Antoine Delzant

Fonctions harmoniques sur un groupe semi-simple II. Les fonctions harmoniques

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 7 (1962-1963), exp. nº 11, p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1962-1963__7__A9_0>

28 février 1963

FONCTIONS HARMONIQUES SUR UN GROUPE SEMI-SIMPLE
(d'après H. FÜRSTENBERG [5])
II. LES FONCTIONS HARMONIQUES

par Antoine DELZANT

1. Introduction.

Comme dans l'exposé précédent G désigne un groupe semi-simple connexe avec un centre fini ; K désignera un compact maximal de G, et $G = K.S$. On note $D = G/K$ le riemanien symétrique associé à G, et $B(G) = G/H(G)$ une frontière maximale de G (on rappelle qu'on peut choisir $H(G) = N(S)$ le normalisateur de S).

Soit μ une mesure positive sur G et de masse $+1$. On se propose de résoudre l'équation de convolution

(II.1.1) $$f(g) = \int_G f(gg')\, d\mu(g') \qquad (g , g' \in G)$$

et de trouver une représentation intégrale pour les solutions de cette équation. En fait on résoudra ce problème dans le cas particulier suivant :

- La mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Haar.
- On cherche les solutions bornées de (II.1.1).

Il va de soi qu'on voudrait bien pouvoir se séparer de ces hypothèses restrictives.

Posons :

$$\Lambda_\mu(\varphi)(g) = \int_G \varphi(gg')\, d\mu(g') \qquad (\varphi \in L^1(G)) \quad .$$

L'opérateur Λ_μ a quelques propriétés évidentes qu'on va mentionner :

- Si $f \in L^\infty$ alors $\Lambda_\mu(f) \in L^\infty$.
- $\Lambda_\mu(f \star f') = f \star \Lambda_\mu(f')$ $(f \in L^\infty ;\ f' \in L^1)$.

Le principal problème qu'on aura à résoudre sera de donner un critère pour que les solutions de (II.1.1) soient constantes. On va d'abord s'occuper d'un cas particulier.

2. Les fonctions harmoniques.

DÉFINITION 2.1. - On dit qu'une fonction f, définie sur le groupe G, est harmonique si elle vérifie la relation

(II.2.1) $\qquad f(g) = \int_K f(gkx)\, dk \qquad \forall\ x \in G \qquad (g \in G\ ;\ k \in K)$.

Remarquons que cette formule généralise la formule de la moyenne sur l'espace euclidien :

$$f(x) = \int_{\|y\|=Cte} f(x+y)\, d\sigma = \int_{SO(n)} f(x+ky)\, dk \qquad (x\ ,\ y \in \mathbb{R}^n\ ;\ k \in SO(n))$$

(où $d\sigma$ est la mesure superficielle sur la sphère de rayon $\|y\|$, et dk la mesure de Haar du groupe spécial orthogonal). En outre la formule (II.2.1) est bien un cas particulier de la formule (II.1.1) si on prend $\mu = m_K \star \varepsilon_x$ $(x \in G)$.

PROPOSITION 2.2. - Si f est une fonction vérifiant (II.2.1) et la relation

(II.2.2) $\qquad f(kg) = f(g)$,

alors f est constante.

Démonstration. - Comme f vérifie (II.2.2) c'est une fonction invariante à gauche par les translations de K . En appliquant deux fois l'équation fonctionnelle on trouve :

$$f(g) = \int_K f(gk'g')\, dk' = \iint_{K\times K} f(kgk'g')\, dk\, dk' = f(e)$$

ce qui démontre le lemme.

Les fonctions harmoniques, étant invariantes par les translations à droite par K , sont en fait des fonctions définies sur $D = G/K$. Réciproquement soit f une fonction numérique définie sur G/K . On dira que f est une fonction harmonique si la fonction $\tilde{f}(g) = f(gx_0)$ est harmonique (x_0 est le point marqué de D).

THÉORÈME 2.3. - Soit m l'unique mesure de probabilité K-invariante sur $B(G)$. Si f est une fonction harmonique bornée sur G , il existe une, et une seule, fonction $\hat{f}$ sur $B(G)$ - appelée donnée-frontière de f - telle que

$$f(g) = \int_{B(G)} \hat{f}(gx)\, dm(x) \qquad (g \in G\ ;\ x \in B(G)) .$$

De plus si $\hat{h}$ est une fonction mesurable et bornée sur $B(G)$, la formule précédente définit une fonction harmonique sur G .

Démonstration.

Existence : Soit Q_f l'ensemble des fonctions $\psi \in L^\infty(G)$ qui vérifient les conditions suivantes :

1° $\|\psi\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.

2° $f(g) = \int_K \psi(gkg')\, dk \quad (g' \in G)$.

L'ensemble Q_f est non vide car $f \in Q_f$. C'est un ensemble convexe, et fermé pour la topologie faible de $L^\infty(G)$. Comme Q_f est borné, il est faiblement compact, et G opère sur Q_f par les translations à droite : $g\psi(g') = \psi(g'g)$. En particulier le sous-groupe $H(G)$ opère dans Q_f, et il existe donc une fonction $\psi \in Q_f$ stable par $H(G)$, donc définie sur $G/H(G)$. Posons $\hat{f}(gH(G)) = \psi(g)$. On a alors l'équation suivante :

$$f(g) = \int_K \hat{f}(gkg'H(G))\, dk = \int_K \hat{f}(gkx)\, dk = g\circ m_K\circ x(\hat{f}) \qquad (x \in B(G)) \quad .$$

La mesure $m_K\circ x$ est une mesure sur $B(G)$ invariante par K, elle est donc égale à m. On a donc :

$$f(g) = g\circ m(\hat{f}) = \int_{B(G)} \hat{f}(gx)\, dm(x) \qquad (g \in G\ ;\ \ x \in B(G)) \quad .$$

Réciproquement soit $\hat{h}$ une fonction sur $B(G)$ bornée, et soit $h(g) = g\cdot m(\hat{h})$. La fonction h est une fonction harmonique

$$\int_K h(gkg')\, dk = \int_{B(G)\times K} \hat{h}(gkg'x)\, dm(x)\, dk \quad .$$

La mesure $\int_K k\cdot g'\cdot m\, dk$ est une mesure invariante par K, donc égale à m ; ainsi on a bien :

$$h(g) = \int_K h(gkg')\, dk \quad .$$

<u>Unicité</u> : Soit $\hat{f}$ une fonction sur $B(G)$ telle que la fonction $\int \hat{f}(gx)\, dm(x)$ soit nulle. Supposons d'abord que $\hat{f}$ soit une fonction continue. Dire qu'une suite $g_n\cdot m$ converge faiblement vers une mesure π c'est dire que $g_n\circ m(\varphi)$ converge vers $\pi(\varphi)$ pour toute fonction continue φ. Pour une suite convenable g_n la suite $g_n\cdot m$ converge faiblement vers une mesure ponctuelle, donc $\hat{f}$ est identiquement nulle. Si maintenant $\hat{f}$ est une fonction bornée quelconque considérons la fonction :

$$\hat{f}_1(x) = \int_G \psi(g)\, \hat{f}(gx)\, dg \qquad \psi \in L^1(G) \quad .$$

Alors $\hat{f}_1$ est une fonction continue, et on a

$$g\cdot m(\hat{f}_1) = \int_{B(G)} \hat{f}_1(gx)\, dm(x) = \int_{G\times B(G)} \psi(g')\, \hat{f}(g'gx)\, dg'\, dm(x) = 0 \quad .$$

Donc $\hat{f}_1 = 0$ pour toute ψ dans $L^1(G)$, donc $\hat{f}$ est identiquement nulle.

La formule de Poisson peut être énoncée pour les fonction harmoniques sur D. Identifions D à un ensemble de mesures sur $B(G)$: $gK \in D$ correspond à la mesure $g\circ m$ sur $B(G)$. Soit alors $p \in D$; pour toute fonction harmonique bornée f sur D, on a

$$f(p) = p(\hat{f}) \quad .$$

En particulier si $\hat{f}$ est une fonction continue sur $B(G)$, alors $p(\hat{f})$ est une fonction continue de p pour la topologie vague des mesures : si $p \to \varepsilon_x$ (masse ponctuelle au point x) alors $p(\hat{f}) \to \hat{f}(x)$. Ainsi dans ce cas la fonction $\hat{f}(x)$ peut être regardé comme une partie des valeurs frontières de la fonction $f(p)$: $\hat{f}(x)$ est le prolongement de $f(p)$ à "la frontière distinguée" de D.

PROPOSITION 2.4. - Si f est une fonction harmonique sur $D = G/K$, elle est annulée par tout laplacien sur D, et est analytique.

Rappelons d'abord ce qu'est un laplacien sur D [2] :

Soit f une fonction sur D et Δ un opérateur différentiel sur D. On dit que Δ commute aux opérations de G si

$$\Delta f^g(x) = (\Delta f)^g\,(x) = \Delta f(gx) \qquad (g \in G) \quad .$$

DÉFINITION 2.5. - On dit qu'un opérateur différentiel sur D est un laplacien si les conditions suivantes sont satisfaites :

1° Δ est un opérateur du second ordre elliptique,

2° Δ commute aux opérations de G,

3° $\Delta(1) = 0$.

