, soit F_t la plus petite tribu sur Ω contenant les ensembles P-négligeables et rendant mesurables les variables aléatoires $\xi_u - \xi_v$ où $v \leq u \leq t$. La famille $(F_t)_{t\in R}$ ainsi définie a les propriétés (T_1), (T_2), (T_3) (cf. 0.1), et le processus $(\xi_t)_{t\in R}$ a les propriétés suivantes :

a. Pour tout $t \in R$, $\xi_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, F, P)$.

b. Pour tous $s \leq t$, $\xi_t - \xi_s$ est F_t-mesurable, et

$$E\{\xi_t - \xi_s | F_s\} = 0 .$$

c. Pour tous $s \leq t$,

$$E\{|\xi_t - \xi_s|^2 \mid F_s\} = t - s \quad \text{p. s.}$$

4.2. - Le n° 4.1 introduit la définition suivante :

DÉFINITION 1. - Soit I un intervalle de R ; une <u>martingale généralisée</u> définie sur I est un processus $(X_t)_{t\in I}$ intégrable (cf. 0.3) tel que :

(G) $\forall$ $s \leq t$, $(s, t \in I)$, $X_t - X_s$ est F_t-mesurable et $E\{X_t - X_s \mid F_s\} = 0$.

Si $t_0 \in I$, le processus $(X_t - X_{t_0})_{t\in I, t\geq t_0}$ est une martingale ; en effet on a, si $t_0 \leq s \leq t$,

$$E\{X_t - X_{t_0}|F_s\} = E\{X_t - X_s|F_s\} + E\{X_s - X_{t_0}|F_s\}$$

$$= X_s - X_{t_0} \quad \text{p. s. d'après (G)} .$$

Il en résulte, compte tenu de l'appendice 1, que toute martingale généralisée admet une <u>version standard</u>.

Toute martingale sur I est une martingale généralisée sur I ; mais, ainsi que le montre l'exemple du mouvement brownien sur R (cf. n° 4.1), la réciproque est inexacte si I est ouvert à gauche.

4.3. Décomposition des martingales généralisées de carré intégrable. - Le théorème 1 (n° 1.3) admet la généralisation suivante :

THÉORÈME 3. - Soient $(X_t)_{a<t<b}$ une martingale généralisée de carré intégrable définie sur l'intervalle ouvert $I =]a , b[$, et $t_0 \in]a , b[$. Il existe un processus croissant intégrable $A = (A_t)_{a<t<b}$ et un seul, à une modification près, tel que :

(D_0') $A_{t_0} = 0$ et pour tous $s \leq t$, $(s , t \in]a , b[)$, $A_t - A_s$ est F_t-mesurable.

(D_1') Pour tous $s \leq t$, $(s , t \in]a , b[)$

$$E\{|X_t - X_s|^2 \mid F_s\} = E\{A_t - A_s \mid F_s\} \quad .$$

(D_3') Pour toute martingale standard bornée $(Y_t)_{c\leq t\leq d}$ (où $a < c < d < b$) ,

$$E\{\int_c^d (Y_t - Y_t^-)\, dA_t\} = 0 \quad .$$

Le processus $(A_t)_{a<t<b}$ est appelé processus croissant naturel normalisé en t_0 associé à la martingale généralisée $(X_t)_{a<t<b}$. La démonstration de ce théorème à partir du théorème 1, ainsi que celles des énoncés généralisant la proposition 1 (n° 1.6) et le théorème 2 (n° 2.1) sont laissés au lecteur.

Appendice 1 : Version standard d'une martingale.

THÉORÈME. - Soit $Y = (Y_t)_{t\in I}$ un processus (4) défini sur l'intervalle I tel que :

(1) Y est bien adapté et intégrable.

(2) $\forall\ s \leq t$, $E\{Y_t \mid F_s\} \leq Y_s$.

(3) La fonction $t \to E\{Y_t\}$ est continue à droite en tout point de I .

Alors, Y admet une version standard.

---

(4) Conformément à la convention générale (cf. 0.1), la famille (F_t) a les propriétés (T_1), (T_2), (T_3).

COROLLAIRE. - Toute martingale admet une version standard.

Appendice 2 : La propriété forte de martingale (5).

THÉORÈME. - Soit $X = (X_t)_{a \leq t \leq b}$ une martingale standard définie sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

(1) Si T est un temps d'arrêt sur $[a, b]$, X_T est F_T-mesurable et intégrable.

(2) Si S et T sont des temps d'arrêt sur $[a, b]$ tels que $S \leq T$, on a $E\{X_T \mid F_S\} = X_S$ p. s.

(3) Si, de plus, X est de carré intégrable, alors X_T est de carré intégrable pour tout temps d'arrêt T.

COROLLAIRE. - Si X est une martingale standard sur l'intervalle fermé $[a, b]$, l'ensemble des X_T, où T décrit l'ensemble des temps d'arrêt sur $[a, b]$, est uniformément intégrable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DOOB (J. L.). - Stochastic processes. - New York, J. Wiley and Sons, 1953 (Wiley Publications in Statistics).

[2] ITO (Kiyoshi). - Lectures on stochastic processes. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1961 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 24).

[3] MEYER (Paul-André). - A decomposition theorem for supermartingales, Illinois J. of Math., t. 6, 1962, p. 193-205.

[4] MEYER (Paul-André). - A decomposition theorem for supermartingales, II : Uniqueness theorem, Illinois J. of Math. (à paraître).

[5] MEYER (Paul-André). - Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 125-230 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[6] Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 5, 1960/61. - Paris, Secrétariat mathématique, 1961.

[7] Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 6, 1962. - Paris, Secrétariat mathématique, 1962.

---

(5) cf. [6], page 4-08.