SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

PHILIPPE COURRÈGE
PIERRE PRIOURET

Axiomatique du problème de Dirichlet et processus de Markov

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 8 (1963-1964), exp. nº 8, p. 1-48
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1963-1964__8__A5_0>

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
8e année, 1963/64, n° 8

14 et 28 mai 1964

AXIOMATIQUE DU PROBLÈME DE DIRICHLET ET PROCESSUS DE MARKOV

par Philippe COURRÈGE et Pierre PRIOURET

On considère un processus de Markov X ayant ses trajectoires continues, et on étudie certaines relations entre le semi-groupe de transition du processus X d'une part, et d'autre part la famille de noyaux harmoniques constituée par ses répartitions de sortie des ouverts relativement compacts envisagée du point de vue d'une axiomatique (BRELOT ou BAUER) du problème de Dirichlet.

On situera, au § 1.4 ci-dessous, les problèmes envisagés de façon plus détaillée après avoir précisé la situation étudiée ici aux paragraphes 1.1, 1.2, et 1.3.

On a reporté en annexes les démonstrations de divers résultats de la théorie des processus de Markov utilisés ici, sous une forme ne figurant pas dans la littérature classique sur le sujet, et en appendices diverses questions connexes.

La matière du présent travail a fait l'objet d'exposés (en plus de ceux du Séminaire de Théorie du potentiel) aux Journées probabilistes de Rennes, en avril 1964, et au Séminaire de Probabilités, en mai 1964.

Table des matières

Deuxième partie

Propriétés de forte fellerénéité des noyaux harmoniques et de la résolvante

Troisième partie

Fonctions harmoniques

Problème de Dirichlet et régularité des points frontière

Première partie

Description de la situation étudiée.

1.0 Notations topologiques.

On désigne par E un espace localement compact à base dénombrable (L C D) non compact, par $E_\delta = E \cup \{\delta\}$ son compactifié d'Alexandrov, et par $\mathcal{U}(E)$ (ou encore $\mathcal{U}$) l'ensemble des ouverts de E relativement compacts dans E .

On désigne par ρ une distance sur E compatible avec sa topologie ; et pour $\varepsilon > 0$ et $x \in E$, on pose

$$B_\varepsilon(x) = \{y \mid y \in E \quad \text{et} \quad \rho(x , y) < \varepsilon\} .$$

Si A est un sous-ensemble de E , on désigne par ∂A la frontière de A (dans E).

On désigne par $\mathcal{B}_E$ (resp. $\mathcal{B}_{E_\delta}$) la tribu borélienne de E (resp. E_δ) et par $\overline{\mathcal{B}_E}$ (resp. $\overline{\mathcal{B}_{E_\delta}}$) sa complétée universelle, et on identifie, comme d'ordinaire, l'espace $B(E)$ des fonctions numériques boréliennes bornées sur E , au sous-espace de $B(E_\delta)$ fermé des fonctions nulles au point δ .

On désigne par $C_k(E)$ (resp. $C_0(E)$, $C_b(E)$) l'espace des fonctions numériques continues sur E , à support compact (resp. nulles à l'infini, bornées).

On désigne enfin par $B_k(E)$ l'espace des fonctions numériques sur E , boréliennes bornées et à support compact.

1.1 Familles de noyaux harmoniques.

1.1.1 Définition (1).

On appelle famille de noyaux harmoniques sur E , une famille $(\Pi_U)_{U\in\mathcal{U}(E)}$ de noyaux (positifs) sur l'espace mesurable $(E , \overline{\mathcal{B}_E})$ ayant les propriétés suivantes:

(H_1) Si $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{U}$ et $U \subset V$, alors $\Pi_V = \Pi_U \Pi_V$.

---

(1) Voir la remarque de l'appendice 2 (Ap 2.2) où est discuté le choix de cette définition.

(H_2) Pour chaque $U \in \mathcal{U}$, la mesure $\Pi_U(x\,,\,.)$ est portée par ∂U ([2]) si $x \in U$, et $\Pi_U(x\,,\,.) = \varepsilon_x$ si $x \notin U$.

(H_3) Pour chaque $U \in \mathcal{U}$ et $x \in E$, $\Pi_U(x\,,\,E) = 1$.

Les propriétés (H_2) et (H_3) permettent de noter sans ambiguïté $\Pi_U\,\varphi(x)$ l'intégrale $\int_{\partial U} \Pi_U(x\,,\,dy)\,\varphi(y)$, où φ est une fonction universellement mesurable et bornée sur ∂U, et où $x \in \overline{U}$.

1.1.2 Famille de noyaux harmoniques associée à une axiomatique de Brelot.

On se donne sur E (supposé connexe) un faisceau de fonctions continues satisfaisant aux axiomes 1.2.3 de Brelot, et on pose (avec les notations de BRELOT [2]) pour tout $U \in \mathcal{U}$ et $f \in C(E)$:

$$\Pi_U\, f(x) = \overline{H}^U_{f/\partial U}(x) \qquad \text{si } x \in U$$

$$\Pi_U\, f(x) = f(x) \qquad \text{si } x \notin U\,.$$

La famille $(\Pi_U)_{U\in\mathcal{U}}$, ainsi définie, satisfait aux propriétés (H_1) et (H_2) (voir BRELOT [2], pages 84 et 113) ; elle satisfait aussi (H_3) si les constantes sont harmoniques.

1.2 Famille de noyaux harmoniques d'un processus de Markov.

1.2.1 Processus de Markov sur E.

On désigne par ce vocable un processus de Markov homogène :

$$X = (\Omega\,,\,F\,,\,\omega_\delta\,,\,(X_t)_{t\geq 0}\,,\,(\theta_t)_{t\geq 0}\,,\,(P_x)_{x\in E_\delta})\,,$$

à valeurs dans l'espace mesurable $(E_\delta\,,\,\mathcal{B}_{E_\delta})$ ([3]), normal ($P_x\{X_0 = x\} = 1$ pour tout $x \in E_\delta$), ayant toutes ses trajectoires continues à droite et absorbées par le point δ, et fortement markovien par rapport à la famille $(\hat{F}^X_t)_{t\geq 0}$ de ses

---

([2]) ∂U désigne la frontière de U dans E.

([3]) Voir, à ce sujet, [5] chapitre IV, et [6] : X n'est pas nécessairement un processus canonique ; ω_δ est un élément de Ω tel que $X_0(\omega_\delta) = \delta$, et pour chaque $t \geq 0$, θ_t une application de Ω dans Ω telle que $X_h \circ \theta_t = X_{t+h}$ pour tout $h \geq 0$.

tribus définitives [4].

Un temps d'arrêt par rapport à la famille $(\hat{F}_t^X)$ de tribus est appelé temps d'arrêt de X.

Si $\Gamma \subset E$, on désigne par σ_Γ^X (ou σ_Γ) le temps de sortie [5] de Γ pour le processus X :

$$\sigma_\Gamma(\omega) = \inf\{t \mid 0 \leq t \leq +\infty \quad \text{et} \quad X_t(\omega) \notin \Gamma\} \qquad (\omega \in \Omega) .$$

Si $\Gamma \in \mathcal{B}_E$, σ_Γ^X est un temps d'arrêt du processus X.

On dira que la trajectoire de $\omega \in \Omega$ est continue, si l'application $t \to X_t(\omega)$ est continue en tout point $t \in [0, \sigma_E^X(\omega)[$. On dira que X <u>est continu</u> s'il a <u>toutes</u> ses trajectoires continues.

Le semi-groupe de transition de X est noté (N_t^X) [6] (ou (N_t)) ; le potentiel et la résolvante correspondants, R_0^X (ou R_0) et (R_λ^X) (ou (R_λ)) respectivement.

1.2.2 <u>Répartitions de sortie d'un processus de Markov.</u>

Soit X un processus de Markov sur E. Pour chaque $B \in \mathcal{B}_E$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{B}_E$,

---

[4] F_t^X désignant la tribu sur Ω engendrée par les variables aléatoires X_s $(s \leq t)$, la tribu $\hat{F}_t^X$ est obtenue en adjoignant à la tribu $F_{t+}^X = \bigcap_{u>t} F_u^X$ les sous-ensembles des ensembles de F_∞^X, P_μ-négligeables pour toute répartition initiale μ.

On notera que $\hat{F}_t^X$ est identique à sa complétée universelle et que $\hat{F}_t^X = \bigcap_{u>t} \hat{F}_u^X$ pour chaque $t \geq 0$, ce qui permet d'obtenir la mesurabilité des temps d'entrée au moyen du théorème de projection des ensembles mesurables (voir [5], chap. II, n° 4.7 et 5.1).

On notera aussi que ces tribus définitives ne sont exactement ni celles introduites par MEYER (voir [14], [16] et [5]) puisque l'on complète F_t^+ et non F_t, ni celles considérées par DYNKIN (voir [11] n° 3.2.1), puisque la complétion de F_t^+ est faite par rapport à $\hat{F}_\infty$ et non intrinsèquement.

[5] On notera que σ_Γ désigne le temps de sortie de Γ, et non point le temps de sortie de Γ après 0 qui sera noté ici σ_Γ^0

$$(\ \sigma_\Gamma^0(\omega) = \inf\{t \mid 0 < t < +\infty \quad \text{et} \quad X_t(\omega) \notin \Gamma\}\ ) .$$

On rappelle la convention $X_\infty(\omega) = \delta$ pour tout $\omega \in \Omega$.

[6] On notera que (N_t^X) est un semi-groupe <u>borélien</u>, puisque X est supposé à valeurs dans $(E_\delta, \mathcal{B}_{E_\delta})$.

posons :

$$(1.2.1) \qquad \Pi_B^X(x\ ,\ \Gamma) = P_x\{X_{\sigma_B} \in \Gamma\}\ .$$

Π_B^X ainsi défini est un noyau sur l'espace mesurable $(E\ ,\ \overline{\mathcal{B}}_E)$ appelé classiquement répartition de sortie de B [7] (pour le processus X) ; on notera couramment Π_B au lieu de Π_B^X si aucune confusion n'est à craindre.

Pour chaque $f \in B(E)$ et $x \in E$, on a

$$(1.2.2) \qquad \Pi_B\, f(x) = \int_E \Pi_B(x\ ,\ dy)\ f(y) = E_x\{f(X_{\sigma_B})\}\ .$$

Etudions alors dans quelle mesure la famille de noyaux $(\Pi_U^X)_{U\in\mathcal{U}(E)}$ est une famille de noyaux harmoniques sur E au sens du n° 1.1.1 :

La propriété (H_1) résulte de la propriété de Markov forte de X et de la relation $\sigma_V = \sigma_U + \sigma_V \circ \theta_{\sigma_U}$ (où $U \subset V$) [8]. La relation $\Pi_U^X(x\ ,\ .) = \varepsilon_x$ si $x \notin U$ résulte de la normalité de X et de la relation $\{X_0 \notin U\} \subset \{\sigma_U = 0\}$. Enfin, en vertu de la continuité à droite de X , quel que soit $x \in E$, la mesure $\Pi_U^X(x, .)$ est portée par $E\setminus U$.

On a, de plus, les résultats suivants relatifs aux propriétés (H_2) et (H_3) :

1.2.3 Propriété (H_2) et continuité des trajectoires.

LEMME. - Supposons que le processus X soit tel que, pour P_x-presque tout $\omega \in \Omega$ pour chaque x , la trajectoire de ω possède une limite à gauche en tout point $t \in [0\ ,\ \sigma_E(\omega)[$.

Alors, pour que la mesure $\Pi_U^X(x\ ,\ .)$ soit portée par ∂U pour tous $U \in \mathcal{U}$ et $x \in U$, il faut et il suffit que X ait ses trajectoires P_x-presque sûrement continues pour tout $x \in E$.

En outre, dans ces conditions, il existe un processus de Markov, continu, équivalent à X , et ayant mêmes répartitions de sortie.

(On trouvera une démonstration élémentaire de ce lemme en Annexe 1.)

---

[7] On aura soin de ne pas confondre la répartition de sortie de B , introduite ici, avec les "Hitting distributions" de la littérature anglo-saxonne, qui sont définies par la relation (1.2.1) où le temps de sortie σ_B est remplacé par le temps de sortie σ_B^0 après 0 .

[8] On rappelle la convention $\theta_\infty(\omega) = \omega_\delta$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Remarque 1. - Ainsi, l'existence de limites à gauche pour les trajectoires, jointe à la condition (H_2), entraîne leur continuité. En vertu de ce résultat nous considérerons, dans la suite, seulement des processus continus.

Remarque 2. - Si X est un processus continu, pour chaque $U \in \mathcal{U}$, Π_U^X est un noyau sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{B}_E)$.

1.2.4 Propriété (H_3) et comportement à l'infini des trajectoires.

LEMME. - Soit X un processus de Markov continu sur E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(H_3) Pour tout $U \in \mathcal{U}$ et $x \in E$,

$$\Pi_U^X(x, E) = P_x\{\sigma_U^X < \sigma_E^X\} = 1 .$$

(H_3') Pour tout $U \in \mathcal{U}$ et $x \in E$,

$$P_x(\bigcap_{t \in R_+} \{X_t \in U \cup \{\delta\}\}) = 0 .$$

(H_3'') P_x-presque sûrement pour tout $x \in E$, δ est point adhérent à la trajectoire de ω lorsque $t \uparrow \sigma_E(\omega)$ $(t < \sigma_E(\omega))$.

Si, de plus, pour tout $x \in E$,

$$\lim_{t \uparrow \sigma_E, t < \sigma_E} X_t \text{ existe (dans } E_\delta \text{) } P_x\text{-presque sûrement sur } \{\sigma_E < +\infty\} ,$$

ces propriétés entraînent aussi que :

(H_3''') P_x-presque sûrement pour tout $x \in E$, la trajectoire $t \to X_t(\omega)$ de ω est continue en tout $t \in [0, +\infty[$.

X possède alors la propriété de Blumenthal (autrement dit, est un processus de Hunt).