Soient p_0 l'image de l'élément neutre de G dans D, et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K, et $\mathfrak{p}$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ pour la forme de Killing : $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Soient $(X_1, \dots, X_r)$ une base de $\mathfrak{k}$ et $(Y_1, \dots, Y_s)$ une base de $\mathfrak{p}$. Soit Δ un laplacien sur D : il sera complètement connu si on le connaît à l'origine (à cause de la propriété 2°). On va donc le déterminer au voisinage de p_0. Soient $v = (v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{R}^s$, et $p = \exp(\sum v_j Y_j)\, p_0$. Le point v détermine un système de coordonnées au voisinage de p_0. On a pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$:

$$f(p_0) = Q\left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_s}\right) f(\exp(\textstyle\sum v_j Y_j)\, p_0)\big|_{v=0}$$
$$+ L\left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_s}\right) f(\exp(\textstyle\sum v_j Y_j)\, p_0)\big|_{v=0}$$

où Q est une forme quadratique définie positive et L une forme linéaire. Utilisant la propriété d'invariance par K on a

$$(\Delta f)^k\,(p_0) = \Delta f(kp_0) = \Delta f(p_0) \quad .$$

D'autre part on a $f(kgp_0) = f(kgk^{-1}\, p_0)$. En définitive on trouve :

$$f(p_0) = (Q + L)(\frac{\partial}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_s})\ f(\exp(\Sigma\ v_j\ \mathrm{Ad}\ k\ Y_j)\ p_0)|_{v=0} \quad .$$

Mais $\mathrm{Ad}\ k$ laisse $\mathfrak{p}$ fixe. Soit $\rho(k)$ la matrice de $\mathrm{Ad}\ k$ dans $\mathfrak{p}$ pour la base choisie. On voit alors facilement que

$$(Q + L)(\rho(k)\ x) = (Q + L)(x) \qquad (k \in K\ ;\ \ x \in \mathbb{R}^s) \quad .$$

En particulier L est invariante par K ; donc il existe $Y_0 \in \mathfrak{p}$ stable par K, ce qui peut encore s'écrire $[Y_0, \mathfrak{k}] = 0$: donc $Y_0 \in \mathfrak{k}$, donc est nul. En définitive L est identiquement nul. En ce qui concerne Q la condition écrite implique certaines conditions. Soit $p = gp_0$ un élément de D :

$$\Delta f(p) = Q(\frac{\partial}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_s})\ f(g\ \exp(\Sigma\ v_j\ Y_j)\ p_0)|_{v=0} \quad .$$

Pour tout opérateur différentiel Λ sur G invariant à gauche, on peut faire correspondre un opérateur différentiel $\overline{\Lambda}$ sur D en posant $\overline{\Lambda}f(gp_0) = \Lambda f(gp_0)$. L'application tangente de l'espace tangent à G à l'origine, dans l'espace tangent à D en p_0, est surjective et l'espace tangent en p_0 s'identifie à $\mathfrak{p}$. Soit $\tilde{\Delta}$ un relèvement de Δ qui soit de la forme $Q + R$ où R est une forme quadratique des X_t. Si la fonction f vérifie l'équation $f(gk) = f(g)$, on a $Rf = 0$ et $\tilde{\Delta}f = \Delta f$. L'opérateur $\tilde{\Delta}$ relève donc Δ. Supposons que R vérifie l'équation :

$$R(\mathrm{Ad}\ k\ X_1, \ldots, \mathrm{Ad}\ k\ X_r) = R(X_1, \ldots, X_r) \qquad (k \in K) \quad .$$

Alors l'opérateur $\tilde{\Delta}$ est un opérateur elliptique du second ordre sur G invariant à gauche et qui commute aux translations à droite par K.

$$\tilde{\Delta} \circ R_k = R_k \circ \tilde{\Delta} \qquad (\text{on a posé } R_k\ f(g) = f(gk)) \quad .$$

Démonstration de la proposition 2.4. — Montrons d'abord que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soient $\tilde{f}(g) = f(gp_0)$ (p_0 le point marqué de D) et φ une fonction positive sur G indéfiniment différentiable à support compact et d'intégrale $+1$. On a

$$\int_K \tilde{f} \star \varphi(gkx)\ dk = \int \tilde{f}(gkxy^{-1})\ \varphi(y)\ dk\ dy = f(g) \quad .$$

Soit alors Δ un laplacien sur D, on a

$$\Delta f(p_0) = (\Delta f)^k\ (p_0) = \Delta(f^k)(p_0) = Q(\frac{\partial}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_s}) \int_K f(k\ \Sigma\ v_j\ Y_j\ p_0)\ dk \quad .$$

Mais si f est harmonique sur G, on a

$$\int_K f(kg)\ dk = f(e) \quad .$$

Donc $\Delta f(p_0) = 0$. Si f est harmonique f^g l'est aussi, donc

$$\Delta f^g(p_0) = \Delta f(gp_0) = 0 \quad .$$

Ce qui achève la démonstration.

3. Quelques résultats préliminaires.

Nous supposerons par la suite que D est muni d'une structure riemannienne, stable par G ; quand on parlera de distance entre deux points ce sera toujours relativement à une métrique riemannienne stable par G et notée $d(p_1 , p_2)$. On pose

$$B(p , \varepsilon) = \{x \in D ; \ d(p , x) < \varepsilon\}$$

ε est un nombre réel positif.

LEMME 3.1. - Soit Q un voisinage ouvert de l'identité dans G. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout p dans D, l'ensemble $Q_p = \{gp ; \ g \in Q\}$ contienne $B(p , \varepsilon)$.

Démonstration. - On peut d'abord supposer que $p = p_0$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie de G, et soit Ω un ouvert de $\mathfrak{p}$ contenant l'origine. L'application $\mathfrak{p} \to D$ définie par $x \to \exp(x)\, p_0$ est une application ouverte. Donc la frontière de $\exp \Omega p_0$ est contenue dans l'image de la frontière de Ω. Montrons que $d(p_0 , \exp \Omega p_0) = \inf d(p_0 , q)$ où q parcourt la frontière de $\exp \Omega p_0$ est strictement positif. Ce qui achèvera la démonstration.

Prenons une base de $\mathfrak{g}$ comme dans la démonstration du lemme 8.5 (exposé I). Soit $\varphi : G \to M(n , \mathbb{R})$ $(n = \dim G)$ définie par $\varphi(g) = {}^t\mathrm{Ad}(g)\, \mathrm{Ad}(g)$. On a $\varphi(g) = I$ si et seulement si $g \in k$, et on peut identifier $\varphi(G)$ avec D, ce qu'on fera par la suite. Si $p \in D$, on a $g.p = {}^t\mathrm{Ad}(g)\, p\, \mathrm{Ad}(g)$. Si $x \in \mathfrak{p}$ soient x_i les valeurs propres de $\mathrm{ad}\, x$; et $\|x\| = \sup x_i$. Soient $a > 0$, et Ω_a la boule ouverte de rayon a dans $\mathfrak{p}$, et $F\Omega_a$ la frontière de Ω_a. Comme G est semi-simple, on a $\det(\mathrm{Ad} \exp x) = +1$, donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x) = 0$. Si $x \in F\Omega_a$, la matrice $\mathrm{ad}\, x$ a une valeur propre supérieure ou égale à a/n, donc $u = \exp(\mathrm{ad}\, x)$ a une valeur propre λ supérieure à $e^{a/n}$. Soit Y un vecteur propre de u ; on a : ${}^tY\, {}^tu\, u\, Y = \lambda^2\, {}^tuu$. Mais ${}^tuu$ est une matrice symétrique définie positive, donc sa valeur propre maximum est

$$\sup {}^tZ\, {}^tuu\, Z / {}^tZZ \geqslant \lambda^2 > e^{2a/n} \qquad (Z \in R^n - \{0\}) \quad .$$

Donc toute matrice de $\varphi(F\Omega_a)$ a une valeur propre plus grande que $e^{2a/n}$.

La preuve du lemme est alors la suivante :

Si Q est un voisinage ouvert de l'identité dans G, alors il existe $a > 0$ tel que $Q \supset \exp \Omega_a$, et on a : $Q.p_0 \supset \exp \Omega_a . p_0$. Comme l'application φ est ouverte, la frontière de $\varphi(\Omega_a)$ est contenue dans $\varphi(F\Omega_a)$. Comme toute matrice de ce dernier ensemble à une valeur propre $> e^{2a/n}$, il s'ensuit que toutes les matrices de D ayant une valeur propre plus petite que $e^{2a/n}$ sont contenus dans $\varphi(\Omega_a)$. Il s'en suit que $Q.p_0$ contient un voisinage fixe de p_0, ce qui prouve le lemme.

LEMME 3.2. - Soient Q un ouvert de G, et Q^n l'ensemble des produits de n éléments de Q. Si p_1 et $p_2 \in D$, il existe n, ne dépendant que de $d(p_1 , p_2)$ tel que $Q^n p_1 \cap Q^n p_2 \neq \emptyset$.

<u>Démonstration</u>. - On peut poser $Q = Q_0 . g$ où Q_0 est un voisinage ouvert de l'identité. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Q_0 p$ contienne un ensemble $B(p , \varepsilon)$. Montrons que $Q^n p \supset B(g^n p , n\varepsilon)$. Si $n = 1$, $Qp = Q_0 gp \supset B(gp , \varepsilon)$. Soit $q \in D$, tel que $d(p , q) < n\varepsilon$. Soit L la géodésique joignant q à $g^n p$; il existe $q_1 \in L$ tel que

$$d(g^n p , q_1) < (n - 1) \varepsilon \quad \text{et} \quad d(q , q_1) < \varepsilon \quad .$$

Comme $Q^{n-1} p \supset B(g^{n-1} p , (n - 1) \varepsilon)$, on a

$$gQ^{n-1} p \supset B(g^n p , (n - 1) \varepsilon) \quad ;$$

donc $q_1 \in gQ^{n-1} p$. D'autre part $Q_0 q_1$ contient $B(q_1 , \varepsilon)$, donc

$$q \in B(q_1 , \varepsilon) \subset Q_0 q_1 \subset Q_0 Q^{n-1} p = Q^n p \quad .$$

Si $d(p_1 , p_2) < n\varepsilon$, alors $d(g^n p_1 , g^n p_2) < n\varepsilon$, donc $g^n p_2 \in Q^n p_1$. Comme $g \in Q$, le lemme est démontré.

COROLLAIRE. - Soit Σ un semi-groupe ouvert de G, et soit p_1 et $p_2 \in D$; alors $\Sigma p_1 \cap \Sigma p_2$ est non vide.

COROLLAIRE. - Sous les mêmes hypothèses, $\Sigma^{-1} \Sigma K = G$.

Dire que $g \in \Sigma^{-1} \Sigma K$, c'est dire que $\Sigma g \cap \Sigma K \neq \emptyset$, ce qui est équivalent à dire que $\Sigma g p_0 \cap \Sigma p_0 \neq \emptyset$.

<u>Remarque</u>. - En général $\Sigma^{-1} \Sigma$ n'est pas égal au groupe tout entier. Si $G = SL(2 , R)$ et $\Sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a , b , c , d , > 0)$, pour $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\Sigma g \cap \Sigma = \emptyset$. D'autre part on ne sait pas comment se séparer de l'hypothèse que Σ est ouvert. Et cependant on en aurait besoin pour étendre la théorie aux mesures non absolument continues.

LEMME 3.3. – Soient G un groupe localement compact, μ une mesure de probabilité absolument continue sur G. Alors il existe un ouvert de G où la mesure $\mu \star \mu$ domine un multiple de la mesure de Haar.

Il existe $f \in L^1(G)$ tel que $d\mu(g) = f(g)\, dg$. Posons $F(g) = \int f(gg_1^{-1})\, f(g_1)\, dg_1$. On a $d\mu \star \mu(g) = F(g)\, dg$. Il suffit de montrer que $F(g)$ est strictement positive sur un ouvert de G. Si cette propriété est vérifiée pour f elle est vérifiée pour $f' \geqslant f$. Donc on peut supposer que f est bornée par un nombre M. Alors $F(g)$ est continue :

$$|F(gg') - F(g)| \leqslant \int |f(gg'g_1^{-1})\, f(g_1) - f(gg_1^{-1})\, f(g_1)|\, dg_1$$

$$\leqslant M \int |f(gg'g_1^{-1}) - f(gg_1^{-1})|\, dg_1 \leqslant M \int |f(g'g_2) - f(g_2)|\, dg_2$$

qui tend vers 0 quand g' tend vers e, donc comme F ne peut être identiquement nulle, on a $F(g) > \varepsilon > 0$ sur un ouvert.

Soient M un espace, et ν_1 et ν_2 deux mesures sur M, on peut définir leur inf.

$$\inf(\nu_1\,,\ \nu_2) = \sup_{\substack{\nu \leqslant \nu_1 \\ \nu \leqslant \nu_2}} (\nu)$$

(On dit que $\mu \geqslant \nu$, si $\mu(B) \geqslant \nu(B)$ pour tout borélien $B \subset M$.) Si ν_1 et ν_2 sont deux mesures absolument continues par rapport à une mesure μ on peut définir $\inf(\nu_1\,,\ \nu_2)$ par

$$d(\inf(\nu_1\,,\ \nu_2))/d\mu = \inf(d\nu_1/d\mu\,,\ d\nu_2/d\mu) \quad .$$

Comme on peut prendre $\mu = \nu_1 + \nu_2$, on voit que $\inf(\nu_1\,,\ \nu_2)$ est toujours bien défini. On pose $\|\nu\| = \nu(M)$ pour toute mesure ν sur M.

LEMME 3.4. – Soient μ une mesure de probabilité sur G, absolument continue, et μ^n la puissance n-ième de μ pour la convolution ; alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon > 0$, et n entier positif tels que, si p_1 et p_2 sont tels que $d(p_1\,,\ p_2) < c$, alors $\mu^n.p_1$ et $\mu^n.p_2$ vérifient $\|\inf \mu^n p_1\,,\ \mu^n p_2\| > \varepsilon$.

<u>Démonstration</u>. – D'après le lemme précédent on peut supposer que μ domine un multiple de la mesure de Haar sur un ouvert Q_1. Soit Q_2 un ouvert tel que $\overline{Q_2} \subset Q_1$, $\overline{Q_2}$ étant compact. Alors μ^n domine un multiple de la mesure de Haar sur Q_2^n. Soit π la restriction de la mesure de Haar à Q_2^n. Il suffit de prouver que pour un n, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\|\inf(\pi p_1\,,\ \pi p_2) > \varepsilon$, si $d(p_1\,,\ p_2) < c$. Il existe un entier ℓ tel que $Q_2^\ell\, p_2 \cap Q_2^\ell\, p_1 \neq \emptyset$ si

$d(p_1\ ,\ p_2) < c$. Il existe $g_1\ ,\ g_2 \in Q_2^{\ell}$ tel que $g_1\ p_1 = g_2\ p_2$. Soit π' la restriction de la mesure de Haar à Q_2 ; alors $\pi' g_1$ sera une mesure définie sur $Q_2\ g_1 \subset Q_2^{\ell+1}$, et par l'invariance à droite de la mesure de Haar $\pi' g_1$ sera la restriction de π à $Q_2\ g_1$. Donc $\pi' g_1 \leqslant \pi$. De même $\pi' g_2 \leqslant \pi$. Il s'ensuit que $\pi' g_1\ p_1 \leqslant \pi p_1$ et $\pi' g_2\ p_2 \leqslant \pi p_2$. Donc

$$\pi' g_1\ p_1 = \pi' g_2\ p_2 \leqslant \inf(\pi p_1\ ,\ \pi p_2) \quad .$$

On en déduit

$$\|\inf(\pi p_1\ ,\ \pi p_2)\| \geqslant \|\pi' g_1\ p_1\| = \text{mesure de Haar de } Q_2 \quad .$$

Nous allons utiliser un prodédé de "marche au hasard" sur D . Soient $X_1\ ,\ X_2\ ,\ \ldots\ ,\ X_n$, une suite de V. A. à valeurs dans G , indépendantes et de même répartition μ . Si φ est une fonction μ-intégrable sur G , on a

$$E(\varphi(X_n)) = \int_G \varphi(g)\ d\mu(g) \quad .$$

Pour tout $p \in D$, on définit une marche au hasard sur D en posant

$$W_n(p) = X_n\ X_{n-1} \ldots X_1 \quad .$$

PROPOSITION 3.5. - Le processus W_n est un processus de Markov. Si f est une fonction numérique sur D vérifiant l'équation :

$$f(p) = \int_G f(gp)\ d\mu(g) \tag{II.3.1}$$

alors le processus $f \circ W_n(p)$ est une martingale.

Démonstration. - En effet on vérifie facilement que, pour tout ensemble $A \subset D$ borélien, on a :

$$E(W_{n+1}\ p \in A \mid W_1\ p = x_1\ ;\ W_2\ p = x_2\ ;\ \ldots\ ;\ W_n\ p = x_n)$$
$$= E(W_{n+1}\ p \in A \mid W_n\ p = x_n) \quad .$$

En outre la répartition conditionnelle de $W_{n+1}\ p$ connaissant $W_n\ p$ est la suivante (on pose $W_n\ p = x = g_x . K$) :

$$E(W_{n+1}\ p \in A \mid W_n\ p = x) = E(X_n\ g_x \in AK) = \int_{AK} d(\mu * \varepsilon_{g_x})(g)$$
$$= \int_G \chi_A(gx)\ d\mu(g) = \mu * W_n\ p(\chi_A)$$

(χ_A est la fonction caractéristique de A). Si de plus f vérifie l'équation (II.3.1)

$$E(f \circ W_{n+1}\ p \mid W_n) = \int_{G\times D} f(gy)\ d\mu(g)\ d(W_n\ p)(y) = f(W_n\ p) \quad .$$

Ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 3.6. – Soit f une fonction bornée sur D vérifiant (II.3.1), alors f est une fonction constante.

COROLLAIRE 1. – Soit f une fonction sur G vérifiant les conditions suivantes :

- $f(kg) = f(g) \qquad (k \in K \,, \quad g \in G)$
- $f(g) = \int_G f(gg')\, d\mu(g')$
- f est bornée sur G.

Alors f est constante.

Démonstration. – Comme f vérifie (II.3.1) les $f \circ W_n$ forment une martingale ; comme f est bornée le théorème de convergence des martingales s'applique [8], et $f \circ W_n(p)$ converge pour tout p quand $n \to \infty$ avec la probabilité 1. Posons $\psi(p) = \lim_{n\to\infty} f \circ W_n(p)$. C'est une V. A. de p, et on a $f(p) = E(\psi(p))$.