Ces propriétés réclament une simple vérification, compte tenu des relations

$$\Pi_U^X(x, E) = P_x\{\sigma_U < \sigma_E\} ,$$

$$\{\sigma_U = \sigma_E\} = \bigcap_{t \in R_+} \{X_t \in U \cup \{\delta\}\} ,$$

et

$$\{\delta \notin A_{\sigma_E}^-\} = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} \{\sigma_U = \sigma_E\} ,$$

où $\mathcal{B}$ est une base dénombrable de la topologie de E continue dans $\mathcal{U}(E)$, et où

$A_t^-(\omega)$ est l'adhérence (dans E_δ) de la trajectoire $s \to X_s(\omega)$ de ω lorsque $s \uparrow t$ $(s < t)$.

Remarque 1. - La propriété (H_3) (pour le processus X) est généralement exprimée en disant que les constantes sont harmoniques (pour le processus X). Cette terminologie est évidemment justifiée par l'introduction des fonctions harmoniques (n° 3.1.1).

Remarque 2. - Ainsi, intuitivement, la propriété (H_3) exprime, pour un processus continu, que, P_x-presque sûrement pour tout x , les trajectoires ne peuvent pas mourir en restant dans un compact de E . En particulier, si le processus continu X admet un point absorbant dans E , la famille $(\Pi_U^X)_{U\in\mathcal{U}}$ ne possède pas la propriété (H_3).

1.3 Temps moyens de sortie. Processus induits.

1.3.1 Temps moyens de sortie des ouverts pour un processus de Markov.

Soit X un processus de Markov sur E . On pose :

$$\mathfrak{M}_B^X(x) = E_x\{\sigma_B\} \qquad \text{pour chaque } B \in \mathcal{B}_E \text{ et chaque } x \in E \quad (^9).$$

La fonction $\mathfrak{M}_B^X$ sur E , ainsi définie, est appelée le temps moyen de sortie de B pour le processus X .

Si G est un ouvert de E , la continuité à droite des trajectoires de X entraîne que

$$G = \{x \mid x \in E \text{ et } \mathfrak{M}_G^X(x) > 0\} .$$

Si B_1 et B_2 sont deux sous-ensembles boréliens de E , tels que $B_1 \subset B_2$, on a, pour tout $x \in E$:

$$\mathfrak{M}_{B_1}^X(x) + \int_E \Pi_{B_1}^X(x\,,\,dy)\,\mathfrak{M}_{B_2}^X(y) = \mathfrak{M}_{B_2}^X(x) \tag{1.3.1}$$

(cette propriété résulte immédiatement de la propriété de Markov forte de X et de la relation $\sigma_{B_1} + \sigma_{B_2} \circ \theta_{\sigma_{B_1}} = \sigma_{B_2}$).

---

(9) ou encore $\mathfrak{M}_B(x)$, si aucune confusion n'est à craindre.

1.3.2 Processus induit sur un ouvert.

Soient

$$X = (\Omega \ , \ F \ , \ \omega_\delta \ , \ (X_t) \ , \ (\theta_t) \ , \ (P_x)_{x \in E_\delta})$$

un processus de Markov sur E (n° 1.2.1) et G un ouvert de E.

On définit le processus induit par X sur G comme le processus **tué au sortir** de G, autrement dit ([10]) comme le terme

$$X^G = (\Omega \ , \ F \ , \ \omega_\delta \ , \ (X_t^G) \ , \ (\theta_t^G) \ , \ (P_x)_{x \in G \cup \{\delta\}}) \ ,$$

où

$$X_t^G(\omega) = X_t(\omega) \quad \text{et} \quad \theta_t^G(\omega) = \theta_t(\omega) \qquad \text{si} \quad t < \sigma_G(\omega) \ ,$$

et

$$X_t^G(\omega) = \delta \quad \text{et} \quad \theta_t^G(\omega) = \omega_\delta \qquad \text{si} \quad t \geq \sigma_G(\omega) \qquad (\omega \in \Omega).$$

X^G est un processus de Markov sur l'espace L C D G (au sens donné à ce vocable au n° 1.2.1), continu en même temps que X.

Si $U \in \mathcal{U}(E)$ est tel que $\overline{U} \subset G$, on a évidemment

$$\Pi_U^{X^G}(x \ , \ .) = \Pi_U^X(x \ , \ .) \quad \text{et} \quad \mathfrak{m}_U^{X^G}(x) = \mathfrak{m}_U^X(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in G \ .$$

1.3.3 Potentiels de Green et temps moyens de sortie.

Si G est un ouvert de E, désignons respectivement par R_0^G, (R_λ^G), (N_t^G) le potentiel, la résolvante, et le semi-groupe de transition du processus X^G induit par X sur G (n° 1.3.2).

Si f est une fonction borélienne positive sur G, on a

$$(1.3.2) \qquad R_0^G f(x) = E_x\{ \int_0^{\sigma_G} f(X_t) \, dt\} \qquad \text{pour tout} \quad x \in G \ .$$

De plus, en prolongeant le noyau R_0^G à $(E \ , \ \mathcal{B}_E)$ par 0 en dehors de G (ce que nous ferons dans la suite), cette relation subsiste pour tout $x \in E$.

Si G_1 et G_2 sont deux ouverts de E tels que $G_1 \subset G_2$, et si f est une fonction borélienne positive sur E,

---

([10]) Voir à ce sujet [6], ou [11] page 418.

(1.3.3) $$R_0^{G_1} f(x) + \Pi_{G_1} R_0^{G_2} f(x) = R_0^{G_2} f(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in E$$

(même démonstration que pour la relation (1.3.1)). En particulier, si $U \in \mathcal{U}$:

(1.3.4) $R_0^U f(x) + \Pi_U R_0 f(x) = R_0 f(x)$ pour tout $x \in E$ (avec $R_0 = R_0^E$).

Par référence au cas newtonien, R_0^G peut être appelé le noyau (ou potentiel) de Green de l'ouvert G (par rapport au processus X).

Ainsi, le temps moyen de sortie de G (pour X) est identique au potentiel de Green (de G) de la fonction 1 .

1.4 Position du problème.

On considère un processus de Markov continu X sur E pour lequel les constantes sont harmoniques (la famille $(\Pi_U^X)_{U \in \mathcal{U}}$ de répartitions de sortie de X (n°1.2.2) est alors une famille de noyaux harmoniques sur E (n° 1.1.1 et 1.2.2 à 1.2.5)) ; on suppose que, pour chaque ouvert relativement compact U de E , la fonction $\mathcal{T}_U^X$ (n° 1.3.1) est bornée et continue sur U .

On cherche alors à évaluer en termes du processus X , si possible au moyen de son semi-groupe de transition, certaines propriétés de la famille $(\Pi_U^X)_{U \in \mathcal{U}}$ de noyaux harmoniques associée à X qui interviennent dans le cas d'une axiomatique du problème de Dirichlet (n° 1.1.2) ; plus précisément, on étudie :

- dans la 2° partie, la forte felleréneité des Π_U^X en relation avec celle de la résolvante de X ; résultats principaux aux n° 2.1.3, 2.1.7 et 2.2.1.
- dans la 3° partie, la résolution du problème de Dirichlet :
  - fonctions harmoniques, caractère local, méthode alternée (n° 3.1.2),
  - conditions diverses de régularité des points frontière (n° 3.2.2),
  - recherche d'ouverts réguliers (n° 3.3.2),
  - processus induit sur un ouvert régulier (n° 3.4.1).
- dans l'appendice 1, on reprend le résultat classique de DOOB sur la convergence stochastique à la frontière.
- enfin dans l'appendice 2, on montre comment la famille (Π_U^X) et la fonction $\mathcal{T}_E^X$ déterminent le processus X .

Historiquement, l'idée de calculer la valeur en x de la solution du problème de Dirichlet en évaluant la valeur moyenne de la donnée frontière aux divers points d'atteinte de cette dernière pour une catégorie de trajectoires données au hasard à partir de x (formule 1.2.2, n° 1.2.2) est bien antérieure à la définition précise des processus de Markov et était déjà connue, par exemple de LEVY et WIENER avant 1930. DOOB a développé la théorie dans le cas du mouvement brownien ([7], [8] et [9]), puis l'école de DYNKIN (GIRSANOV, FREJDLIN, KHAS'MINSKIJ, ŠUR) dans le cas des processus de diffusion canoniques et des processus fortement felleriens. Tous ces résultats sont établis par DYNKIN dans son dernier livre ([11], chapitres 12 et 13) dans le cadre le plus général.

Notre objectif ici est de reprendre ces résultats, de les prolonger, et de les présenter de façon autonome ([11]), en particulier indépendante de la théorie des fonctions excessives, en travaillant avec l'hypothèse de forte fellerénéité des noyaux harmoniques (ou de la résolvante, voir la 2° partie) plutôt qu'avec des hypothèses sur le semi-groupe.

Deuxième partie

Propriétés de forte fellerénéité des noyaux harmoniques et de la résolvante.

2.1 Un premier résultat : Cas où $\mathfrak{M}_E = R_0 f$ est continue bornée.

2.1.1 Noyaux fortement felleriens.

Soient N un noyau (positif) borné sur $(E, \mathcal{B}_E)$ et G un ouvert de E. On dira que N est fortement fellerien sur G, si la fonction Nf est continue sur G pour toute fonction numérique positive f sur E borélienne et bornée ([12]). Si N est fortement fellerien sur E, on dira simplement que N est fortement fellerien.

$(\Pi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ étant une famille de noyaux harmoniques sur E, considérons la propriété suivante :

(F F) Pour tout $U \in \mathcal{U}(E)$, le noyau Π_U est fortement fellerien sur U.

Cette propriété est vérifiée si (Π_U) est associée à une axiomatique de Brelot

---

([11]) Ni la connaissance du livre de DYNKIN, ni celle de la théorie de HUNT ne sont requises.

([12]) Nf est alors continue sur G pour toute fonction numérique positive f sur E, universellement mesurable et bornée ; voir l'annexe 5.

sur E (n° 1.1.2). Comme elle joue un rôle important (voir la 3° partie) pour l'étude des fonctions harmoniques, nous allons étudier d'abord son expression en termes de semi-groupes.

2.1.2 Locale continuité d'un semi-groupe sous-markovien.

On dira qu'un semi-groupe $(N_t)_{t>0}$ de noyaux sous-markoviens sur E est localement continu s'il possède la propriété (C L) ci-dessous :

(C L) Pour toute fonction $f \in C_K(E)$, $\lim\limits_{t\downarrow 0} N_t f(X) = f(X)$ uniformément sur tout compact de E .

On trouvera, dans l'annexe 2, diverses formes équivalentes de cette propriété.

2.1.3 Enoncé du théorème.

Pour une famille de noyaux harmonique associée à un processus de Markov continu convenable, la propriété (F F) (n° 2.1.1) équivaut à la forte felleréneité de la résolvante :

THÉORÈME. - Soit X un processus de Markov continu sur E , pour lequel les constantes sont harmoniques (n° 1.2.4), et dont le semi-groupe de transition est localement continu (n° 2.1.2).

On suppose, de plus, que la fonction $\mathfrak{M}_E^X = R_0^X 1$ est bornée et continue sur E . Alors, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(F F) Pour chaque $U \in \mathcal{U}(E)$, le noyau Π_U^X est fortement fellerien sur U .

(F F') Le noyau potentiel R_0^X est borné et fortement fellerien (sur E).

(F F") Pour chaque $\lambda > 0$, le noyau R_λ^X est fortement fellerien (sur E).

Remarque 1. - Toutes les hypothèses ne sont pas indispensables pour établir chacune des implications intervenant dans la conclusion ; pour plus de détails, voir les résultats partiels énoncés au cours de la démonstration (n° 2.1.4 à 2.1.7).

Remarque 2. - Le semi-groupe construit par MEYER dans [3] (théorème 3, page 369) satisfait aux hypothèses du théorème précédent.

Remarque 3. - Sous les hypothèses du théorème, si le processus X possède la propriété (F F), la fonction $\mathfrak{M}_U^X$ est bornée et continue sur U pour tout $U \in \mathcal{U}(E)$ ainsi que cela résulte de la relation $\mathfrak{M}_U = \mathfrak{M}_E - \Pi_U \mathfrak{M}_E$ (n° 1.3.1).

La démonstration de ce premier théorème va reposer, pour la relation

$$(F\,F) \implies (F\,F')$$

sur le caractère surharmonique du potentiel $R_0 f$ $(f \in B(E))$, pour la relation (F F') $\Longrightarrow$ (F F") sur l'équation résolvante ; enfin, pour la relation (F F") $\Longrightarrow$ (F F) sur la méthode d'adjonction d'une variable temporelle indépendante du processus, méthode déjà utilisée par MEYER dans [14].

Ces résultats partiels peuvent être présentés comme suit :

2.1.4 Surharmonicité des potentiels $R_0 f$ $(f \in B(E))$.

LEMME. - Soient X un processus de Markov, et f une fonction borélienne et positive sur E. Alors :

(1) Pour tout $x \in E$ et $U \in \mathcal{U}(E)$, $\Pi_U R_0 f(x) \leqslant R_0 f(x)$.