Donc si on montre que $\psi(p)$ est presque sûrement une constante, on aura gagné. Soient $c > 0$, p_1 et p_2 deux points distincts de D, tels que $d(p_1 \,, p_2) < c$, et soient n et ε définis par c comme dans le lemme précédent ; on a

$$\inf(\mu^n p' \,, \mu^n p'') > \varepsilon > 0 \quad \text{si} \quad d(p'p'') \leq d(p_1 \,, p_2) \qquad .$$

Posons $V_N(p) = E((f \circ W_{n+N}(p) - f \circ W_N(p))^2 \mid W_N(p))$. Comme $f \circ W_n$ est une martingale, $V_N(p)$ tend vers 0 presque sûrement quand N tend vers l'infini. D'autre part $V_N(p)$ est la variance de $f \circ W_{n+N}(p)$ conditionnellement à $f \circ W_N(p)$. Par l'inégalité de Čebičev, si $V_N(p)$, on a

$$\lim_{N\to\infty} P(|f \circ W_{n+N}(p) - f \circ W_N(p)| > \delta) = 0 \qquad .$$

De façon équivalente on peut dire que, pour la mesure μ^n, la mesure de l'ensemble des $g \in G$ pour lesquels $|f(gW_N\, p) - f(W_N(p))| > \delta$ tend vers 0 quand $N \to \infty$. Une autre formulation est la suivante :

$$\lim_{N\to\infty} \mu^n * W_N(p)\, \{p' \in D \mid |f(p') - f(W_N(p))| > \delta\} = 0 \qquad .$$

Appliquons ce résultat successivement pour $p = p_1$ et $p = p_2$: Supposons que pour une infinité (N_α) d'indices N, on ait

$$f \circ W_{N_\alpha}(p_1) - f \circ W_{N_\alpha}(p_2))| > 2\delta \qquad .$$

Alors il n'existe pas de point p' vérifiant pour les N_α à la fois les inégalités suivantes :

$$|f(p') - f \circ W_{N_\alpha}(p_1)| < \delta$$
$$|f(p') - f \circ W_{N_\alpha}(p_2)| < \delta \;.$$

Mais l'ensemble des points pour lesquels l'une et l'autre de ces inégalités n'est pas vérifiée a une mesure pour $\inf(\mu^n W_N(p_1), \mu^n W_N(p_2))$ qui tend vers 0 quand N tend vers l'infini, avec la probabilité 1 .

Il s'ensuit que

$$\lim_N \inf(\mu^n W_N(p_1) , \mu^n W_N(p_2)) = 0 \quad .$$

Cependant

$$d(W_N p_1 , W_N p_2) = d(p_1 p_2) < c \quad ,$$

ce qui contredit le choix de n (cf. lemme 3.4). Par conséquent pour tout $\delta > 0$, on a $|f \circ W_N(p_1) - f \circ W_N(p_2)| < 2\delta$ pour N assez grand. Donc $\psi(p_1) = \psi(p_2)$ presque sûrement, donc $f(p)$ est constante.

COROLLAIRE 2. - Soient μ une mesure sur G ($\mu \in \mathcal{P} - G$)) absolument continue par rapport à la mesure de Haar, et f une fonction numérique bornée sur G. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est harmonique sur G.

(ii) $f(g) = \int_{G\times K} f(gkg')\, dk\, d\mu(g')$.

COROLLAIRE 3. - Soit f une fonction numérique bornée sur D. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est harmonique.

(ii) f est de classe $\underset{\sim}{C}^2$ et annulé par tout laplacien.

(iii) f est de classe $\underset{\sim}{C}^2$ et annulé par un laplacien.

<u>Démonstration</u>. - Soit

$$F_g(g') = \int_K f(gkg')\, dk \quad .$$

Si f vérifie la propriété (ii) du corollaire 2, on a

$$F_g(kg') = F_g(g')$$

$$\int_{G\times K} F_g(g'k'g'')\, dk'\, d\mu(g'')$$
$$= \int_{G\times K\times K} f(gkg'k'g'')\, dk\, dk'\, d\mu(g'') = \int_K f(gkg')\, dk = F_g(g') \quad .$$

Donc F_g est constante, et $F_g(g') = f(g)$. On trouvera dans [6] un résultat analogue.

Pour le corollaire 3 : (i) $\Longrightarrow$ (ii) (proposition 2.4), (ii) $\Longrightarrow$ (iii) trivialement.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Dans [7], HUNT a déterminé les opérateurs qui, sur un groupe de Lie, opèrent comme générateurs infinitésimaux de semi-groupes de probabilité. En particulier les opérateurs tels que $\widetilde{\Delta}$ sont de ce type : donc il existe une famille de mesures de probabilité $\{\mu_t \; ; \; 0 \leq t\}$ sur G telles que :

1° $\mu_t \star \mu_s = \mu_{t+s}$.

2° $\frac{d}{dt} \int_G \varphi(gg') \, d\mu_t(g') \big|_{t=0} = \widetilde{\Delta}\varphi(g)$

(où φ est une fonction bornée de classe $\underset{\sim}{C}^2$).

Utilisant la propriété de semi-groupe, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_G \varphi(gg') \, d\mu_t(g') = \int_G \widetilde{\Delta}\varphi(gg') \, d\mu_t(g') \qquad .$$

D'autre part $\widetilde{\Delta}$ engendrant le semi-groupe μ_t , et vérifiant $R_k^{-1} \, \widetilde{\Delta} R_k = \widetilde{\Delta}$ comme un semi-groupe, est uniquement déterminé par son générateur infinitésimal, on a

$$R_k^{-1} \, \mu_t \, R_k = \mu_t \; ; \quad \text{donc} \quad k . \mu_t = \mu_t . k \qquad ,$$

ce qui entraîne que $\mu_t \star m_K = m_K \star \mu_t$.

Supposons que f soit une fonction bornée sur D et de classe $\underset{\sim}{C}^2$, telle que $\widetilde{\Delta} f = 0$: alors $\widetilde{f}(g) = f(gp_0)$ vérifie $\widetilde{\widetilde{\Delta}} \widetilde{f} = 0$ et $\widetilde{f}(gk) = \widetilde{f}(g)$. On en déduit :

$$\frac{d}{dt} \int_{G \times K} \widetilde{f}(gkg') \, dk \, d\mu_t(g') = \frac{d}{dt} \int_G \widetilde{f}(gg'') \, d(m_K \star \mu_t)(g'')$$

$$= \frac{d}{dt} \int_G \widetilde{f}(gg'') \, d(\mu_t \star m_K)(g'') = \frac{d}{dt} \int_{G \times K} \widetilde{f}(gg'k) \, dk \, d\mu_t(g')$$

$$= \frac{d}{dt} \int_G \widetilde{f}(gg') \, d\mu_t(g') = 0 \qquad .$$

De ce calcul on déduit

$$\int_{G \times K} \widetilde{f}(gkg') \, dk \, d\mu_t(g') = \int_K \widetilde{f}(gk) \, dk = \widetilde{f}(g) \qquad .$$

D'autre part [6], les mesures μ_t sont absolument continues, donc $\widetilde{f}(g)$ est harmonique.

4. Domaines de Cartan.

Soit $\mathcal{D} \subset \underset{\sim}{C}^r$ un ouvert ; on dit que c'est un domaine de Cartan si $\mathcal{D}$ est un ouvert borné, et s'il admet un groupe G de transformations analytiques transitif et semi-simple, tel que le stabilisateur de chaque point soit un sous-groupe compact maximal [1]. On peut toujours supposer que l'origine z_0 de $\underset{\sim}{C}^r$ appartient à $\mathcal{D}$ et que le groupe d'isotropie K de z_0 est représenté par des transformations linéaires de $\underset{\sim}{C}^r$. En particulier K opère sur la frontière $\bar{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$. Enfin l'application $\beta : G/K \to \mathcal{D}$ est un isomorphisme.

Le domaine Ω admet une métrique riemannienne : la métrique de Bergmann, invariante par G. Cette métrique définit un opérateur de Laplace-Beltrami donné par

$$\Delta = \sum g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_j} \quad .$$

L'opérateur Δ étant elliptique correspond à un laplacien sur D noté encore Δ. Une fonction f sur D sera dite harmonique si $\Delta f = 0$. Les fonctions analytiques sur Ω vérifient $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f = 0$. Elles sont donc harmoniques au sens que nous venons de dire.

On va montrer que l'application $\beta : D \to \Omega$ se prolonge à la compactification standard $\bar{D}$ de D et que $\beta(\bar{D}) \subset \bar{\Omega}$. Par cette application la frontière distinguée de D est envoyée sur un ensemble $\bar{\Omega}_0$ qui est la frontière de Bergmann-Silov de Ω.

LEMME 4.1. - Soit f une fonction harmonique sur D telle que l'ensemble des translatés à gauche par K soit équicontinu. Alors $\hat{f}$ est continue (cf. théorème 2.3). Soient $x \in B(G)$, et (x_n) une suite de points qui converge vers x. Comme K est transitif sur $B(G)$, on peut poser $x_n = k_n x$ et la suite k_n converge vers e. Posons

$$\varphi_n(p) = f(k_n p) - f(p) \quad .$$

La fonction φ_n est harmonique, et on a $\hat{\varphi}_n(x) = \hat{f}(k_n x) - \hat{f}(x)$. A cause de l'unicité de la fonction frontière, on a $\|\hat{\varphi}_n\|_\infty = \|\varphi_n\|_\infty$. Mais par hypothèse $\|\varphi_n\|_\infty \to 0$. D'où le lemme.