(2) Si, de plus, f est bornée et si $x \in E$ est tel que $R_0 f(x) < +\infty$, $\mathfrak{M}_W(x) < +\infty$ pour un voisinage W de x, et $\mathfrak{M}_{\{x\}}(x) = 0$, alors

$$\sup_{x \in U \in \mathcal{U}(E)} \Pi_U R_0 f(x) = R_0 f(x) .$$

En effet, on a (n° 1.3.3, relations 1.3.2 et 1.3.4) :

$$E_x\{\int_0^{\sigma_U} f(X_t)\, dt\} + \Pi_U R_0 f(x) = R_0 f(x) \; ; \tag{2.1.1}$$

d'où la propriété (1). Pour montrer la propriété (2), considérons une suite décroissante (U_n) de voisinages de x appartenant à $\mathcal{U}$, contenus dans W, et tels que $\bigcap_n U_n = \{x\}$; puisque $R_0 f(x) < +\infty$, on a,

$$R_0 f(x) - \Pi_{U_n} R_0 f(x) = E_x\{\int_0^{\sigma_{U_n}} f(X_t)\, dt\} \leqslant \|f\|\, E_x\{\sigma_{U_n}\} = \|f\|\, \mathfrak{M}_{U_n}(x) \; ;$$

d'où le résultat, d'après le théorème de Lebesgue, puisque

$$\sigma_{\{x\}} = \inf_n \sigma_{U_n} \qquad \text{et} \qquad E_x\{\sigma_{U_n}\} \leqslant E_x\{\sigma_W\} < +\infty .$$

2.1.5 Condition $\mathfrak{M}_{\{x\}}(x) = 0$ $(x \in E)$, continuité des trajectoires et harmonicité des constantes.

LEMME. - Soit X un processus continu sur E pour lequel les constantes sont harmoniques. Alors

$$\mathfrak{M}_{\{x\}}(x) = E_x\{\sigma_{\{x\}}\} = 0 \qquad \text{pour tout } x \in E .$$

En effet, d'une part l'harmonicité des constantes (lemme 1.2.4, condition (H_3'')) et la continuité des trajectoires entraînent que

$$X_{\sigma_{\{x\}}} = x \quad P_x\text{-presque sûrement} \qquad \text{pour tout} \quad x \in E \;.$$

D'autre part, $\sigma_{\{x\}} \circ \theta_{\sigma_{\{x\}}} = 0$ P_x-presque sûrement, par définition de $\sigma_{\{x\}}$. Enfin, d'après la propriété de Markov forte de X, on a :

$$P_x\{\sigma_{\{x\}} \circ \theta_{\sigma_{\{x\}}} = 0\} = E_x\{P_{X_{\sigma_{\{x\}}}}\{\sigma_{\{x\}} = 0\}\} \;;$$

d'où le lemme annoncé.

Remarque. - Intuitivement, le lemme précédent signifie qu'un processus de Markov continu, qui ne saute pas immédiatement au point δ (ce qu'assure l'harmonicité des constantes), ne peut stationner en un point x, car il ne serait pas markovien au moment de "décoller" de x.

2.1.6 LEMME. - Soit X un processus de Markov continu pour lequel les constantes sont harmoniques, et la fonction $\mathfrak{M}_E^X$ est bornée et continue sur E. Alors,

$$(F\,F) \implies (F\,F') \qquad \text{et} \qquad (F\,F') \implies (F\,F'') \qquad (^{13}).$$

En effet, si la fonction $\mathfrak{M}_E = R_0\,1$ est bornée sur E, $R_0\,f$ est bornée pour toute fonction $f \in B(E)$, et $\mathfrak{M}_U$ est bornée pour tout $U \in \mathfrak{U}$. En vertu de l'harmonicité des constantes et des lemmes 2.1.4 et 2.1.5, on a donc, pour $f \in B(E)$, $f \geqslant 0$, et $x \in E$,

$$R_0\,f(x) = \sup_{x \in U \in \mathfrak{U}(E)} \Pi_U\,R_0\,f(x) \;.$$

Il en résulte que, si chaque Π_U est fortement fellerien sur U, $R_0\,f$ est semi-continue inférieurement pour tout $f \in B(E)$, $f \geqslant 0$. Prenons alors $f \in B(E)$ telle que $0 \leqslant f \leqslant 1$; on a

$$R_0\,1 = R_0\,f + R_0(1 - f) \;;$$

d'où la continuité de $R_0\,f$, en vertu de celle de $R_0\,1$ (14).

Enfin, l'équation résolvante

---

(13) La relation $(F\,F') \implies (F\,F'')$ est satisfaite pour n'importe quel processus de Markov.

(14) Si la somme de deux fonctions semi-continues inférieurement est continue, ces fonctions sont aussi continues.

$$R_\lambda f = R_0 f - \lambda R_0 R_\lambda f \quad [15]$$

$(f \in B(E)\ ,\ \lambda > 0)$ montre que

$$(F\ F') \implies (F\ F'') .$$

C. Q. F. D.

2.1.7 $(F\ F'') \implies (F\ F)$: adjonction d'une variable temporelle indépendante du processus.

Désignons par μ la mesure sur R^+ de densité e^{-t} : $\mu(dt) = e^{-t}\,dt$; et soient $U \in \mathcal{U}(E)$ et $f \in B(E)$. Nous allons approcher

$$\Pi_U f(x) = E_x\{f(X_{\sigma_U})\} = \int_\Omega P_x(d\omega) \int_0^{+\infty} \mu(dt)\ f(X_{\sigma_U}(\omega))$$

par

$$h_\lambda(x) = \int_\Omega P_x(d\omega) \int_0^{+\infty} \mu(dt)\ f(X_{(t/\lambda)+\sigma_U(\theta_{t/\lambda}(\omega))}(\omega))$$

en faisant tendre λ vers l'infini.

Remarquons d'abord que

$$X_{s+\sigma_U(\theta_s(\omega))}(\omega) = X_{\sigma_U}(\theta_s(\omega)) ;$$

donc, $s\ ,\ \omega \to \theta_s(\omega)$ étant $(\mathcal{B}_{R_+} \otimes F_\infty)$-mesurable sur $R_+ \times \Omega$, puisque

$$s\ ,\ \omega \to X_{s+h}(\omega) \qquad (h \geqslant 0)$$

l'est, il en est de même de $s\ ,\ \omega \to \Phi(\theta_s(\omega))$ pour tout Φ F_∞-mesurable sur Ω ; $h_\lambda(x)$ est donc bien défini, et on a :

$$\begin{aligned} h_\lambda(x) &= E_x\{\int_0^{+\infty} \mu(dt)\ f \circ X_{\sigma_U} \circ \theta_{t/\lambda}\} \\ &= E_x\{\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}\, ds\ f \circ X_{\sigma_U} \circ \theta_s\} \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}\, ds\ E_x\{f \circ X_{\sigma_U} \circ \theta_s\} \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}\, ds\ E_x\{E_{X_s}\{f \circ X_{\sigma_U}\}\} = R_\lambda \Pi_U f(x) , \end{aligned}$$

---

[15] La relation $R_\lambda f(x) + \lambda R_0 R_\lambda f(x) = R_0 f(x)$ est satisfaite pour chaque fonction borélienne bornée positive telle que $R_0 f(x) < +\infty$.

d'après la propriété de Markov (en particulier, si R_λ est fortement fellerien, h_λ est continue).

Evaluons maintenant

$$\Pi_U f(x) - h_\lambda(x) = \Pi_U f(x) - h_\lambda(x) = \int_\Omega P_x(d\omega) \int_0^{+\infty} \mu(dt)[f(X_{\sigma_U}(\omega)) - f\circ X_{\sigma_U}(\theta_{t/\lambda}(\omega))] \,;$$

donc, puisque $\sigma_U(\omega) > t/\lambda$ entraîne que

$$\sigma_U(\omega) = t/\lambda + \sigma_U(\theta_{t/\lambda}(\omega)) \,,$$

$$|\Pi_U f(x) - h_\lambda(x)| \leqslant 2\|f\| \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt\; P_x\{\sigma_U \leqslant t/\lambda\} \,.$$

En majorant l'intégrale du second membre par

$$(\lambda \int_0^\alpha e^{-\lambda t}\, dt)\; P_x\{\sigma_U \leqslant \alpha/\lambda\} + \lambda \int_\alpha^{+\infty} e^{-\lambda t}\, dt \leqslant P_x\{\sigma_U \leqslant \alpha/\lambda\} + e^{-\lambda\alpha} \,,$$

et en utilisant la propriété de locale uniformité des temps de sortie (annexe 3, relation A.3.2), on obtient la convergence uniforme locale sur U de h_λ vers $\Pi_U f$ lorsque λ tend vers $+\infty$, sous la condition de locale continuité (n°2.1.2) du semi-groupe (N_t^X).

Enfin, en remarquant que $\Pi_U f$ ne dépendant, sur $\bar{U}$, que des valeurs de f sur ∂U, on peut supposer f, donc $\Pi_U f$, à support dans $\bar{U}$; on est conduit au résultat suivant, qui permet d'achever la démonstration du théorème 2.1.3 :

THÉORÈME. - Soit X un processus de Markov continu sur E, dont le semi-groupe de transition est <u>localement continu</u>.

Alors, pour que X possède la propriété (F F) (n° 2.1.3), <u>il suffit</u> qu'il possède la propriété suivante :

($F\,F''_K$) Pour tout $\lambda > 0$, et toute fonction $f \in B_K(E)$ [16], $R_\lambda f$ est une fonction continue.

<u>Remarque</u>. - On pourrait systématiser la méthode employée ci-dessus en introduisant un nouveau processus de Markov $\hat{X}$ obtenu à partir du processus

$$X = (\Omega\,,\ F\,,\ \omega_\delta\,,\ (X_t)\,,\ (\theta_t)\,,\ (P_x))\,,$$

en posant :

$$\hat{\Omega} = \Omega \times R_+$$

---

[16] Voir le § 1.0.

$$\hat{F} = F \times \mathcal{B}_{R_+}$$

$$\omega_\delta = (\omega_\delta \ , \ 0)$$

$$\hat{X}_t(\omega \ , \ s) = X_t(\omega)$$

$$\hat{\theta}_t(\omega \ , \ s) = (\theta_t(\omega) \ , \ s)$$

$$\hat{P}_x = P_x \otimes \mu \ .$$

Nous n'utiliserons pas le processus $\hat{X}$ ici (voir à ce sujet [14], 1° partie, §3).

2.1.8 Application du théorème 2.1.7 : Cas des processus fortement felleriens.

Conformément à la terminologie employée par l'école de DYNKIN (voir [11], n°2.12, page 90), un processus de Markov sur E est dit fortement fellerien si, pour chaque $t > 0$, le noyau N_t^X est fortement fellerien (sur E). Alors, pour chaque $\lambda > 0$, le noyau R_λ^X est aussi fortement fellerien, et le théorème 2.1.7 admet le corollaire immédiat suivant (voir à ce sujet [11], n° 13.3, page 533) :

THÉORÈME. - Soit X un processus de Markov continu et fortement fellerien sur E, dont le semi-groupe de transition est localement continu.

Alors, pour tout $U \in \mathcal{U}(E)$, le noyau Π_U^X est fortement fellerien sur U.

Remarque 1. - On notera qu'intervient comme hypothèse, en plus de la condition (M) (voir l'annexe 2), la condition (M_1) qui n'apparaît pas dans les énoncés de DYNKIN (théorèmes 13.1 et 13.2 de [11]).

Cette divergence provient de la démonstration du lemme sur la locale uniformité des temps de sortie (annexe 3 et lemme 13.2 de [11]) ; chez DYNKIN, ce lemme repose sur le lemme 6.3 de [10] (page 149), lemme pour la démonstration duquel il nous semble difficile de se passer de la condition (M_1) (voir les annexes 2 et 3).

Remarque 2. - Ainsi que le montre l'exemple du mouvement uniforme sur R, un processus de Markov peut posséder une résolvante fortement fellerienne (propriété (F F")) sans être fortement fellerien.

2.2 Cas où le noyau potentiel est continu ($R_0(C_K) \subset C$).

2.2.1 Enoncé du théorème.

Le théorème 2.1.3 exige que le noyau potentiel R_0 soit borné. Cette condition est satisfaite, par exemple, dans le cas où X est le processus induit (n° 1.3.2) par le mouvement brownien sur un ouvert borné de R^n $(n \geq 3)$. Par contre, elle ne l'est évidemment pas pour le mouvement brownien (sur R^n) lui-même. D'où l'utilité, pour assumer ce dernier cas, de remplacer l'hypothèse sur $\mathfrak{M}_E$ par une autre hypothèse plus locale, par exemple $R_0(C_K) \subset C$. Ceci nous conduit au deuxième résultat suivant :

THÉORÈME. - Soit X un processus de Markov continu sur E (n° 1.2.1) pour lequel les constantes sont harmoniques et dont le semi-groupe de transition est localement continu. On suppose, de plus, que le noyau potentiel R_0^X est continu $(R_0^X(C_K^+(E)) \subset C(E))$ [17].

Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(F F) Pour tout $U \in \mathcal{U}(E)$, le noyau Π_U^X est fortement fellerien sur U (n° 2.1.1).

(F F_K'') Pour tout $\lambda > 0$, et toute fonction $f \in B_K(E)$ [18], $R_\lambda f$ est une fonction continue.

La démonstration de ce théorème va reposer sur les lemmes qui ont conduit au théorème 2.1.3, ainsi que sur le suivant, qui permet de se ramener au processus induit sur un ouvert relativement compact.

2.2.2 Régularité des temps moyens de sortie des ouverts relativement compacts et continuité du potentiel.

LEMME. - Soit X un processus de Markov continu sur E, ayant la propriété (F F), et tel que le noyau potentiel R_0^X soit continu. Alors, pour tout $U \in \mathcal{U}(E)$, la fonction $\mathfrak{M}_U^X$ est bornée et continue sur U.

Soit, en effet, $U \in \mathcal{U}(E)$, et $f \in C_K^+(E)$ telle que $0 \leq f \leq 1$, et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \bar{U}$. On a (n° 1.3.3, relation 1.3.4) :

$$\begin{aligned} R_0 f(x) &= E_x\{\int_0^{\sigma U} f(X_t)\, dt\} + \Pi_U R_0 f(x) \\ &= \mathfrak{M}_U(x) + \Pi_U R_0 f(x), \end{aligned}$$

puisque $t < \sigma_U$ entraîne que $X_t \in U$, donc que $f(X_t) = 1$.

---

[17] Remarque analogue à la remarque 1 suivant le théorème 2.1.3.
[18] Voir le § 1.0.

D'où le résultat, puisque $R_0 f$ étant localement bornée, $\Pi_U R_0 f$ est continue sur U, et $\mathfrak{M}_U = R_0 f - \Pi_U R_0 f$.

2.2.3 LEMME. - Soit X un processus de Markov continu pour lequel les constantes sont harmoniques et le noyau potentiel R_0^X continu. Alors

$$(F\ F) \implies (F\ F_K'') .$$

En effet, supposons que X possède la propriété $(F\ F)$, et soit $f \in B_K^+(E)$:

Si $U \in \mathcal{U}$, le processus X^U, induit par X sur U, satisfait aux hypothèses du lemme 2.1.6 ; donc, d'après ce lemme, $R_\lambda^U f$ est continue sur U. On en déduit, par considération d'une suite (U_n) croissant vers E, que

$$R_\lambda f = \sup_n R_\lambda^{U_n} f$$

est semi-continue inférieurement sur E. Il existe donc une suite croissante (g_n) de fonctions de $C_K^+(E)$ telle que $R_\lambda f = \sup_n g_n$; d'où on déduit, d'après la continuité de R_0, que

$$R_0 R_\lambda f = \sup_n R_0 g_n$$

est aussi semi-continue inférieurement. L'équation résolvante

$$R_\lambda f + \lambda R_0 R_\lambda f = R_0 f \quad (^{19})$$

montre alors, toujours compte tenu de la continuité de R_0, que la fonction $R_\lambda f$ est continue si $f \in C_K^+(E)$. Si, maintenant, f est seulement dans $B_K^+(E)$, il suffit, pour conclure, de considérer $g \in C_K^+(E)$ telle que $g \geqslant f$ et d'écrire

$$R_\lambda g = R_\lambda f + R_\lambda(g - f) .$$

Compte tenu du théorème 2.1.7, le théorème 2.2.1 est ainsi complètement établi.

2.2.4 <u>Une condition suffisante de continuité du potentiel</u>.

Le lemme suivant fournit, en quelque sorte, une réciproque au lemme 2.2.2 :

LEMME. - Soit X un processus de Markov continu sur E, ayant la propriété $(F\ F)$, ainsi que la propriété suivante : Il existe une suite croissante (U_n)

---

(19) Voir la note (15) au n° 2.1.6.

d'ouverts relativement compacts telle que $E = \bigcup_n U_n$, et $\mathfrak{M}_{U_n}$ est continue bornée pour tout n , et une suite croissante (f_n) de fonctions de $C_K^+(E)$ telle que $1 = \sup_n f_n$, et $R_0 f_n$ est finie continue pour tout n .

Alors, $R_0 f$ est continue pour tout $f \in C_K^+(E)$.

(Démonstration conjuguant les arguments utilisés pour établir les lemmes 2.2.2 et 2.2.3 ci-dessus.)

Troisième partie

Fonctions harmoniques. Problème de Dirichlet et régularité des points frontière.

3.1 Fonctions harmoniques associées à une famille de noyaux harmoniques ; caractère local.

3.1.1 Définitions.

Soient $(\Pi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ une famille de noyaux harmoniques sur E , et G un ouvert de E . On dit qu'une fonction numérique f , définie dans G , est harmonique dans G (par rapport à la famille (Π_U)) si elle est universellement mesurable et localement bornée et si, pour chaque $U \in \mathcal{U}$ tel que $\overline{U} \subset G$,

$$(3.1.1) \qquad \int_{\partial U} \Pi_U(x , dy)\, f(y) = f(x) \qquad \text{pour tout } x \in U .$$

A cause de la propriété (H_2) de la famille (Π_U) , on peut considérer Π_U comme un noyau sur $(G , \overline{\mathcal{B}_G})$, et la relation (3.1.1) entraîne alors que $\Pi_U f(x) = f(x)$ pour tout $x \in G$.

La propriété (H_3) de la famille (Π_U) signifie que les fonctions constantes sont harmoniques (n° 1.2.4, remarque 1).

La propriété (H_1) entraîne que, si f est universellement mesurable et localement bornée, $\Pi_U f$ est harmonique dans U .

Si la famille (Π_U) de noyaux harmoniques possède la propriété (F F) (autrement dit (n° 2.1.1), si le noyau Π_U est fortement fellerien sur U pour tout $U \in \mathcal{U}(E)$), alors toute fonction harmonique est continue.

Si f est harmonique par rapport à la famille de noyaux harmoniques (Π_U^X) associée à un processus de Markov (continu) X , on dit que f est harmonique par rapport à X .

3.1.2 Caractère local de l'harmonicité.

Une famille $(\Pi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ de noyaux harmoniques sur E étant donnée, on peut associer à chaque ouvert G de E l'espace vectoriel $\mathcal{H}_G$ des fonctions harmoniques sur G (par rapport à la famille (Π_U)). Il se pose alors le problème de savoir dans quelle mesure la famille $(\mathcal{H}_G)_{G \text{ ouvert de } E}$ satisfait au premier axiome de BRELOT (voir [1], page 61).

Le caractère héréditaire à gauche est clair.

La condition $\mathcal{H}_G \subset C(G)$ pour tout G est satisfaite si la famille (Π_U) possède la propriété (F F) (n° 2.1.1).

Enfin, le caractère local est respecté dans le cas des fonctions harmoniques d'un processus de Markov continu, conformément au théorème suivant :

THÉORÈME. - Soient X un processus de Markov continu sur E pour lequel les constantes sont harmoniques, et G un ouvert de E . Pour qu'une fonction numérique f continue sur G soit harmonique dans G , il faut et il suffit que chaque point de G possède un voisinage ouvert dans lequel f est harmonique.

On peut déduire ce théorème d'un résultat de ŠUR sur le caractère local des fonctions excessives (voir [17]).

Nous allons reprendre ici (voir le n° 3.1.4) la démonstration [20] de ŠUR, en dégageant au préalable la méthode alternée sur laquelle elle repose :

3.1.3 Propriété (H_4) et calcul de $\Pi_{U_1\cup U_2}$ en fonction de Π_{U_1} et Π_{U_2} : méthode alternée.

$(\Pi_U)_{U\in\mathcal{U}(E)}$ étant une famille de noyaux harmoniques sur E , la possibilité de calculer $\Pi_{U_1\cup U_2}$ en fonction de Π_{U_1} et Π_{U_2} par la méthode alternée s'exprime par la propriété suivante :

(H_4) Si $U_1 \in \mathcal{U}(E)$, $U_2 \in \mathcal{U}(E)$, et si f est une fonction borélienne bornée sur E , dont la restriction à $\partial U_1 \cup \partial U_2$ est continue, alors,

$$\Pi_{U_1\cup U_2} f(x) = \lim_{p\to\infty} (\Pi_{U_1} \Pi_{U_2})^p f(x) \qquad \text{pour tout } x \in E . \tag{3.1.2}$$

---

[20] L'harmonicité des constantes, jointe à la continuité de X , remplace ici la propriété de Blumenthal postulée par ŠUR.

On peut alors énoncer :

THÉORÈME. - Soit X un processus de Markov <u>continu</u> sur E pour lequel les constantes sont harmoniques. La famille $(\Pi_U^X)_{U \in \mathcal{U}(E)}$ de noyaux harmoniques associée à X possède la propriété (H_4).

Pour établir ce théorème, définissons une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt du processus X en posant :

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sigma_{U_1} \\
T_2 &= T_1 + \sigma_{U_2} \circ \theta_{T_1} \\
&\cdots \\
T_{2p+1} &= T_{2p} + \sigma_{U_1} \circ \theta_{T_{2p}} \\
T_{2p+2} &= T_{2p+1} + \sigma_{U_2} \circ \theta_{T_{2p+1}} \\
&\cdots
\end{aligned}$$

(T_2 est le premier instant de sortie de U_2 après $T_1 = \sigma_{U_1}$, etc.).

D'une part, à cause de la continuité des trajectoires du processus X , on a :

$$\sigma_U = \sup_n T_n .$$

D'autre part, si $T_{n+1} = T_n + \sigma_{U_i} \circ \theta_{T_n}$, on a, pour $x \in E$,

$$\begin{aligned}
E_x\{f(X_{T_{n+1}})\} &= E_x\{f \circ X_{\sigma_{U_i}} \circ \theta_{T_n}\} \\
&= E_x\{E_{X_{T_n}}\{f \circ X_{\sigma_{U_i}}\}\} ,
\end{aligned}$$

d'après la propriété de Markov forte de X :

$$= \int_{\{T_n < \sigma_E\}} \Pi_{U_i} f(X_{T_n})\, dP_x = E_x\{\Pi_{U_i} f(X_{T_n})\} ,$$

puisque $P_x\{T_n < \sigma_E\} \geqslant P_x\{\sigma_U < \sigma_E\} = 1$, d'après l'harmonicité des constantes et la relation $\sigma_U \geqslant T_n$.

On en déduit que

$$E_x\{f(X_{T_{2(p+1)}})\} = E_x\{\Pi_{U_1} \Pi_{U_2} f(X_{T_{2p}})\}$$

pour tout $p \geqslant 0$, donc, par récurrence sur p , que

$$E_x\{f(X_{T_{2p}})\} = (\Pi_{U_1}\ \Pi_{U_2})^p\ f(x)\ .$$

La relation (3.1.2) est alors conséquence de la relation $\sigma_U = \sup\limits_n T_n$, compte tenu de l'harmonicité des constantes, et de la continuité de X et f .

C. Q. F. D.

3.1.4 Démonstration du théorème 3.1.2.

Le théorème 3.1.2 peut être déduit du théorème 3.1.3 comme suit : on se ramène d'abord sans difficulté à montrer que si f , définie sur $G_1 \cup G_2$, est harmonique dans G_1 et dans G_2 , f est aussi harmonique dans $G_1 \cup G_2 = G$.

Supposons donc que f soit harmonique dans G_1 et dans G_2 , et soit $U \in \mathcal{U}(E)$ tel que $\overline{U} \subset G_1 \cup G_2$. Il existe deux ouverts U_1 et U_2 de $\mathcal{U}(E)$ tels que $\overline{U_i} \subset G_i$ $(i = 1\ ,\ 2)$ et $U = U_1 \cup U_2$. L'harmonicité de f dans G_1 et dans G_2 entraîne alors (par récurrence sur p) que

$$(\Pi_{U_1}\ \Pi_{U_2})^p\ f(x) = f(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in G\ ;$$

donc aussi que

$$\Pi_U\ f(x) = f(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in G\ ,$$

d'après la relation (3.1.2) (théorème 3.1.3).

C. Q. F. D.

3.2 Résolution du problème de Dirichlet ; régularité des points frontière.

3.2.1 Position du problème : propriété (H_5) et unicité de la solution.

Soient (Π_U) une famille de noyaux harmoniques sur E , $U \in \mathcal{U}$, et φ une fonction numérique continue sur ∂U . Une solution du problème de Dirichlet sur U (relatif à la famille (Π_U)) correspondant à la donnée frontière φ est une fonction f définie et continue sur $\overline{U}$, harmonique dans U , et prolongeant φ .

Pour étudier l'unicité d'une telle solution, introduisons la propriété suivante :

(H_5) Pour tout $U \in \mathcal{U}$, et toute suite (U_n) d'ouverts croissant vers U ,

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{U_n}\ f(x) = \Pi_U\ f(x)$$

pour tout $x \in E$ et toute fonction $f \in C_K(E)$.

On a alors le théorème d'unicité :

THÉORÈME. - Soit (Π_U) une famille de noyaux harmoniques sur E ayant la propriété (H_5) ci-dessus. Alors, si $U \in \mathcal{U}(E)$ et $\varphi \in C(\partial U)$, il existe au plus une solution du problème de Dirichlet sur U correspondant à la donnée frontière φ , et on a, si f est une telle solution,

$$f(x) = \int_{\partial U} \Pi_U(x , dy)\, f(y) = \Pi_U\, \varphi(x) \qquad \text{pour tout } x \in \bar{U} .$$

Démonstration immédiate en considérant une suite (U_n) d'ouverts de $\mathcal{U}(E)$ croissant vers U et telle que $\overline{U_n} \subset U$ pour tout n .

En outre,

LEMME. - La propriété (H_5) est satisfaite pour la famille (Π_U^X) des répartitions de sortie d'un processus de Markov continu X pour lequel les constantes sont harmoniques.

En effet, la continuité de X entraîne d'abord que $\sigma_U = \sup_n \sigma_{U_n}$, puis le résultat, puisque $P_x\{\sigma_U < \sigma_E\} = 1$ en vertu de l'harmonicité des constantes.

3.2.2 Diverses conditions de régularité des points frontière d'un ouvert.

Le théorème 3.2.1 ramène la recherche d'une solution du problème de Dirichlet (relatif à la famille (Π_U)) à l'étude du comportement à la frontière de U de la fonction $\Pi_U\, \varphi$.

Conformément à la terminologie classique sur ce sujet (voir BRELOT [2], 4°partie n° 29, page 114), si $U \in \mathcal{U}(E)$, nous dirons qu'un point $a \in \partial U$ est régulier pour U (par rapport à la famille (Π_U) de noyaux harmoniques sur E) si :

(R D) [21] $\qquad$ Pour tout $\varphi \in C(\partial U)$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in U}} \Pi_U\, \varphi(x) = \varphi(a)$.

Lorsque la famille (Π_U) est associée à un processus de Markov continu X (n°1.2.2), une expression probabiliste de la régularité du point $a \in \partial U$ a été introduite par DOOB (voir [17]) dans le cas du mouvement brownien, puis étudiée par GIRSANOV (voir [12], et [11] n° 13.6, page 536) dans le cas des processus fortement felleriens. Cette condition s'écrit :

---

[21] (R D) : Régularité Dirichlet.