LEMME 4.2. - Soit f une fonction analytique sur Ω, continue sur $\bar{\Omega}$, alors la fonction $f \circ \beta$ a une donnée frontière qui est continue.

Démonstration. - Comme K opère sur $\bar{\Omega}$, si $k_n \to k$, $f(k_n z) \to f(kz)$ uniformément pour tout $z \in \Omega$. Donc par le lemme précédent, $\widehat{f \circ \beta}$ est continue.

COROLLAIRE. - Sous les mêmes hypothèses, la fonction $f \circ \beta$ définie sur D se prolonge en une fonction continue sur la compactification standard $\bar{D}$.

Démonstration. - En effet si une fonction harmonique $\varphi(p)$ a une donnée frontière $\hat{\varphi}$ continue, alors par la formule de Poisson $\varphi(p) = p(\hat{\varphi})$ on voit que φ se prolonge en une fonction continue à $\bar{D}$.

On va appliquer ces résultats aux fonctions coordonnées z^i sur Ω. Les fonctions $z^i \circ \beta$ vérifient les conditions du lemme 7.2 : elles se prolongent donc en des fonctions φ_i sur $\bar{D}$. D'autre part $\beta : D \to \Omega$ est donné par

$$\varphi(p) = \{z^1 \circ \beta , \dots , z^r \circ \beta\} = \{\varphi_1(p) , \dots , \varphi_r(p)\}$$

en sorte que les fonctions φ_i définissent un prolongement continu de β à $\bar{D}$. Ceci prouve incidemment que le groupe G opère sur $\bar{\mathcal{D}} = \beta(\bar{D})$, et que β commute aux opérations de G. On considère $B(G)$ comme plongé dans $\bar{D}$, et notons $\bar{\mathcal{D}}_0 = \beta(B(G))$.

Soit maintenant $f(z)$ une fonction analytique sur $\mathcal{D}$, continue sur $\bar{\mathcal{D}}$. La fonction $f \circ \beta$ définie sur D se prolonge à $\bar{D}$ et sa restriction à $B(G)$ constitue la donnée frontière φ de $f \circ \beta$. Par ailleurs, puisque f est définie sur $\bar{\mathcal{D}}$, et puisque β est une application continue sur $\bar{D}$, la fonction $f \circ \beta$ est déjà définie sur $\bar{D}$ et continue ; comme les deux coïncident, on conclut que $\varphi(x) = f \circ \beta(x)$ $(x \in B(G))$. Donc la donnée frontière de $f \circ \beta$ correspond à la restriction de f à $\bar{\mathcal{D}}_0$. La représentation de Poisson de $f \circ \beta$ en terme de φ implique immédiatement une formule de Poisson de $f(z)$ en terme de sa restriction à $\bar{\mathcal{D}}_0$. Soit $\tilde{m}$ l'unique mesure K-invariante sur $\bar{\mathcal{D}}_0$ $(\tilde{m} = \beta(m))$, alors

$$\text{(II.4.1)} \qquad f(z) = \int_{\bar{\mathcal{D}}_0} \hat{f}(g\zeta)\, d\tilde{m}(\zeta) \qquad (z = gz_0) \quad .$$

De plus si $\hat{f}(\zeta)$ est une fonction continue sur $\bar{\mathcal{D}}_0$ (II.4.1) détermine une fonction analytique sur $\mathcal{D}$ qui se prolonge en une fonction continue sur $\bar{\mathcal{D}}_0$. On a les résultats suivants :

- Toute fonction analytique sur $\mathcal{D}$ continue sur $\bar{\mathcal{D}}_0$ prend son maximum sur $\bar{\mathcal{D}}_0$.
- Aucun sous-ensemble propre de $\bar{\mathcal{D}}_0$ n'a cette propriété.

On en déduit que $\bar{\mathcal{D}}_0$ est la frontière de Bergmann-Silov de $\mathcal{D}$.

THÉORÈME 4.3. - Soient $\mathcal{D}$ un domaine de Cartan, G son groupe d'automorphismes, z_0 un point de $\mathcal{D}$ et K le groupe d'isotropie de z_0. Alors la frontière de Bergmann-Silov $\bar{\mathcal{D}}_0$ de $\mathcal{D}$ est l'image par une application qui commute aux opérations de G de la frontière distinguée de G, et en particulier, K opère transitivement sur $\bar{\mathcal{D}}_0$. Si f est une fonction analytique sur $\mathcal{D}$, qui se prolonge en une fonction continue sur $\bar{\mathcal{D}}$, alors f admet une représentation de Poisson :

$$f(z) = \int_{\bar{\mathcal{D}}_0} \hat{f}(g\zeta)\, d\tilde{m}(\zeta)$$

($\tilde{m} =$ l'unique mesure de probabilité sur $\bar{\mathcal{D}}_0$ invariante par K ; $z = gz_0$).

Exemple. – On reprend le 3e exemple de l'exposé I, § 7. On a vu que $\dim B(G) > \dim \overline{\mathcal{D}}_0$. L'application β, qui est injective sur D, ne l'est plus sur $\overline{D}$. En particulier la donnée frontière d'une fonction harmonique bornée quelconque sur D, donc sur $\mathcal{D}$, ne correspond pas nécessairement à une fonction sur $\overline{\mathcal{D}}_0$, puisque l'ensemble des fonctions mesurables et bornées sur $\overline{\mathcal{D}}_0$ correspond par (II.4.1) à un sous-ensemble strictement contenu dans l'ensemble des fonctions mesurables et bornées sur $\overline{D}$.

Ainsi (II.4.1), qui est valable pour les fonctions analytiques sur $\mathcal{D}$ qui se prolongent en des fonctions continues sur $\overline{\mathcal{D}}$, n'est plus valable pour les fonctions harmoniques et bornées quelconques sur $\mathcal{D}$. En revanche la formule de Poisson écrite en termes de fonctions sur $B(G)$ reste toujours valable.

5. Les fonctions μ-harmoniques.

Arrivons-en à l'étude du cas général (II.1.1). Les fonctions qui vérifient II.1.1 sont dites μ-harmoniques.

DÉFINITION 5.1. – Une fonction f sur G est uniformément continue à gauche (l. u. c.) si elle est bornée et si, quand une suite g_n d'éléments de G tend vers l'élément neutre, alors $f(g_n g) \to f(g)$ uniformément en g.

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonction l. u. c. et μ-harmoniques sur G. On va montrer que de telles fonctions sont celles qui correspondent à des données frontières continues pour une formule de Poisson appropriée.

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de V. A. indépendantes à valeurs dans G et ayant même répartition μ. Soit Ω l'espace du processus (Ω peut être choisi égal à $G.G.G \dots$ avec la mesure $\mu \otimes \mu \otimes \mu \otimes \mu \dots$).

DÉFINITION 5.2. – Soit $\mathcal{A}$ la famille des fonctions sur $G.\Omega$ définies par :

$$z(g, \omega) = \lim_{n\to\infty} f(gX_1(\omega)\, X_2(\omega) \dots X_n(\omega))$$

où f est l. u. c. et telle que la limite existe avec la probabilité $+1$ pour tout g.

L'ensemble $\mathcal{A}$ forme une algèbre (pour le produit évident) de fonctions mesurables sur $G.\Omega$ et on a une représentation continue de G dans $\mathcal{A}$ par les translations à gauche :

$$\rho(g)\; z(g', \omega) = z(gg', \omega) = z^g(g', \omega) \qquad .$$

Si $g_n \to e$, alors $z^{g_n} \to z$ uniformément. Soit $z \in \mathfrak{A}$; posons

$$\zeta(g) = E(z(g\,,\,\omega)) \quad .$$

Comme f est l. u. c., il s'ensuit que ζ est également l. u. c. Montrons que ζ est μ-harmonique. Soit X_0 une V. A. de même répartition que les X_i ;

$$z(g\,,\,\omega) = \lim_{n\to\infty} f(gX_1\,X_2\,\dots\,X_n)$$

$$\zeta(g) = E(z) = \lim_{n\to\infty} E(f(gX_1\,\dots\,X_n))$$

$$\zeta(gX_0) = \lim_{n\to\infty} E(f(gX_0\,X_1\,\dots\,X_n)|X_0) \quad .$$

Cette dernière égalité peut encore s'écrire :

$$\int_G \zeta(gg')\,d\mu(g') = E(\zeta(gX_0)) = \lim_n E(f(gX_0\,\dots\,X_n)) \quad .$$

La limite du deuxième membre est évidemment $\zeta(g)$. Donc $\zeta \in \mathcal{H}$. On a donc défini une application $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathcal{H}$.

Réciproquement soit $f \in \mathcal{H}$; posons $W_n(g) = f(gX_1\,X_2\,\dots\,X_n)$. Comme f est une fonction μ-harmonique, on a $E(f(gX_n)) = f(g)$ pour tout g et pour tout n , par conséquent

$$E(W_n(g)\mid X_1\,,\,X_2\,,\,\dots\,,\,X_{n-1}) = W_{n-1}(g) \quad .$$

Donc les $W_n(g)$ forment une martingale bornée et convergent donc presque sûrement [8] vers une variable aléatoire $z(g\,,\,\omega)$ qui appartient à $\mathfrak{A}$. Posons $z = \beta(f)$. On a $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ et $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}}$.