(R P) (22) $$P_a\{\sigma_U^0 = 0\} = 1$$

(où $\sigma_U^0(\omega) = \inf\{t \mid 0 < t \leqslant +\infty , \text{ et } X_t(\omega) \notin U\}$). Cette condition exprime que les trajectoires issues de a presque sûrement ne rentrent pas immédiatement dans U , ou plus exactement, si elles rentrent dans U , elles en ressortent très vite. Ceci conduit à considérer la troisième condition suivante :

(R G) (23) $$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in U}} \mathcal{M}_U(x) = 0 ,$$

condition qui exprime, puisque $\mathcal{M}_U(x) = E_x\{\sigma_U\}$ est le temps moyen de sortie de U pour les trajectoires issues de x , que les trajectoires issues d'un point de U voisin de a sortent, en moyenne, très vite de U . Mais (voir le n° 1.3.3), $\mathcal{M}_U$ est aussi le potentiel de Green (pour l'ouvert U) de la fonction 1 , de telle sorte que la condition (R G) a aussi une interprétation analytique, et occupe naturellement de ce fait une situation intermédiaire entre (R D) purement analytique et (R P) purement probabiliste.

Le théorème suivant confirme les considérations intuitives précédentes en affirmant que, pour des processus de Markov convenables, les trois conditions de régularité sont équivalentes :

THÉORÈME. - Soit X un processus de Markov <u>continu</u> sur E , pour lequel les <u>constantes sont harmoniques</u> (n° 1.2.4), et le semi-groupe de transition <u>localement continu</u> (n° 2.1.2).

On suppose de plus que la famille (Π_U^X) possède la propriété (F F) (n° 2.1.1), et que, pour chaque $U \in \mathcal{U}(E)$, la fonction $\mathcal{M}_U^X$ (n° 1.3.1) est bornée et continue sur U .

Alors, si $U \in \mathcal{U}(E)$ et $a \in \partial U$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(R D) Pour tout $\varphi \in C(\partial U)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in U}} \Pi_U^X \varphi(x) = \varphi(a)$.

(R G) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\partial U}} \mathcal{M}_U^X(x) = 0$.

(R P) $P_a\{\sigma_U^0 = 0\} = 1$.

---

(22) (R P) : Régularité Probabiliste.
(23) (R G) : Régularité potentiel de Green.

Remarque. - Sous les autres hypothèses du théorème, l'hypothèse selon laquelle $\mathfrak{M}_U^X$ est bornée et continue sur U, pour chaque $U \in \mathcal{U}$, est satisfaite si $\mathfrak{M}_E^X$ est bornée et continue (cas du théorème 2.1.3, voir la remarque 1, n° 2.1.3), ou si le potentiel R_0^X est continu (cas du théorème 2.2.1, voir le lemme 2.2.2), ou enfin seulement s'il existe une suite (U_n) croissant vers E d'ouverts de $\mathcal{U}$ pour lesquels la propriété est satisfaite.

Nous allons décomposer la démonstration du théorème énoncé selon les étapes suivantes (voir le n° 3.2.7) :

3.2.3 (R G) $\Longrightarrow$ (R D).

THÉORÈME [24]. - Soit X un processus de Markov continu pour lequel les constantes sont harmoniques et le semi-groupe de transition localement continu.

Si $U \in \mathcal{U}(E)$ et $a \in \partial U$ sont tels que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in U}} \mathfrak{M}_U^X(x) = 0 \quad [25] ,$$

alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in U}} \Pi_U\, \varphi(x) = \varphi(a)$$

pour toute fonction numérique φ définie sur ∂U, universellement mesurable, bornée et continue en a.

En effet, on a, si $\alpha > 0$ et $x \in U$,

$$\Pi_U\, \varphi(x) - \varphi(a)$$

$$= \int_{\{X_{\sigma_U} \in \partial U \cap B_\alpha(a)\}} (\varphi(X_{\sigma_U}) - \varphi(a))\, dP_x + \int_{\{X_{\sigma_U} \in \partial U \setminus B_\alpha(a)\}} (\varphi(X_{\sigma_U}) - \varphi(a))\, dP_x .$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, choisissons $\alpha > 0$ tel que

$$|\varphi(y) - \varphi(a)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad y \in \partial U \cap B_\alpha(a) ,$$

ce qui est possible en vertu de la continuité de φ en a. La première intégrale est majorée par ε, et la deuxième par $2\|\varphi\|\; P_x\{X_{\sigma_U} \in \partial U \setminus B_\alpha(a)\}$. φ étant bornée,

---

[24] Voir DYNKIN [11], théorème 13.3, page 536, avec la même remarque sur la divergence des hypothèses qu'au n° 2.1.8.

[25] Voir aussi le n° 3.2.8 ci-dessous.

il suffit donc de montrer que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in U}} P_x\{X_{\sigma_U} \in \partial U \setminus B_\alpha(a)\} = 0 .$$

Or, si $u > 0$,

$$\{X_0 \in B_{\alpha/2}(a) \ , \ X_{\sigma_U} \in \partial U \setminus B_\alpha(a)\}$$

$$\subset \{X_0 \in B_{\alpha/2}(a) \ , \ \exists\, t \ , \ 0 \leq t \leq u \ \text{ et } \ X_t \in E \setminus B_{\alpha/2}(X_0)\} \cup \{\sigma_U > u\} .$$

Donc, pour $x \in B_{\alpha/2}(a) \cap U$,

$$(3.2.1) \qquad P_x\{X_{\sigma_U} \in \partial U \setminus B_\alpha(a)\} \leq \sup_{x \in U} P_x\Big(\bigcup_{0 \leq t \leq u} \{X_u \in E \setminus B_{\alpha/2}(x)\}\Big) + P_x\{\sigma_U > u\} .$$

D'où le résultat, puisque, l'hypothèse sur X entrainant la locale uniformité des temps de sortie (annexe 3, relation A.3.1), on a

$$\lim_{u \downarrow U} \sup_{x \in U} P_x\Big(\bigcup_{0 \leq t \leq u} \{X_u \in E \setminus B_{\alpha/2}(x)\}\Big) = 0$$

d'une part, et d'autre part,

$$\lim_{\substack{x \to u \\ x \in U}} P_x\{\sigma_U > u\} = 0 \qquad \text{pour chaque } \ u > 0 ,$$

d'après l'hypothèse (R G). (Intuitivement, ce dernier argument, basé sur la relation (3.2.1), peut être illustré en disant que les trajectoires partant d'un point x de U voisin de a ont beaucoup de chances de sortir vite de U à cause de la condition (R G) de régularité de a , et alors de sortir près de a , d'après la locale uniformité qu'exprime la relation A.3.1.)

3.2.4 <u>(R D) $\Longrightarrow$ (R G)</u> .

LEMME [26]. - Sous les hypothèses du théorème 3.2.2, si $U \in \mathcal{U}(E)$ et $a \in \partial U$, (R D) $\Longrightarrow$ (R G) [27].

En effet, soit $W \in \mathcal{U}(E)$ tel que $\overline{U} \subset W$; on a (n° 1.3.1),

$$\mathcal{M}_U(x) = \mathcal{M}_W(x) - \Pi_U\, \mathcal{M}_W(x) \qquad (x \in U) ;$$

---

[26] Voir le n° 3.2.8.

[27] La locale continuité du semi-groupe de transition de X n'intervient pas ici.

d'où le résultat, puisque $\mathfrak{M}_W$ est continue sur W, donc sur ∂U.

3.2.5 (R G) $\Longrightarrow$ (R P).

LEMME [28]. — Soit X un processus de Markov continu pour lequel les constantes sont harmoniques, et tel que, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage ouvert W de x pour lequel $\mathfrak{M}_W^X(x) < +\infty$. Alors, si $U \in \mathcal{U}(E)$ et $a \in \partial U$, (R G) $\Longrightarrow$ (R P).

En effet, supposons que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in U}} \mathfrak{M}_U^X(x) = 0 .$$

Pour montrer que $P_a\{\sigma_U^0 = 0\} = 1$, il suffit d'établir que $u > 0$ et $\varepsilon > 0$ étant arbitraires, $P_a\{\sigma_U^0 < u\} \geqslant 1 - \varepsilon$.

Donnons-nous donc $u > 0$, $\varepsilon > 0$, et aussi $\eta > 0$. D'une part, d'après l'hypothèse (R G), il existe un voisinage V de a tel que,

$$(3.2.2) \qquad P_x\{\sigma_U < u/2\} \geqslant 1 - \eta \qquad \text{pour tout } x \in V \cap U ;$$

d'autre part, d'après l'hypothèse de bornitude sur les espérances des temps de sortie des ouverts, et le lemme 2.1.5, il existe un voisinage W de a tel que $\overline{W} \subset V$, et

$$(3.2.3) \qquad P_a\{\sigma_W < u/2\} \geqslant 1 - \eta .$$

Remarquons alors que :

$$\{X_0 = a ,\ \sigma_U^0 < u\} \supset \{X_0 = a ,\ \sigma_W < u/2 ,\ X_{\sigma_W} \notin U\}$$
$$\cup \{X_0 = a ,\ \sigma_W < u/2 ,\ X_{\sigma_W} \in U ,\ \sigma_U \circ \theta_{\sigma_W} < u/2\} ;$$

d'où

$$P_a\{\sigma_U^0 < u\} \geqslant P_a\{\sigma_W < u/2 ,\ X_{\sigma_W} \notin U\} + \int_{\{\sigma_W < u/2, X_{\sigma_W} \in U\}} P_{X_{\sigma_W}}\{\sigma_U < u/2\}\, dP_a ,$$

d'après la propriété de Markov forte de X,

$$\geqslant P_a\{\sigma_W < u/2 ,\ X_{\sigma_W} \notin U\} + (1 - \eta)\, P_a\{\sigma_W < u/2 ,\ X_{\sigma_W} \in U\} ,$$

d'après la relation (3.2.2),

---

[28] Voir le n° 3.2.8 ; voir aussi DYNKIN [11] n° 13.9.

$$\geqslant (1 - \eta)\ P_a\{\sigma_W < u/2\} \geqslant (1 - \eta)^2 ,$$

d'après la relation (3.2.3) ; d'où le résultat en choisissant η tel que

$$(1 - \eta)^2 \geqslant 1 - \varepsilon .$$

3.2.6 (R P) $\Longrightarrow$ (R G) ; utilisation de la méthode d'adjonction d'une variable temporelle indépendante du processus X (n° 2.1.7).

THÉORÈME [29]. - Soit X un processus de Markov continu pour lequel les constantes sont harmoniques. On suppose que, pour tout $\lambda > 0$, et toute fonction $f \in B_K(E)$, $R_\lambda^X f$ est une fonction continue (propriété (F F_K''), n° 2.1.7), et que, pour chaque $U \in \mathcal{U}(E)$, la fonction $\mathfrak{M}_U^X$ est bornée.

Alors, si $U \in \mathcal{U}(E)$ et $a \in \partial U$,

$$(R\ P) \Longrightarrow (R\ G) .$$

En effet, nous allons montrer que, sous les hypothèses faites, la fonction $x \to E_x\{\sigma_U^0\}$ est bornée et semi-continue supérieurement sur E . Le résultat cherché en découlera, puisque (R P) entraîne que $E_a\{\sigma_U^0\} = 0$, et que $\mathfrak{M}_U(x) \leqslant E_x\{\sigma_U^0\}$ pour tout $x \in E$.

Rappelons, d'abord, que, lorsque s décroit vers 0 en restant > 0, $s + \sigma_U \circ \theta_s$ décroit vers σ_U^0 . Donc, pour chaque $t > 0$, $t/\lambda + \sigma_U \circ \theta_{t/\lambda}$ décroit vers σ_U^0 lorsque λ croit vers $+\infty$.

Nous allons approcher $E_x\{\sigma_U^0\}$ par

$$g_\lambda(x) = \int_\Omega P_x(d\omega) \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt(t/\lambda + \sigma_U(\theta_{t/\lambda}(\omega))) .$$

D'une part,

$$g_\lambda(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, E_x\{t/\lambda + \sigma_U \circ \theta_{t/\lambda}\}\, dt ,$$

et

$$E_x\{t/\lambda + \sigma_U \circ \theta_{t/\lambda}\} = t/\lambda + E_x\{E_{X_{t/\lambda}}\{\sigma_U\}\} \leqslant t/\lambda + \|\mathfrak{M}_U\| ;$$

donc, puisque $\|\mathfrak{M}_U\| < +\infty$ par hypothèse,

$$\inf_\lambda g_\lambda(x) = E_x\{\sigma_U^0\} ,$$

---

[29] Voir le n° 3.2.8.

d'après le théorème de Lebesgue.

D'autre part,

$$g_\lambda(x) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} E_x\{s + \sigma_U \circ \theta_s\} ds$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} s e^{-\lambda s} ds + \lambda R_\lambda \mathcal{M}_U(x) .$$

Il en résulte, puisque $\mathcal{M}_U \in \mathcal{B}_K(E)$, que g_λ est une fonction continue, d'après (F F''_K), d'où la semi-continuité supérieure cherchée de $\inf_\lambda g_\lambda$, et le théorème 3.2.6.

3.2.7. - Pour déduire du théorème précédent l'implication (R P) $\Longrightarrow$ (R G) du théorème 3.2.2, il suffit de se placer sur un ouvert $W \in \mathcal{U}(E)$ contenant $\bar{U}$: le processus X^W , induit par X sur W , satisfait aux hypothèses du lemme 2.1.6, donc, d'après ce lemme, a la propriété (F F"), et on conclut grâce au théorème 3.2.6 appliqué à X^W .

Les implications (R G) $\Longrightarrow$ (R D) , (R D) $\Longrightarrow$ (R G) et (R G) $\Longrightarrow$ (R P) résultant respectivement des n° 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5, le théorème 3.2.2 est ainsi établi.

3.2.8. - On notera que l'on pourrait remplacer dans les numéros 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6 la propriété (R G) par la propriété suivante :

(R G') Pour tout $u > 0$, $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in U}} P_x\{\sigma_U \geqslant u\} = 0$.

(qui est impliquée par (R G)), et supprimer des hypothèses toutes conditions de bornitude portant sur les $\mathcal{M}_U$ $(U \in \mathcal{U}(E))$.

Pour adapter à ce cas la démonstration du théorème 3.2.6, il suffit d'y remplacer la fonction $x \to E_x\{\sigma_U^0\}$ par la fonction $x \to P_x\{\sigma_U^0 \geqslant u\}$ $(u > 0)$ (voir à ce sujet DYNKIN [11], lemme 13.1, page 531).

3.2.9 Caractère local de la régularité des points frontière.

THÉORÈME. - Sous les hypothèses du théorème 3.2.2, soit $U \in \mathcal{U}(E)$. Pour qu'un point $a \in \partial U$ soit régulier pour U , il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert W de a tel que a soit régulier pour $U \cap W$.

Ce résultat découle de la relation (R D) $\iff$ (R P) , puisque

$$\{X_0 = a \,,\ \sigma_U^0 = 0\} = \{X_0 = a \,,\ \sigma_{U \cap W}^0 = 0\}$$

pour tout voisinage W de a , en vertu de la continuité à droite des trajectoires de X .

3.3 Construction d'ouverts réguliers.

3.3.1 Position du problème.

Si la famille (Π_U) de noyaux harmoniques sur E est associée à une axiomatique de Brelot sur E (n° 1.1.2), il existe, par hypothèse (deuxième axiome), une base de la topologie de E formée d'ouverts réguliers [30].

Dans l'esprit du présent travail, on peut se proposer de chercher dans quelle mesure le fait, pour une famille (Π_U) de noyaux harmoniques sur E , d'être associée à un processus de Markov continu (n° 1.2.2) entraîne l'existence de suffisamment d'ouverts réguliers.

Le théorème suivant donne une première réponse à cette question :

3.3.2 THÉORÈME. - Soit X un processus de Markov continu sur E satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.2.2. Soient, par ailleurs, G un ouvert de E , et K un compact contenu dans G . Pour qu'il existe un ouvert régulier $U \in \mathcal{U}(E)$ tel que $K \subset U \subset G$, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite :

(O R) Il existe deux ouverts V et W de $\mathcal{U}(E)$ tels que

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset W \subset G \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}_W^X(x) > \mathfrak{M}_W^X(y)$$

pour tout $x \in K$ et $y \in \partial V$.

3.3.3 Démonstration du théorème 3.3.2.

Elle va reposer sur la considération des lignes de niveau des fonctions $\mathfrak{M}_U$:

La condition est évidemment nécessaire, en vertu de la propriété (R G) des points

---

[30] Conformément à la terminologie classique, un ouvert $U \in \mathcal{U}(E)$ est dit régulier si tout point $a \in \partial U$ est régulier pour U au sens introduit au n° 3.2.2.

frontière d'un ouvert régulier U tel que $K \subset U \subset G$ (n° 3.2.2), et du fait que $\pi_U^X(x) > 0$ pour tout $x \in U$.

Pour montrer qu'elle est aussi suffisante, désignons par β un nombre > 0 tel que $\pi_W(x) > \beta > \pi_W(y)$ pour tout $x \in K$ et $y \in \partial V$, et posons

$$U = \{x \mid x \in V \quad \text{et} \quad \pi_W(x) > \beta\} .$$

$U \in \mathcal{U}(E)$, et $\overline{U} \subset V$, par définition de β, puisque

$$\overline{U} \subset \overline{V} \subset W \qquad \text{et} \qquad x \in \overline{U} \Longrightarrow \pi_W(x) \geqslant \beta .$$

Il en résulte que $\pi_W(x) = \beta$ pour tout $x \in \partial U$. Soit alors $a \in \partial U$. Puisque $\overline{U} \subset W$, on a, si $x \in U$,

$$\begin{aligned} \pi_U(x) &= \pi_W(x) - \Pi_U \, \pi_W(x) \qquad (\text{n° } 1.3.1) \\ &= \pi_W(x) - E_x\{\pi_W(X_{\sigma_U})\} \\ &= \pi_W(x) - \beta , \end{aligned}$$

puisque, d'après l'harmonicité des constantes, $X_{\sigma_U} \in \partial U$ P_x-presque sûrement. D'où le résultat en faisant tendre x vers a d'après le théorème 3.2.2.

3.3.4 Cas d'une base d'ouverts réguliers.

En particulier, en prenant $K = \{a\}$ $(a \in E)$ dans le théorème 3.2.2, on peut construire une base d'ouverts réguliers moyennant la propriété de maximum suivante;

THÉORÈME. - Soit X un processus de Markov continu sur E satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.2.2. Supposons que X possède la propriété suivante :

(O R') Pour tout $a \in E$, et tout ouvert G contenant a, il existe deux ouverts V et W de $\mathcal{U}(E)$ tels que $a \in V \subset \overline{V} \subset W \subset G$, et $\pi_W^X(a) > \pi_W^X(y)$ pour tout $y \in \partial V$.

Alors, il existe une base d'ouverts réguliers (par rapport à la famille (Π_U^X)).

3.4 Processus induit sur un ouvert régulier.

3.4.1 Le processus induit est un processus de Feller.

THÉORÈME. - Soit X un processus de Markov continu sur E, satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.2.2.

Alors, si l'ouvert $U \in \mathcal{U}(E)$ est <u>régulier</u>, le processus X^U induit par X sur U est un <u>processus de Feller</u> ([31]).

En effet, d'une part, en vertu du lemme 2.1.6, pour chaque $\lambda \geq 0$ le noyau résolvant R_λ^U de X^U est fortement fellerien sur U. D'autre part, la relation

$$R_0^U f \leq \|f\| \; \mathfrak{M}_U \quad (f \in B(U))$$

montre que, compte tenu de la régularité de U et du théorème 3.2.2, $R_0^U f \in C_0(U)$ pour tout $f \in B(U)$. Donc, d'après l'équation résolvante

$$R_\lambda^U f = R_0^U f - R_0^U R_\lambda^U f ,$$

R_λ^U applique $C_0(U)$ dans lui-même pour tout $\lambda \geq 0$.

Le théorème annoncé résulte alors de l'annexe 4 et du lemme suivant :

3.4.2 <u>Une propriété de la résolvante d'un processus.</u>

LEMME. - Soient X un processus de Markov sur E, g une fonction borélienne bornée sur E, et $x \in E$ tels que g est continue en x, et $P_x\{\sigma_E < +\infty\} = 1$. Alors :

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda^X g(x) = g(x) .$$

En effet, soient $\varepsilon > 0$ et W un voisinage de x tel que $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $y \in W$. On a

$$\lambda R_\lambda\, g(x) - g(x) = E_x\{\int_0^{\sigma_E} \lambda \bar{e}^{\lambda t}(g(X_t) - g(x))\, dt\} - g(x)\, E_x\{\bar{e}^{\lambda\sigma_E}\}$$

$$= E_x\{\int_0^{\sigma_W} \lambda \bar{e}^{\lambda t}(g(X_t) - g(x))\, dt\} + E_x\{\int_{\sigma_W}^{\sigma_E} \lambda \bar{e}^{\lambda t}(g(X_t) - g(x))\, dt\}$$

$$- g(x)\, E_x\{\bar{e}^{\lambda\sigma_E}\} ,$$

d'où

$$|\lambda R_\lambda\, g(x) - g(x)| \leq \varepsilon + 2\|g\|\, E_x\{\bar{e}^{\lambda\sigma_W}\} + \|g\|\, E_x\{\bar{e}^{\lambda\sigma_E}\} ,$$

et le résultat cherché, compte tenu de la relation $P_x\{\sigma_E < +\infty\} = 1$.

([31]) Autrement dit, $(N_t^U)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de contractions de $C_0(U)$.

Appendice 1

Convergence stochastique à la frontière et convergence des martingales.

Ap 1.1. - A côté de la convergence à la frontière de $\Pi_U \varphi$ vers φ représentée par la condition (R D) (n° 3.2.2), l'existence d'un processus de Markov, dont dérivent les noyaux harmoniques, permet de considérer une convergence presque sûre sur les trajectoires, qui a été introduite par DOOB (voir [7]). Nous allons donner ici une démonstration de ce résultat que l'on trouvera exposé, dans le cas général, dans le livre de DYNKIN (voir [11], chapitre 12).

Ap 1.2 THÉORÈME. - Soit X un processus de Markov continu sur E pour lequel les constantes sont harmoniques. Si $U \in \mathcal{U}(E)$ et si φ est une fonction borélienne bornée sur ∂U telle que $\Pi_U \varphi$ soit continue (32) sur U, alors

$$\lim_{t \uparrow \sigma_U,\, t<\sigma_U} \Pi_U \varphi(X_t) = \varphi(X_{\sigma_U}) \quad P_x\text{-presque sûrement pour chaque } x \in U .$$

La démonstration de ce théorème va reposer sur le théorème de convergence des martingales grâce au lemme suivant :

Ap 1.3 LEMME. - Avec les notations et hypothèses du théorème précédent, posons, pour $t \in \mathbf{R}_+$ et $\omega \in \Omega$,

$$Y_t(\omega) = \Pi_U \varphi(X_t(\omega)) \qquad \text{si } t < \sigma_U(\omega) ,$$

$$Y_t(\omega) = \Pi_U \varphi(X_{\sigma_U}(\omega)) \qquad \text{si } \sigma_U(\omega) \leqslant t \quad (33).$$

Alors, pour chaque $x \in U$, $(\Omega , F , P_x , (Y_t)_{t\geqslant 0})$ est une martingale bornée dont les trajectoires sont continues à droite.

En effet, pour chaque $t \in R_+$, la tribu $\hat{F}^X_{t\wedge\sigma_U}$ sur Ω est formée des $A \in \hat{F}^X_t$ tels que

---

(32) La théorie qui conduit à établir la continuité à droite p. s. des fonctions excessives sur les trajectoires permet de supprimer cette hypothèse de continuité. Nous la conservons ici car la démonstration du théorème est alors élémentaire d'une part, et d'autre part elle s'inscrit dans le cadre adopté (propriété (F F) n°2.1.1).

(33) $Y_t(\omega) = 0$ si $\sigma_U(\omega) = \sigma_E(\omega)$ (ce qui ne se produit P_x-presque sûrement pas à cause de l'harmonicité des constantes).

$$A \cap \{\sigma_U \leqslant t\} \in \hat{F}^X_{\sigma_U} ,$$

donc Y_t est $\hat{F}^X_{t\wedge\sigma_U}$-mesurable, d'après sa définition même.

Montrons que, pour chaque $t \geqslant 0$, $A \in \hat{F}^X_{t\wedge\sigma_U}$ et $x \in U$,

(Ap 1.1) $$\int_A Y_t \, dP_x = \int_A \varphi(X_{\sigma_U}) \, dP_x ,$$

la propriété de Martingale de (Y_t) en résultera. Soit donc $A \in \hat{F}^X_{t\wedge\sigma_U}$

$$\int_A Y_t \, dP_x = \int_{A\cap\{\sigma_U>t\}} E_{X_t}\{\varphi(X_{\sigma_U})\} \, dP_x + \int_{A\cap\{\sigma_U\leqslant t\}} E_{X_{\sigma_U}}\{\varphi(X_{\sigma_U})\} \, dP_x$$

$$= \int_{A\cap\{\sigma_U>t\}} \varphi(X_{\sigma_U} \circ \theta_t) \, dP_x + \int_{A\cap\{\sigma_U\leqslant t\}} \varphi(X_{\sigma_U} \circ \theta_{\sigma_U}) \, dP_x ,$$

d'après la propriété de Markov forte de X , puisque $A \cap \{\sigma_U > t\} \in \hat{F}^X_t$, et $A \cap \{\sigma_U \leqslant t\} \in \hat{F}^X_{\sigma_U}$; d'où la relation (Ap 1.1) et le lemme, puisque la continuité à droite de $t \to Y_t(\omega)$ résulte de l'hypothèse de continuité sur φ et de celle de X .

Ap 1.4. - Le théorème Ap 1.2 résulte comme suit du lemme Ap 1.3 : il résulte d'abord du théorème sur l'existence d'une version standard pour une martingale (voir par exemple à ce sujet [4], appendice 1) que, P_x-presque sûrement,

$$Y_t^- = \lim_{s\uparrow t} Y_s \quad \text{existe pour tout} \quad t \in R_+ ;$$

donc, en particulier, $\lim_{s\uparrow\sigma_U} Y_s$ existe P_x-presque sûrement.

Considérons alors une suite (U_n) d'ouverts croissant vers U , et telle que $\overline{U}_n \subset U$ pour tout n . On a, $\sigma_U = \sup_n \sigma_{U_n}$ et $\sigma_{U_n} < \sigma_U$ P_x-presque sûrement pour chaque n et $x \in U$, à cause de la continuité des trajectoires de X et de l'harmonicité des constantes.

D'une part, en vertu de la propriété forte de Martingale (voir [4], appendice 2), on a

$$E_x\{Y_{\sigma_U}/\hat{F}^X_{\sigma_{U_n}}\} = Y_{\sigma_{U_n}} \quad P_x\text{-presque sûrement} \quad (^{34}) \ ;$$

donc, d'après le théorème de convergence des martingales,

$$\lim_{s\uparrow\sigma_U, s<\sigma_U} Y_s = \lim_{n\to\infty} Y_{\sigma_{U_n}} = E_x\{Y_{\sigma_U}/\sigma(\bigcup_n \hat{F}^X_{\sigma_{U_n}})\} \quad P_x\text{-presque sûrement.}$$

D'où le résultat, puisque la continuité des trajectoires entraîne que

$$X_{\sigma_U} = \lim_{n\to\infty} X_{\sigma_{U_n}} \quad P_x\text{-presque sûrement} \quad (x \in U) ,$$

donc que $Y_{\sigma_U} = \Pi_U \varphi(X_{\sigma_U})$ est $\sigma(\bigcup_n F_{\sigma_{U_n}})$-mesurable.

C. Q. F. D.

Appendice 2

Unicité de la détermination d'un processus de Markov continu X par les familles (Π^X_U) et $(\mathfrak{M}^X_U)$.

Ap 2.1. - La famille (Π^X_U) des répartitions de sortie du processus X détermine le comportement spatial du processus X , et la famille $(\mathfrak{M}^X_U)$ la manière dont (en moyenne) les trajectoires sont décrites dans le temps. On renvoie à l'article de GETOOR et McKEAN (cf. [3]) pour l'étude de l'ensemble des processus admettant une famille donnée de répartitions de sortie, et on va seulement montrer ici comment la donnée des familles (Π^X_U) et $(\mathfrak{M}^X_U)$ détermine entièrement le processus X .