En effet, soient $f \in \mathcal{H}$ et $z = \beta(f)$:

$$E(z(g\,,\,\omega)) = E(\lim_n W_n(g)) = \lim_n E(W_n(g)) = f(g) \quad .$$

De plus soit $\zeta = \alpha(z)$ et $z' = \beta(\zeta)$. Puisque $\alpha(z') = \zeta$, on a $\alpha(z - z') = 0$. Soit $z \in \mathfrak{A}$ tel que $E(z(g\,,\,\omega)) = 0$ pour tout $g \in G$. Puisque $z(g\,,\,\omega)$ est mesurable relativement à $X_1\,,\,X_2\,,\,\dots\,,\,X_n$, on a :

$$z(g\,,\,\omega) = \lim_n E(z(g\,,\,\omega)\mid X_1\,,\,X_2\,,\,\dots\,,\,X_n) \qquad \text{(cf. [3])} \quad .$$

En outre si

$$z(g\,,\,\omega) = \lim_k f(g\,X_1\,X_2\,\dots\,X_n\,X_{n+1}\,\dots\,X_{n+k})$$

on peut écrire

$$z(g\,,\,\omega) = z(g\,X_1\,\dots\,X_n\,,\,\omega_n)$$

(ω_n est le point de Ω tel que $X_j(\omega_n) = X_{j+n}(\omega)$). Comme X_n est un processus stationnaire, l'application $\omega \to \omega_n$ conserve la mesure et, comme $E(z(g\,,\,\omega)) = 0$, on trouve $E(z(g\,,\,\omega_n)) = 0$ pour tout g en sorte que

$$E(z(g X_1 \dots X_n , \omega_n) \mid X_1 , \dots , X_n) = 0 \quad .$$

Ainsi $E(z(g , \omega) \mid X_1 , X_2 , \dots , X_n) = 0$ et $z(g , \omega) = 0$.

On a donc défini une application linéaire bijective entre $\mathfrak{A}$ et $\mathcal{H}$. Mais $\mathfrak{A}$ et $\mathcal{H}$ peuvent être munis chacun d'une topologie, en utilisant la norme L^∞. Les applications α et β n'augmentent pas la norme, donc elles la conservent. $\mathcal{H}$ est un espace de Banach ($\mathcal{H}$ est fermé dans $L^\infty(G)$), donc $\mathfrak{A}$ aussi. De plus $\mathfrak{A}$ est une algèbre telle que $\|z_1 z_2\|_\infty \leq \|z_1\|_\infty \|z_2\|_\infty$; donc $\mathfrak{A}$ est une algèbre de Banach involutive (si $z \in \mathfrak{A}$ alors $\bar{z} \in \mathfrak{A}$ et $\|z\bar{z}\|_\infty = \|z\|_\infty^2$) donc c'est une C^*- algèbre. $\mathfrak{A}$ peut donc s'identifier à un espace de fonctions continues sur un espace compact Π [4].

DÉFINITION 5.3. - L'espace Π est appelé l'espace de Poisson de G relativement à μ.

Si $p \in \Pi$, le point p définit un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathbb{C}$; la topologie de Π est obtenue en prenant pour voisinages de p les points p' tels que $|p'(z_i) - p(z_i)| \leq \varepsilon$, $i = 1 , \dots , n$. En outre G opère sur $\mathfrak{A}$ et sur $\mathcal{H}$, et α et β commutent aux opérations de G. Ceci permet de faire opérer G continuement sur Π par

$$gp(z) = p(z^g) \quad .$$

Soit φ une fonction continue sur Π correspondant à une fonction $f \in \mathcal{H}$. Posons $L(\varphi) = f(e)$. L est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(\Pi)$ positive et $L(1) = 1$. Donc il existe une mesure de probabilité ν sur Π telle que $\nu(\varphi) = L(\varphi)$. Soient $z \in \mathfrak{A}$ et $p \in \Pi$; posons $\varphi(p) = p(z)$. On a

$$p(z^g) = \varphi(gp) = \varphi^g(p) \quad .$$

D'autre part à z correspond une fonction f de $\mathcal{H}$, et on a

$$f(g) = f^g(e) = \int_\Pi \varphi^g(p) \, d\nu(p) = \int_\Pi \varphi(gp) \, d\nu(p) \quad .$$

On a ainsi démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 5.4. - Il existe une mesure de probabilité ν sur l'espace de Poisson Π de G relativement à μ telle que :

$$f(g) = \int_\Pi \varphi(gp) \, d\nu(p) \quad .$$

Cette formule établit une correspondance bijective entre les éléments de $\mathcal{H}$ et les fonctions continues sur Π.

COROLLAIRE. - La mesure ν vérifie $\mu \star \nu = \nu$.

Démonstration.

$$\mu \star \nu(\varphi) = \int \varphi(gp)\, d\mu(g)\, d\nu(p) = \int f(g)\, d\mu(g) = f(e)$$

$$\mu \star \nu(\varphi) = \int \varphi(p)\, d\nu(p) = \nu(\varphi) \quad .$$

6. L'espace de Poisson et la frontière maximale.

On suppose maintenant que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Haar.

LEMME 6.1. - Soit K un sous-groupe compact maximal de G. Alors K opère transitivement sur Π.

Démonstration. - Soit $z \in \mathfrak{A}$ alors $z'(g, \omega) = \int_K z(kg, \omega)\, dk$ est une constante qui ne dépend ni de g, ni de ω. En effet si $\zeta = \alpha(z)$, on trouve

$$\alpha(z') = \int \zeta^k\, dk = \zeta' \quad .$$

Or $\zeta(g)$ (donc $\zeta'(g)$) $\in \mathcal{H}$, et ζ' vérifie $\zeta'(kg) = \zeta'(g)$, donc ζ' est une constante ; donc z' est également une constante. Soient $p_1, p_2 \in \Pi$. Les ensembles Kp_1 et Kp_2 sont deux compacts distincts ou confondus. Si $Kp_1 \neq Kp_2$, ils sont disjoints. Il existe $\varphi \in \mathcal{C}(\Pi)$ telle que $\varphi = +1$ sur Kp_1 et 0 sur Kp_2. On a donc :

$$\int_K \varphi(kp)\, dk = 1 \text{ sur } Kp_1 \text{ et } 0 \text{ sur } Kp_2 \quad .$$

Mais si φ correspond à $z \in \mathfrak{A}$, alors $\int \varphi^k\, dk$ correspond à z' qui est une constante. Ce qui entraîne une contradiction.

LEMME 6.2. - Soit M un espace compact où G opère. Soient $p_0 \in \Pi$ et H_Π le groupe d'isotropie de p_0. Il existe une mesure θ sur M stable par H_Π.

Démonstration. - Soit $\mathcal{P}(M)$: l'opérateur T_μ $(T_\mu(\lambda) = \mu \star \lambda \ (\lambda \in \mathcal{P}(M))$ laisse $\mathcal{P}(M)$ invariant. Donc il existe $\lambda \in \mathcal{P}(M)$ tel que $\mu \star \lambda = \lambda$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(M)$, et posons

$$\tilde{\varphi}(g) = g\lambda(\varphi) = \int_M \varphi(gx)\, d\lambda(x) \quad .$$

Alors la fonction $\tilde{\varphi}$ est μ-harmonique, et $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\int_G \tilde{\varphi}(gg')\, d\mu(g') = \int_{G\times M} \varphi(gg'x)\, d\mu(g')\, d\lambda(x) = \int \varphi(gx)\, d\lambda(x) = \tilde{\varphi}(g) \quad .$$

Si $g_n \to e$

$$|\tilde{\varphi}(g_n g) - \tilde{\varphi}(g)| \leq \int |\varphi(g_n gx) - \varphi(gx)|\, d\lambda(x)$$

qui tend vers 0 uniformément.

On a ainsi défini une application linéaire continue $\gamma : \mathcal{C}(M) \to \mathcal{H}$. Si $p_0 \in \Pi$ alors l'application $f \to p_0(\beta(f))$ est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{H}$. Donc l'application $\varphi \to p_0(\beta(\gamma(\varphi)))$ est aussi une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{C}(M)$. Elle est positive et conserve la fonction 1 : elle est donc donnée par une mesure θ : $p_0(\beta(\gamma(\varphi))) = \theta(\varphi)$. Soit $h \in H$, alors

$$h\theta(\varphi) = \theta(\varphi^h) = p_0(\beta(\gamma(\varphi^h))) = p_0(\beta(\gamma(\varphi)^h)) = p_0(\beta(\gamma(\varphi))^h)$$
$$= hp_0(\beta(\gamma(\varphi))) = p_0(\beta(\gamma(\varphi))) = \theta(\varphi) \quad .$$

LEMME 6.3. - Si M est une frontière de G, il existe une application continue de Π sur M qui commute aux opérations de G.

Démonstration. - On sait qu'il existe une mesure θ sur M avec $h\theta = \theta$ $(h \in H_\Pi)$. Soit $G\theta$ la trajectoire de θ par G ; on a une application $G/H_\Pi = \Pi \to G\theta$; donc $G\theta$ est compact. Comme M est une frontière il existe une mesure dans $G\theta$ qui est une mesure ponctuelle donc il existe une suite (k_n) d'éléments de K qui converge vers $k \in K$ et telle que $\lim k_n \theta = p$ $(p \in M)$. Donc $\theta = k^{-1} p$ (lemme 6.1) et H_Π a un point fixe dans M : H_Π est contenu dans le stabilisateur de p.