Ap 2.2 Détermination d'une famille de noyaux harmoniques par sa restriction à une base d'ouverts.

LEMME. - Une famille de noyaux harmoniques $(\Pi_U)_{\mathcal{U}(E)}$ sur E , ayant les propriétés (H_4) (n° 3.1.3) et (H_5) (n° 3.2.1), est entièrement déterminée par la

---

(^{34}) σ_U et σ_{U_n} sont des temps d'arrêt par rapport à la famille (G_t) où $G_t = \hat{F}^X_{t\wedge\sigma_U}$ $(t \geqslant 0)$; cette famille est continue à droite en même temps que $(\hat{F}^X_t)$ et $G_{\sigma_{U_n}} = \hat{F}^X_{\sigma_{U_n}}$ pour tout n .

sous-famille $(\Pi_U)_{U\in\mathcal{V}}$ où $\mathcal{V}$ est une base de la topologie de E contenue dans $\mathcal{U}(E)$.

Démonstration immédiate d'après les définitions.

<u>Remarque sur la définition d'une famille de noyaux harmoniques</u>. - Nous avons défini (n° 1.1.1) une famille de noyaux harmoniques sur tous les ouverts relativement compacts de E , parce que la famille des répartitions de sortie d'un processus de Markov est ainsi définie naturellement.

Dans l'axiomatique de Brelot, par contre, c'est la famille $(\Pi_U)_{U\in\mathcal{V}}$, où $\mathcal{V}$ est une base d'ouverts (réguliers), qui est introduite naturellement par le 2e axiome. Les propriétés (H_4) et (H_5) relient, par le lemme ci-dessus, ces deux modes de définition.

Ap 2.3 THÉORÈME. - Soient $(\Pi_U)_{U\in\mathcal{U}(E)}$ une famille de noyaux harmoniques, et $\mathfrak{M}$ une fonction borélienne bornée sur E .

Si $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}(E)$ est une base de la topologie de E , il existe, à une équivalence près, au plus un processus de Markov continu X sur E tel que $\Pi_U^X = \Pi_U$ pour tout $U\in\mathcal{V}$ et $\mathfrak{M}_E^X = \mathfrak{M}$.

Remarquons d'abord que, d'après le lemme Ap 2.2, on peut supposer que $\mathcal{V} = \mathcal{U}(E)$.

Remarquons ensuite que, <u>le noyau</u> R_0 <u>étant borné</u>, l'équation résolvante

$$R_\lambda(\underset{\sim}{1} + \lambda R_0) = R_0$$

permet de déterminer R_λ en fonction de R_0 pour $\lambda < \frac{1}{\|R_0\|}$ (en inversant $\underset{\sim}{1} + \lambda R_0$) ; puis l'équation résolvante $R_\lambda + (\underset{\sim}{1} + (\lambda - \mu)R_\mu) = R_\mu$ permet de prolonger cette détermination de proche en proche, de telle sorte que la résolvante $(R_\lambda^X)_{\lambda>0}$ (donc aussi X à une équivalence près) est déterminée par R_0^X .

Il suffit donc de montrer que R_0^X est déterminé par la famille (Π_U^X) et $\mathfrak{M}_E^X$, ce qui résulte du lemme suivant :

Ap 2.4 LEMME. - Soit X un processus de Markov continu sur E pour lequel les constantes sont harmoniques et la fonction $\mathfrak{M}_E^X$ est bornée. Supposons que E soit muni d'une distance ρ compatible avec sa topologie telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, la boule

$$B_\varepsilon(x) = \{y \mid y\in E \text{ et } \rho(x , y) < \varepsilon\}$$

soit relativement compacte dans E [35], et posons, pour chaque $\varepsilon > 0$, $x\in E$

---

[35] Sur tout espace LCD , il existe une telle distance.

et $\Gamma \in \mathcal{B}_E$,

$$\Pi_\varepsilon(x , \Gamma) \doteq \Pi^X_{B_\varepsilon(x)}(x , \Gamma) .$$

Π_ε ainsi défini est, pour chaque $\varepsilon > 0$, un noyau sur $(E , \overline{\mathcal{B}_E})$, et on a

(Ap 2.1)
$$R^X_0 f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{p=0}^{+\infty} \Pi^p_\varepsilon[(\pi^X_E - \Pi_\varepsilon \pi^X_E)f](x)$$

pour tout $x \in E$ et $f \in C_K(E)$.

En effet, $\varepsilon > 0$ étant donné, définissons l'application T^ε de Ω dans $[0 , +\infty]$ en posant :

$$T^\varepsilon(\omega) = \inf\{t \mid \quad t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad X_t(\omega) \notin B_\varepsilon(X_0(\omega))\}$$

s'il existe un tel t , et $T^\varepsilon(\omega) = \sigma_E(\omega)$ si non. En vertu du théorème de projection des ensembles mesurable (voir par exemple [5], chap. I § 5, et chap. II n°4.7), T est un temps d'arrêt du processus X .

Définissons alors une suite croissante (T^ε_n) de temps d'arrêt de X , en posant:

$$\begin{aligned} T^\varepsilon_0 &= 0 \\ T^\varepsilon_1 &= T^\varepsilon \\ &\cdots \\ T^\varepsilon_{n+1} &= T^\varepsilon_n + T^\varepsilon \circ \theta_{T^\varepsilon_n} \\ &\cdots \end{aligned}$$

(si $T^\varepsilon_n(\omega) < \sigma_E(\omega)$, $T^\varepsilon_{n+1}(\omega)$ est le premier instant postérieur à $T^\varepsilon_n(\omega)$ où la trajectoire de ω sort de la boule $B_\varepsilon(X_{T^\varepsilon_n}(\omega))$).

En vertu de la continuité de X ,

$$\sup_n T^\varepsilon_n = \sigma_E .$$

Soit alors $f \in C_K(E)$, et $x \in E$:

En vertu des relations $E_x\{\sigma_E < + \infty\}$ et $\sup_n T^\varepsilon_n = \sigma_E$, et du théorème de Lebesgue, la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} E_x\{f(X_{T^\varepsilon_p})(T^\varepsilon_{p+1} - T^\varepsilon_p)\}$$

est absolument convergente, et on a

$$h_\varepsilon(x) = \sum_{p=0}^{\infty} E_x\{f(X_{T_p^\varepsilon})(T_{p+1}^\varepsilon - T_p^\varepsilon)\} = E_x\{\sum_{p=0}^{\infty} f(X_{T_p^\varepsilon})(T_{p+1}^\varepsilon - T_p^\varepsilon)\} ;$$

montrons que $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} h_\varepsilon(x) = R_0\, f(x) \quad (x \in E)$. On a

$$R_0\, f(x) - h_\varepsilon(x) = E_x\{\sum_{p=0}^{+\infty} \int_{T_p^\varepsilon}^{T_{p+1}^\varepsilon} (f(X_t) - f(X_{T_p^\varepsilon}))\, dt\} ;$$

or, $\eta > 0$ étant donné, en vertu de l'uniforme continuité de f, il existe $\varepsilon_\eta > 0$ tel que

$$\rho(y\ ,\ z) < \varepsilon_\eta \implies |f(y) - f(z)| < \eta ;$$

on a donc, si $\varepsilon < \varepsilon_\eta$,

$$|R_0\, f(x) - h_\varepsilon(x)| \leqslant \eta\, E_x\{\sum_{p=0}^{+\infty} (T_{p+1}^\varepsilon - T_p^\varepsilon)\} = \eta\, E_x\{\sigma_E\} ;$$

d'où $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} h_\varepsilon(x) = R_0\, f(x)$.

Il reste à calculer $E_x\{f(X_{T_p^\varepsilon})(T_{p+1}^\varepsilon - T_p^\varepsilon)\}$.

$$E_x\{f(X_{T_p^\varepsilon})(T_{p+1}^\varepsilon - T_p^\varepsilon)\} = E_x\{f(X_{T_p^\varepsilon})\ T^\varepsilon \circ \theta_{T_p^\varepsilon}\}$$

$$= E_x\{f(X_{T_p^\varepsilon})\ E_{X_{T_p^\varepsilon}}\{T^\varepsilon\}\} ,$$

d'après la propriété de Markov forte de X. Mais, d'une part,

$$E_y\{T^\varepsilon\} = \mathfrak{M}^X_{B_\varepsilon(y)}(y) = \mathfrak{M}^X_E(y) - \Pi_\varepsilon\, \mathfrak{M}^X_E(y) ,$$

d'autre part, si φ est universellement mesurable et bornée,

$$E_x\{\varphi(X_{T_{p+1}^\varepsilon})\} = E_x\{\varphi \circ X_{T^\varepsilon} \circ \theta_{T_p^\varepsilon}\} = E_x\{E_{X_{T_p^\varepsilon}}\{\varphi(X_{T^\varepsilon})\}\}$$

d'après la propriété de Markov forte,

$$= E_x\{\Pi_\varepsilon\, \varphi(X_{T_p^\varepsilon})\}$$

puisque $E_y\{\varphi(X_{T^\varepsilon})\} = \Pi_\varepsilon\ \varphi(y)$ si $y \in E$, et que $X_{T_p^\varepsilon} \in E$ P_x-presque sûrement $(x \in E)$ en vertu de l'harmonicité des constantes et de la relative compacité de $B_\varepsilon(x)$. On en déduit

$$E_x\{\varphi(X_{T_p^\varepsilon})\} = \Pi_\varepsilon^p\ \varphi(x)$$

et le résultat cherché.

C. Q. F. D.

Ap 2.5. - En remarquant qu'un processus de Markov <u>continu</u> X sur E est entièrement déterminé (à une équivalence près) par les processus induits X^{U_n} où (U_n) est une suite d'ouverts croissant vers U (36), on étend le théorème Ap 2.3 au cas où la condition $\mathcal{M}_E^X = \mathcal{M}$ est remplacée par $\mathcal{M}_{U_n}^X = \mathcal{M}_n$ pour tout n , où, pour chaque n , $\mathcal{M}_n$ est une fonction borélienne bornée sur E (nulle hors de U_n).

Ap 2.6. - Il va sans dire que, avec les notations du théorème Ap 2.3, pour qu'il existe un processus continu X sur E tel que $\Pi_U^X = \Pi_U$ pour tout $U \in \mathcal{U}(E)$ et $\mathcal{M}_E^X = \mathcal{M}$, il faut que (Π_U) et $\mathcal{M}$ possèdent diverses propriétés.

En particulier, (H_4) et (H_5) pour (Π_U) (n° 3.1.3 et 3.2.1), et pour $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{M}(x) > 0$ pour tout $x \in E$;
- $\mathcal{M}(x) > \Pi_U\ \mathcal{M}(x)$ pour tout $U \in \mathcal{U}(E)$ et $x \in U$;
- $\mathcal{M}(x) = \lim\limits_{U \downarrow x} \Pi_U\ \mathcal{M}(x)$ pour tout $x \in E$;

(propriétés qui font de $\mathcal{M}$ un "potentiel" par rapport à la famille (Π_U)).

Nous ne chercherons pas ici à construire le processus X à partir de (Π_U) et de $\mathcal{M}$ (voir à ce sujet MEYER [15]).

---

(36) En effet

$$N_t^X f(x) = \int_{\{t<\sigma_E\}} f(X_t)\ dP_x = \lim_{n\to\infty} \int_{\{t<\sigma_{U_n}\}} f(X_t)\ dP_x = \lim_{n\to\infty} N_t^{X^{U_n}} f(x)$$

$(f \in B(E)\ ,\ x \in E)$.

Annexe 1

Propriété (H_2) et continuité des trajectoires

(démonstration du lemme 1.2.3)

La condition est suffisante, car la continuité de la trajectoire de ω entraîne que $X_{\sigma_U}(\omega) \in \partial U \cup \{\delta\}$.

Pour montrer qu'elle est nécessaire, posons, pour chaque $U \in \mathcal{U}$,

$$A_U = \{0 < \sigma_U < \sigma_E \ , \ X_{\sigma_U} \notin \bar{U}\} \ ,$$

et désignons par $\mathcal{B}$ une base dénombrable d'ouverts de E dans $\mathcal{U}(E)$, et par $\hat{\Omega}$ l'ensemble des trajectoires continues (au sens précisé au n° 1.2.1). On a alors, en vertu de l'existence de limites à gauche pour les trajectoires,

$$\Omega \setminus \hat{\Omega} = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} \ \bigcup_{p \in Q_+} \theta_p^{-1}(A_U) \quad P_x\text{-presque sûrement pour tout } x \in E \ .$$

Par ailleurs, par définition de Π_U^X, $P_x(A_U) = \Pi_U^X(x \ , E\setminus\bar{U})$ pour tout $U \in \mathcal{U}$ et $x \in U$.

Calculons alors $P_x(\theta_p^{-1}(A_U)$ $(U \in \mathcal{U} \ , \ x \in U \ , \ p \geqslant 0)$:

$$P_x(\theta_p^{-1}(A_U)) = E_x\{P_{X_p}(A_U)\},$$

d'après la propriété de Markov ;

$$= E_x\{1_{\{X_p \in U\}} P_{X_p}(A_U)\} \ ,$$

car $y \notin U$ entraîne que $\sigma_U = 0$ P_y-presque sûrement, donc $P_y(A_U) = 0$. Autrement dit, si ν est la mesure, portée par U, définie par $\nu(\Gamma) = P_x\{X_p \in U \cap \Gamma\}$,

$$P_x(\theta_p^{-1}(A_U)) = \int_U \nu(dy) \ P_y(A_U) = \int_U \nu(dy) \ \Pi_U(y \ , E\setminus\bar{U}) \ .$$

D'où la condition nécessaire cherchée.

Pour construire un processus équivalent au processus

$$X = (\Omega \ , F \ , \omega_\delta \ , (X_t) \ , (\theta_t) \ , (P_x))$$

ayant mêmes répartitions de sortie, il suffit de remarquer que, sous les conditions énoncées, $\omega_\delta \in \hat{\Omega}$, $\theta_t(\hat{\Omega}) \subset \hat{\Omega}$ pour tout $t \geqslant 0$, $\hat{\Omega} \in \hat{F}_\infty^X$ et $P_x(\hat{\Omega}) = 1$

pour tout $x \in E_\delta$: le processus $\hat{X}$ obtenu, en restreignant Ω à $\hat{\Omega}$, répond donc à la question.

C. Q. F. D.

Annexe 2

Diverses formes de la continuité locale d'un semi-groupe [37].

LEMME. - Soit $(N_t)_{t>0}$ un semi-groupe de noyaux sous-markoviens sur E.

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(C L) (N_t) est localement continu (n° 2.1.2).

(C L') Pour toute fonction $f \in C_b(E)$, $\lim\limits_{t \downarrow 0} N_t f(x) = f(x)$, uniformément sur tout compact de E.

(C L") Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{t\downarrow 0} N_t(x, B_\varepsilon(x)) = 1$, uniformément sur tout compact de E.

De plus, ces propriétés sont équivalentes à la conjonction de

(M) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{t\downarrow 0} N_t(x, E \setminus B_\varepsilon(x)) = 0$, uniformément sur tout compact de E, et

(M_1) $\lim\limits_{t\downarrow 0} N_t(x, E) = 1$, uniformément sur tout compact de E.

En effet, d'abord (C L) $\Longrightarrow$ (C L") : soient K un compact de E, et $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\overline{B_\varepsilon(x)}$ soit compact pour tout $x \in K$. On recouvre K par un ensemble fini $B_{\varepsilon/4}(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de boules. Si $x \in K$, il existe i tel que $x \in B_{\varepsilon/4}(x_i)$, donc $B_\varepsilon(x) \supset B_{\varepsilon/2}(x_i)$. Soit alors, pour chaque i, $g_i \in C_K(E)$ telle que $0 \leqslant g_i \leqslant 1$, $g_i(y) = 1$ pour $y \in B_{\varepsilon/4}(x_i)$, et $g_i(y) = 0$ pour $y \notin B_{\varepsilon/2}(x_i)$. On a, si $x \in B_{\varepsilon/4}(x_i)$,

$$N_t(x, B_\varepsilon(x)) \geqslant N_t(x, B_{\varepsilon/2}(x_i)) \geqslant N_t\, g_i(x) ;$$

d'où on conclut que

$$\lim_{t\downarrow 0} N_t(x, B_\varepsilon(x)) = 1 \quad \text{uniformément pour } x \in K,$$

en utilisant (M L).

---

[37] Voir à ce sujet le livre de LOÈVE [13], page 624.

Ensuite (C L") ==> (C L') , à cause de la relation :

$$N_t f(x) - f(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} N_t(x, dy)[f(y) - f(x)] + \int_{E\setminus B_\varepsilon(x)} N_t(x, dy)[f(y) - f(x)]$$
$$+ (N_t(x, E) - 1) f(x) .$$

Enfin, (C L') ==> (C L) et (C L") <==> (M) et (M_1) sont immédiates.

C. Q. F. D.

Annexe 3

Locale uniformité des temps de sortie.

LEMME. - Soit X un processus de Markov continu sur E dont le semi-groupe de transition est localement continu (n° 2.1.1). Alors, pour tout ouvert G de E et tout compact $K \subset G$, on a :

(A.3.1) $$\lim_{b\downarrow 0} \sup_{x\in K} P_x\Big(\bigcup_{0\leq u\leq b} \{X_u \in G\setminus B_\varepsilon(x)\}\Big) = 0 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0 ,$$

et

(A.3.2) $$\lim_{b\downarrow 0} \sup_{x\in K} P_x\{\sigma_G \leq b\} = 0 .$$

On trouvera divers développements sur ce sujet dans les livres de DYNKIN ; voir, en particulier [10], lemme 6.3, page 149, et [5], lemme 13.2, page 531. Cependant, la démonstration du premier de ces lemmes n'étant pas satisfaisante, nous allons la reprendre ici (voir la remarque du n° 2.1.2).

Etablissons d'abord la relation (A.3.1) : on peut se limiter, à cause de la continuité des trajectoires, au cas où G est relativement compact ($G \in \mathcal{U}(E)$), et où $\varepsilon < \rho(K , E\setminus G)$.

Désignons par A l'ensemble

$$\Big(\bigcup_{0\leq u\leq b} \{X_u \in G\setminus B_\varepsilon(X_0)\}\Big) \cap \{X_0 \in K\} ,$$

et posons :

$$T(\omega) = \inf\{u \mid u \leq b \text{ et } X_u(\omega) \in G\setminus B_\varepsilon(X_0)\}$$

si cet ensemble est non vide ($\omega \in A$), et $T(\omega) = b$ s'il est vide ($\omega \notin A$). T est un temps d'arrêt de X (n° 1.2.1), en vertu du théorème de mesurabilité des temps d'entrée (voir par exemple [5], th. II-5) ; et, à cause de la continuité des trajectoires, $X_T(\omega) \in G$ pour tout $\omega \in \{X_0 \in K\} \cap \{X_b \in E\}$.

On a alors :

$$(A.3.3) \qquad A \subset \{X_b \in E \ , \ X_0 \in E \ , \ \rho(X_b \, , X_0) \geq \varepsilon/2\}$$
$$\cup \{X_b \in E \ , \ X_T \in E \ , \ \rho(X_T \, , X_b) \geq \varepsilon/2\} \cup \{X_b \notin E\} \ ,$$

puisque $\omega \in A$ entraîne que $\rho(X_T(\omega) \, , X_0(\omega)) \geq \varepsilon$; donc, si $x \in K$,

$$(A.3.4) \quad P_x(A) \leq N_b(x \, , E \setminus B_{\varepsilon/2}(x))$$
$$+ P_x\{X_b \in E \ , \ X_T \in E \ , \ \rho(X_T \, , X_b) \geq \varepsilon/2\} + 1 - N_b(x \, , E) \ .$$

Calculons le 2e terme : désignons par h la fonction numérique sur $E_\delta \times E_\delta$, indicatrice de $\{x \, , y | \ , \ x \in E \ , \ y \in E \ , \text{ et } \rho(x \, , y) \geq \varepsilon/2\}$. On a, si $x \in K$,

$$(A.3.5) \qquad P_x\{X_b \in E \ , \ X_T \in E \ , \ \rho(X_T \, , X_b) \geq \varepsilon/2\} = E_x\{h(X_b \, , X_T)\}$$
$$= E_x\{N_{b-T}(X_T \, , E \setminus B_{\varepsilon/2}(X_T))\} \ ,$$

d'après la propriété de Markov forte de X (voir [5] théorème IV-6, et [10] théorème 5.6). Des relations (A.3.4) et (A.3.5), compte tenu de la continuité locale de (N_t) , de l'annexe 2 ci-dessus, et de ce que $X_T \in G$ P_x-presque sûrement, on déduit la relation (A.3.1) cherchée.

La relation (A.3.2) en résulte : soit $\varepsilon < \rho(K \, , E \setminus G)$; on a

$$\{X_0 \in K \ , \ \sigma_G < b\} \subset \Big(\bigcup_{u \leq b} \{X_u \in G \setminus B_\varepsilon(X_0)\} \Big) \cup \{\sigma_E < b\} \ ,$$

d'où le lemme à établir, puisque $P_x\{\sigma_E < b\} \leq N_b(x \, , E)$.

C. Q. F. D.

Annexe 4

Une forme affaiblie du théorème de Hille Yosida.

LEMME. - Soit $(R_\lambda)_{\lambda > 0}$ une famille d'opérateurs positifs de l'espace de Banach $C_0(E)$ telle que :

(i) $$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda} \qquad (\lambda > 0) \ .$$

(ii) $$R_\lambda - R_\mu + (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu = 0 \qquad (\lambda > 0 \ , \ \mu > 0) \ .$$

(iii) Pour tout $g \in C_0(E)$ et tout $x \in E$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda\, g(x) = g(x) .$$

Alors, il existe un semi-groupe fortement continu $(N_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs sous-markoviens de $C_0(E)$, et un seul, admettant $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ comme résolvante.

Il suffit, pour être ramené au théorème de Hille-Yosida classique, de déterminer un sous-espace H, **dense dans** $C_0(E)$, pour tout f, duquel la convergence de $\lambda R_\lambda f$ vers f a lieu uniformément (38).

On dit que $f \in C_0^+(E)$ est μ-surmédiane ($\mu > 0$) si, pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda R_{\lambda+\mu}\, f \leqslant f .$$

En vertu de (iii) et de l'équation résolvante (ii), $\lambda R_{\lambda+\mu}\, f$ tend alors en croissant vers f lorsque λ tend vers $+\infty$, donc aussi uniformément d'après le théorème de Dini. Et $\lambda R_\lambda\, f = \lambda R_{\lambda+\mu} + \lambda\mu\, R_\lambda\, R_{\lambda+\mu}\, f$ tend aussi uniformément vers f lorsque λ tend vers $+\infty$, d'après (i).

Soit S_μ l'ensemble des fonctions μ-surmédianes ($\mu > 0$) ; S_μ est un cône convexe semi-réticulé inférieurement, et, d'après l'équation résolvante, $S_\mu \subset S_\nu$ si $\mu \leqslant \nu$; donc $S = \bigcup_{\mu>0} S_\mu$ est aussi un cône convexe semi-réticulé inférieurement. L'espace vectoriel H, engendré par S, est alors réticulé, et, pour tout $f \in H$, $\lambda R_\lambda\, f$ tend vers f uniformément quand λ tend vers $+\infty$.

D'autre part, soient $g \in C_0^+(E)$ et $f = R_\mu\, g$ ($g \geqslant 0$) ; d'après (ii),

$$\lambda R^{\lambda+\mu}\, f = R^\mu\, g - R^{\lambda+\mu}\, g \leqslant R^\mu\, g = f ,$$

donc, l'espace $R_\lambda(C_0(E)) = R$ (indépendant de $\lambda > 0$ d'après (ii)) est contenu dans H. Or, l'hypothèse (iii) entraîne que cet espace sépare les points de E. Il en est de même de H qui le contient ; d'où le résultat d'après le théorème de Stone-Weierstrass.

Annexe 5

Noyaux fortement felleriens et fonctions universellement mesurables.

LEMME. - Soit N un noyau borné sur E fortement fellerien sur l'ouvert G

---

(38) Cette démonstration nous a été communiquée par G. LION.

(n° 2.1.1). Alors, la fonction Nf est continue sur G pour toute fonction numérique f sur E universellement mesurable et bornée.

En effet, soit (a_n) une suite dense dans E ; la mesure $\mu = \sum_n \frac{1}{2^n} \varepsilon_{a_n}$ est bornée et a pour support E tout entier. f étant universellement mesurable et bornée, il existe deux fonctions boréliennes bornées f_1 et f_2 sur E telles que

$$f_1 \leqslant f \leqslant f_2 \qquad \text{et} \qquad \int (f_2(y) - f_1(y))\, \mu N(dy) = 0 .$$

Autrement dit,

$$\int \mu(dx)\,(Nf_2(x) - Nf_1(x)) = 0 \qquad \text{et} \qquad Nf_1 \leqslant Nf \leqslant Nf_2 \ ;$$

d'où le résultat, puisque Nf_1 et Nf_2 sont continues sur G .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (Heinz). - Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problem für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, Math. Annalen, t. 146, 1962, p. 1-59.

[2] BRELOT (Marcel). - Lectures on potential theory. - Bombay, Tata Institute, 1960 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 19).

[3] BLUMENTHAL (R. M.), GETOOR (R. K.) and McKEAN (H. P., Jr). - Markov processes with identical hitting distributions, Bull. Amer. math. Soc., t. 68, 1962, p. 372-373.

[4] COURRÈGE (Philippe). - Décomposition des martingales de carré intégrable, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, t. 7, 1962/63, n° 6, 14 p.

[5] COURRÈGE (Philippe). - Théorie des processus de Markov. Cours multigraphié, 1964.

[6] COURRÈGE (P.) et PRIOURET (P.). - Recollements de processus de Markov (à paraître).

[7] DOOB (J. L.). - Semimartingales and subharmonic functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 77, 1954, p. 86-121.

[8] DOOB (J. L.). - Probability methods applied to the first boundary value problem, Proceedings of the Third Berkeley symposium on mathematical statistics and probability [1954. Berkeley], Vol. 2, p. 49-80. - Berkeley, University of California Press, 1956.

[9] DOOB (J. L.). - Probability theory and the first boundary value problem, Illinois J. of Math., t. 2, 1958, p. 18-36.

[10] DYNKIN (E. B.). - Théorie des processus markoviens, traduit par C. Sardou. - Paris, Dunod, 1963 (Collection universitaire de Mathématiques, 11) ; [en russe] Moskva, 1959.

[11] DYNKIN (E. B.). - Processus de Markov [en russe]. - Moskva, 1963.

[12] GIRSANOV (I. V.). - Strongly-Feller processes, Theory of Prob. and Appl., t. 5, 1960, p. 5-24 ; [en russe], Teorija Veroj. i ee Prim., t. 5, 1960, p. 7-28.

[13] LOÈVE (Michel). - Probability theory. 3rd edition. - Princeton, D. Van Nostrand Comp., 1963 (The University Series in higher Mathematics).

[14] MEYER (Paul-André). - Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 125-230 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[15] MEYER (Paul-André). - Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, fasc. 2, p. 357-372.

[16] Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY : Théorie du Potentiel, t. 5, 1960/61. - Paris, Secrétariat mathématique, 1961.

[17] ŠUR (M. G.). - Localization of the concept of an excessive function connected with a Markov process, Theory of Prob. and Appl., t. 7, 1962, p. 185-189 ; [en russe], Teorija Veroj. i ee Prim., t. 7, 1962, p. 191-196.