LEMME 6.4. - Soit ν la mesure sur Π définie en 5.4. Alors, pour presque toute suite de V. A. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ sur Ω, la suite $X_1 X_2 \dots X_n \nu$ converge vers une mesure ponctuelle.

Démonstration. - Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\Pi)$ et posons

$$\tilde{\varphi}(g) = g\nu(\varphi) = \int \varphi(gx)\, d\nu(x)$$

alors $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}$ et $\beta(\tilde{\varphi}) \in \mathfrak{A}$.

$$\beta(\tilde{\varphi})(e, \omega) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}(X_1 X_2 \dots X_n) = \lim X_1 \dots X_n \nu(\varphi) \quad .$$

Donc $X_1 \dots X_n \nu$ converge presque sûrement. Soit $\nu'(\omega)$ sa limite

$$\beta(\tilde{\varphi})(e, \omega) = \nu'(\omega)(\varphi) \quad .$$

L'application $\varphi \to \beta(\tilde{\varphi})$ est un isomorphisme d'algèbre : $\beta(\widetilde{\varphi_1 \varphi_2}) = \beta(\tilde{\varphi}_1)\ \beta(\tilde{\varphi}_2)$. Donc on a

$$\nu'(\omega)(\varphi_1 \varphi_2) = \nu'(\omega)(\varphi_1)\ \nu'(\omega)(\varphi_2) \quad .$$

Mais il s'ensuit que $\nu'(\omega)$ est presque sûrement une mesure ponctuelle, car on a pour toute $\varphi \geqslant 0$:

$$\nu'(\varphi) = \nu'(\varphi^n)^{1/n}$$

qui tend vers le maximum essentiel de φ relativement à ν', ce qui implique que toute φ est constante presque partout relativement à ν', et donc que ν' est une mesure ponctuelle.

THÉORÈME 6.5. - L'espace Π est un revêtement fini non ramifié de $B(G)$.

COROLLAIRE. - Le groupe G possède un nombre fini d'espaces de Poisson, qui sont tous des revêtements finis de $B(G)$.

Démonstration. - Par le lemme 6.3, on sait qu'il existe une application d'espaces homogènes $\sigma : \Pi \to B(G)$. Soient $p_0 \in \Pi$ et $q_0 = \sigma(p_0)$. Notons H_Π (resp. $H(G)$) le groupe d'isotropie de p_0 (resp. q_0). On a évidemment $H_\Pi \subset H(G)$. Il faut montrer que $[H(G) : H_\Pi] < + \infty$. Nous allons temporairement admettre le lemme suivant.

LEMME 6.6. - Il existe un ouvert Q dans Π tel que, pour toute mesure λ sur Π dont le support est intérieur à Q, il existe une suite $\{g_n\}$ d'éléments de G telle que la suite $g_n \lambda$ converge vers une mesure ponctuelle.

Le sous-groupe $H(G)$ a la propriété de point fixe. Donc $H(G)$ laisse invariante une mesure sur $H(G)/H_\Pi$ qui est un espace compact. L'injection $H(G) \to G$ applique $H(G)/H_\Pi$ dans $G/H_\Pi = \Pi$. Donc $H(G)$ laisse invariante une mesure λ sur Π dont le support est l'ensemble $H(G)\, p_0$. Soit Q un ouvert de Π vérifiant les propriétés du lemme 6.6 ; comme K opère transitivement sur Π il existe $k \in K$ tel que $k\lambda(Q') > 0$ pour un compact Q' de Q. Autrement dit $k\lambda$ domine une mesure λ' non nulle dont le support est intérieur à Q. Donc il existe une suite $\{g_n\}$ telle que $g_n \lambda'$ converge vers une mesure ponctuelle non nulle. Choisissons une sous-suite g'_n telle que $g'_n k\lambda$ converge vers $\tilde{\lambda}$. Cette dernière mesure domine donc une mesure ponctuelle non nulle. De plus λ est invariante par $H(G)$, et K opère transitivement sur $B(G)$. Si $g \in G$, $g = hk$ $(h \in S\ ;\ k \in K)$, alors $g\lambda = k\lambda$. Donc

$$\tilde{\lambda} = \lim g''_n \lambda = \lim k''_n \lambda = k'\lambda \qquad (\text{pour un certain } k' \in K) \quad .$$

Comme $\tilde{\lambda}$ domine une mesure ponctuelle non triviale il en va de même de λ. Mais λ a son support dans $H(G)\, p_0$. Donc il existe $h \in H(G)$ tel qu'on ait $\lambda(\{hp_0\}) > 0$. Comme λ est invariante par $H(G)$, il s'en suit que $\lambda(\{hp_0\}) > 0$ pour tout $h \in H(G)$. Mais λ est une mesure de masse finie : on en conclut que $H(G)\, p_0 = H(G)/H$ est fini.

Remarquons que $H(G) = K_0 \cdot S$ (cf. exposé I) ; K_0 est un groupe compact qui a un nombre fini de composantes connexes et S est connexe. Soit $H(G)^0$ la composante connexe de $H(G)$. Pour chaque Π le groupe H_Π sera contenu dans $H(G)$ et contiendra $H(G)^0$. Donc les espaces Π correspondent aux sous-groupes de $H(G)/H(G)^0$.

Démonstration du lemme 6.6. - Avec les notations du théorème 5.4, on a $\mu \star \nu = \nu$; donc $\mu \star \mu \star \nu = \nu$. On sait (lemme 3.3) que $\mu \star \mu$ domine un multiple de la mesure de Haar de G sur un ouvert de G. Donc ν domine une mesure "bien foutue" sur un ouvert Q de Π. De plus il y a une suite $\{g_n\}$ telle que $\{g_n \nu\}$ converge vers une mesure ponctuelle (lemme 6.4). Donc pour toute mesure "bien foutue" π sur Q, la suite $g_n \pi$ converge vers une mesure ponctuelle. Soient π une mesure dont le support est intérieur à Q, et μ' une mesure concentrée sur un ouvert suffisament petit de G, alors $\mu' \star \pi$ sera dominée par une mesure "bien foutue" sur Q, en sorte que $g_n \mu' \star \pi$ convergera vers une mesure ponctuelle. Par le même argument que dans la démonstration du théorème 3.1 de l'exposé I il existe une suite g'_n telle que $g'_n \pi$ converge vers une masse ponctuelle.

THÉORÈME 6.8. - Si le support d'une puissance μ^m (pour la convolution) de μ contient un voisinage de l'identité dans G alors l'espace de Poisson de G relativement à μ coïncide avec $B(G)$.

Démonstration. - Supposons que $\Pi \neq B(G)$. De toute façon Π est un revêtement de $B(G)$, et les automorphismes de la fibre commutent aux opérations de G. Soit η un tel automorphisme différent de l'identité. Soit ν la mesure sur Π construite en 5.4. Il existe une suite $\{g_n\}$ telle que $g_n \nu \to p$ $(p \in \Pi)$. Alors $g_n \eta\nu = \eta g_n \nu \to \eta p \neq p$. Donc ν et $\eta\nu$ sont mutuellement étrangères. Mais (lemme 6.6) ν domine une mesure "bien foutue" sur un ouvert Q de Π. Si le support de μ^m contient un voisinage de l'identité, alors tout $g \in G$ appartient au support de μ^n pour un n. Comme $\mu^n \star \nu = \nu$ pour tout $q \in \Pi$, la mesure ν domine une mesure "bien foutue" sur un voisinage de q. On a le même résultat pour $\eta\nu$. Donc ν et $\eta\nu$ ne peuvent être mutuellement étrangères.

Exemple. - On va montrer sur un exemple que l'on peut effectivement avoir des espaces de Poisson qui soient différents de $B(G)$. On prend $G = SL(2, \mathbb{R})$, $K = SO(2)$, et S le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures à ceofficients diagonaux positifs, $N(S)$ le groupe des matrices triangulaires supérieures.

$$B(G) = \underset{\sim}{P}^1 \text{ (droite projective réelle) ; } G/S = S^1 \text{ (le tore)} \quad .$$

Soit Σ l'ensemble des matrices à coefficients tous positifs ou nuls et de déterminant 1 ; c'est un semi-groupe de G qui opère sur $\underset{\sim}{R}^2$ en conservant le premier quadrant. Soit μ une mesure sur G dont le support est contenu dans Σ . Alors l'espace de Poisson relativement à μ est S^1 . En effet il existe une mesure ν concentrée sur le premier quadrant de S^1 telle que $\mu \star \nu = \nu$. Pour cette mesure il existe une suite g_n (par exemple $g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $g_n = g^n$) telle que $g_n \nu \to$ une mesure ponctuelle p . Soit φ une fonction continue sur S^1 . Posons :

$$\tilde{\varphi}(g) = \int_{S^1} \varphi(gx) \, d\nu(x) = g\nu(\varphi) \quad .$$

Or $\mu \star \nu = \nu$. Donc :

$$\int \tilde{\varphi}(gg') \, d\mu(g') = \int \varphi(gg'x) \, d\nu(x) \, d\mu(g') = \tilde{\varphi}(g) \quad .$$

Donc $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}$. En outre

$$\lim \tilde{\varphi}(gg_n) = \lim gg_n \, \nu(\varphi) = \varphi(gp) \quad ;$$

donc si $\tilde{\varphi} = 0$, alors φ est nulle également : l'application $\varphi \to \tilde{\varphi}$ est injective. Supposons que l'espace de Poisson de μ ne soit pas $\underset{\sim}{S}^1$: c'est donc $\underset{\sim}{P}^1$. Pour toute fonction continue φ sur S^1 on peut trouver $\hat{\varphi}$ sur $\underset{\sim}{P}^1$ telle que $\tilde{\varphi}(g) = g\nu'(\hat{\varphi})$ (théorème 5.4) où ν' est une mesure sur $\underset{\sim}{P}^1$. Soit $g_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; alors $g_0 \, \nu' = \nu'$ et

$$\tilde{\varphi}(gg_0) = \tilde{\varphi}(g) = \tilde{\varphi}(g_0 \, g) = g_0 \, g\nu(\varphi) = g\nu(\varphi^{g_0}) = \widetilde{\varphi^{g_0}}(g) \quad .$$

Comme l'application $\varphi \to \tilde{\varphi}$ est injective, on a pour toute φ la relation $\varphi^{g_0} = \varphi$, ce qui entraîne une contradiction.

Si $G = SL(2 \, , \underset{\sim}{C})$, alors $B(G)$ est isomorphe à la droite projective complexe qui est simplement connexe : il n'y a donc qu'un seul espace de Poisson.

7. La formule de Poisson.

On a montré jusqu'à présent que les fonctions μ-harmoniques qui appartiennent à $\mathcal{H}$ admettent une représentation de Poisson, il reste à vérifier ce résultat dans le cas général.

Soit $f(g)$ une fonction μ-harmonique bornée sur G , et soit $\alpha_n(g)$ une suite de fonctions sur G continues à support compact approximant l'identité de $L^1(G)$: les α_n ont leur support dans des voisinages de l'origine de plus en plus petit ; $\alpha_n \geqslant 0$ et $\int \alpha_n(g) \, dg = 1$. Posons :

$$f_n(g) = \int_G \alpha_n(gx^{-1})\ f(x)\ dx \quad .$$

Alors $f_n \in \mathcal{H}$. Ce qui permet d'écrire :

$$f_n(g) = \int_\Pi \hat{f}_n(gp)\ d\nu(p)$$

où $\hat{f}_n$ est une fonction continue sur Π . De plus nous savons que $\mu \star \nu = \nu$, ce qui peut s'écrire :

$$\nu = \int \mu . p\ d\nu(p) \quad .$$

Comme μ est absolument continue par rapport à la mesure de Haar, il s'ensuit que $\mu . p$ est absolument continue par rapport à une mesure m "bien foutue" sur Π , donc ν vérifie aussi cette propriété ; on peut donc écrire

$$f_n(g) = \int_\Pi \hat{f}_n(p)\ \frac{dg\nu(p)}{dm}\ dm(p) \quad .$$

Les fonctions $\hat{f}_n$ sont bornées car $\|\hat{f}_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Donc elles appartiennent à un ensemble borné de $L^\infty(\Pi , m)$, et donc il existe une sous-suite qui converge pour la topologie faible de $L^\infty(\Pi , m)$. Soit $\hat{f}_{n_j} \to \hat{f}$; alors

$$f_{n_j} \to \int_\Pi \hat{f}(p)\ \frac{dg\nu}{dm}(p)\ dm(p) \quad .$$

Soit $\psi \in L^1(G)$; par définition de $f_n(g)$, on a

$$\int f_n(g)\ \psi(g)\ dg = \int f(g)\ \alpha_n(g_1)\ \psi(g , g)\ dg\ dg_1 \quad .$$

Donc par définition de α_n la fonction $f_n \to f$ pour la topologie faible de $L^\infty(G)$. En particulier $f_{n_j} \to f$. Mais f_{n_j} converge simplement ; comme les f_{n_j} sont uniformément bornés, la limite simple est aussi la limite faible (convergence dominée). Donc presque partout

$$f(g) = \int_\Pi \hat{f}(p)\ dg\nu(p) = \int \hat{f}(gp)\ d\nu(p) \quad .$$

En définitive appliquant l'équation fonctionnelle des fonctions μ-harmoniques, on voit que l'équation précédente est valable partout.

THÉORÈME 7.1. - Soient G et $B(G)$ comme précédemment. Il existe une famille Π_i de revêtements finis de $B(G)$ telle que, si μ est une mesure de probabilité absolument continue sur G , les fonctions μ-harmoniques bornées sont en correspondance bijective avec l'ensemble des fonctions mesurables et bornées sur un des Π_i , et la correspondance est donnée par l'équation précédente.

Appendice.

On va donner en prime au lecteur un résultat supplémentaire. Soient G un groupe topologique et M un espace localement compact où G opère. On dit que M est contractif s'il existe un ouvert $Q \subset M$ et un point $p_0 \in Q$ tel que pour tout voisinage U de p_0 il existe $g \in G$ tel que $gQ \subset U$.

<u>Exemple</u>. - $G = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a, b, \in \mathbb{R}; \ a > 0)$; $M = \mathbb{R}$; $gx = ax + b$. Si on prend $g_n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $g_n x \to 0$. Donc M est contractif.

THÉORÈME. - Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe avec un centre fini. Soit M un espace homogène contractif de G. Alors M est compact.

<u>Démonstration</u>. - Soient Q et p_0, comme dans la définition. Il existe un compact $\Delta \subset Q$, et un ouvert $W \subset G$ tels que $W\Delta \subset \Delta$. Soit μ une mesure sur G ayant son support dans W, il existe une mesure $\pi \in \mathcal{P}(M)$ telle que $\mu \star \pi = \pi$. Soit M_c le compactifié d'Alexandroff de M où G opère trivialement sur le point à l'infini, et soit $\mathcal{C}(M_c)$ l'espace des fonctions continues sur M_c. On peut identifier π à une mesure sur M_c. Si $\psi \in \mathcal{C}(M_c)$ et soit $\tilde{\psi}(g) = g\pi(\psi)$. La fonction ψ est une fonction μ-harmonique et comme ψ est continue sur M_c, $\tilde{\psi} \in \mathcal{H}$. Soit Π, μ, ν, définis comme précédemment, alors il existe $\hat{\psi} \in \mathcal{C}(\Pi)$ telle que $\tilde{\psi} = g\nu(\hat{\psi})$, et l'application $\psi \to \hat{\psi}$ est une application linéaire de $\mathcal{C}(M_c)$ dans $\mathcal{C}(\Pi)$, et on a $g\pi(\psi) = g\nu(\hat{\psi})$. Soit $p \in \Pi$, alors $\hat{\psi}(p)$ est une fonctionnelle linéaire positive sur $\mathcal{C}(M_c)$, donc il existe une mesure de probabilité $\theta_p \in \mathcal{P}(M_c)$ telle que $\hat{\psi}(p) = \theta_p(\psi)$. Si $g \in G$, ψ^g correspond à ψ^g qui correspond à $\hat{\psi}^g$ donc $\theta_{gp} = g\theta_p$. L'application $p \to \theta_p$ est continue, et considérons la mesure :

$$\tilde{\theta}(\psi) = \int_\Pi \theta_p(\psi)\, d\nu(p) = \int \hat{\psi}(p)\, d\nu(p) = \nu(\hat{\psi}) = \pi(\psi) \ ; \qquad \psi \in \mathcal{C}(M_c) \ .$$

Donc $\tilde{\theta} = \pi$. Comme π a son support dans Δ, et comme $\pi = \int \theta_p\, d\nu(p)$, il s'ensuit que presque tous les θ_p ont leur support dans Δ. Mais $\Delta \subset Q$, donc il y a une suite $\{g_n\}$ telle que $g_n \theta \to p_0$. Mais l'application $p \to \theta_p$ est continue et Π est compact, donc si p' est limite d'une sous-suite de $\{g_n p\}$, alors $\theta_{p'} = {}_0$. Donc $\theta_{p'}$ est une mesure ponctuelle, et il en va de même de tous les θ_p, et définit une application de Π dans M_c qui commute aux opérations de G, puisque $\theta_{p'} = p_0$, envoie Π dans M. Comme M est un espace homogène, θ est surjective ; comme θ est continue, M est nécessairement compact.

On dit qu'un espace M, où G opère, est <u>irréductible</u> si aucun sous-ensemble fermé strict de M n'est invariant par G.

COROLLAIRE. - Soit M un espace homogène où G opère, contractif et irréductible, alors M est un espace homogène compact.

En effet, dans la démonstration précédente, on a utilisé le fait que M est un espace homogène tout à fait à la fin.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Elie). - Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes, Abh. Math. Sem. Hamburg, t. 11, 1935, p. 116-162.

[2] CHEVALLEY (Claude). - Theory of Lie groups. - Princeton, Princeton University Press, 1946.

[3] DOOB (J. L.). - Stochastic processes. - New York, J. Wiley and Sons, 1953 (Wiley Publications in Statistics).

[4] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J.). - Linear operators, Part I : General theory. - New York, Interscience Publishers, 1958 (Pure and applied Mathematics, A Series of Texts and Monographs, 7).

[5] FÜRSTENBERG (H.). - A Poisson formula for semi-simple Lie groups (à paraître).

[6] GODEMENT (Roger). - Une généralisation du théorème de la moyenne pour les fonctions harmoniques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 234, 1952, p. 2137-2139.

[7] HUNT (G.). - Semigroups of measures on Lie groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 81, 1956, p. 264-293.

[8] MEYER (Paul-André). - Théorie des martingales et des semi-martingales, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, t. 5, 1960/61, n° 4, 11 p.