Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Jean-Marie Exbrayat
Bernard Saint-Loup

Axiomatique Brelot-Bauer

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 11 (1966-1967), exp. n° 6, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1966-1967__11__A3_0>

AXIOMATIQUE BRELOT-BAUER

par Jean-Marie EXBRAYAT et Bernard SAINT-LOUP

(d'après H. BAUER [1])

Cet exposé est fondé sur l'ouvrage de Heinz BAUER ([1]), et sur celui de Marcel BRELOT ([2]) paru aux presses de l'Université de Montréal.

§ 1. Espaces de Bauer et espaces de Brelot.

Les données et axiomes en axiomatique de Bauer sont les suivants :

X est un espace topologique localement compact, souvent à base dénombrable. $\mathcal{U}$ désigne l'ensemble des ouverts non vides de X. On se donne sur $\mathcal{U}$ un faisceau $U \longmapsto \mathcal{H}_U$ de fonctions numériques. Les éléments de $\mathcal{H}_U$ sont les fonctions harmoniques dans U.

AXIOME (I). - $\forall\ U \in \mathcal{U}$, $\mathcal{H}_U$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, \underline{\mathbb{R}})$.

DÉFINITIONS.

(a) $V \subset X$ est dit régulier si :

1° V est ouvert, relativement compact, de frontière $\partial V = V^* \neq \emptyset$;

2° $\forall\ f \in \mathcal{C}(V^*)$, $\exists\ g \in \mathcal{C}(\overline{V})$ unique, telle que :

$$g|_{V^*} = f \quad \text{et} \quad g|_V = H_f^V \in \mathcal{H}_V ;$$

3° $f \geqslant 0 \implies H_f^V \geqslant 0$.

(b) Soit $U \in \mathcal{U}$; $u : U \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite hyperharmonique si $u > -\infty$; u est s. c. i. ; $\forall\ V$ régulier, $\overline{V} \subset U$, et $f \in \mathcal{C}(V^*)$; $f \leqslant u$ sur V^*, alors

$$H_f^V \leqslant u \quad \text{dans } V .$$

On note $\mathcal{H}_U^*$ l'ensemble des fonctions hyperharmoniques dans U. Les notations ${}_+\mathcal{H}_U$, ${}_+\mathcal{H}_U^*$ ont une signification évidente. On note, en outre, μ_x^V (V régulier ; $x \in V$) la mesure de Radon positive, définie par

$$H_f^V(x) = \int f \, d\mu_x^V \qquad \text{pour } f \in \mathcal{C}(V^*) .$$

AXIOME (II). - Les ensembles réguliers forment une base de la topologie de X .

Ensuite, on peut adjoindre aux axiomes I et II des axiomes plus ou moins faibles, dont l'un est un axiome de convergence, et l'autre un axiome de séparation. BAUER introduit les trois axiomes de convergence (K_1), (K_2), (K_D) (dits axiome III), et les trois axiomes de séparation (T), (T^+), (T') (dits axiome IV) :

AXIOME (K_1). - Soit $U \in \mathfrak{U}$, et soit $\mathfrak{F}$ un ordonné filtrant croissant de fonctions harmoniques dans U . Si $\sup \mathfrak{F} < K$, alors

$$\sup \mathfrak{F} \in \mathcal{H}_U .$$

AXIOME (K_2). - Soit $U \in \mathfrak{U}$, et soit $\mathfrak{F}$ un ordonné filtrant croissant de fonctions harmoniques dans U . Si $\sup \mathfrak{F} < +\infty$ partout, alors

$$\sup \mathfrak{F} \in \mathcal{H}_U .$$

AXIOME (K_D). - Soit $U \in \mathfrak{U}$, et soit $\mathfrak{F}$ un ordonné filtrant croissant de fonctions harmoniques dans U . Si $\sup \mathfrak{F} < +\infty$ sur un ensemble partout dense de U , alors

$$\sup \mathfrak{F} \in \mathcal{H}_U .$$

Il est clair que

$$(K_D) \implies (K_2) \implies (K_1) .$$

AXIOME (T). - Il existe $h \in \mathcal{H}_X$, $h > 0$, et les fonctions hyper-h-harmoniques (quotients par h des fonctions hyperharmoniques) séparent les points de X :

$$\forall\, x , y \in X , \quad x \neq y , \quad \exists\, u \in \mathcal{H}_X^* \text{ avec } u(x)\, h(y) \neq h(x)\, u(y) .$$

AXIOME (T^+). - Il existe $h \in \mathcal{H}_X$, $h > 0$, et les fonctions hyper-h-harmoniques > 0 (quotients par h des fonctions hyperharmoniques) séparent les points de X .

AXIOME (T'). - $\forall\, U \in \mathfrak{U}$ relativement compact, $\mathcal{H}_U$ contient une fonction > 0 . De plus, $\mathcal{H}_X^*$ sépare fortement les points de X :

$$\forall\, x , y \in X , \quad x \neq y , \quad \exists\, u , v \in \mathcal{H}_X^* \text{ avec } u(x)\, v(y) \neq v(x)\, u(y) .$$

Il est clair que $(T^+) \implies (T)$. Si d'autre part, il existe sur X une fonction harmonique > 0 , alors $(T') \implies (T)$.

On veut choisir un axiome de convergence, assez faible pour conserver parmi les espaces harmoniques $\underset{\sim}{R}^{n+1}$ avec, comme faisceau de fonctions harmoniques, les solutions de l'équation de la chaleur, et, d'autre part, assez fort pour permettre de retrouver le maximum des résultats obtenus en axiomatique de base (axiomatique de Brelot), i. e. la structure topologique de X , un principe du minimum satisfaisant, un théorème de convergence avec ensemble exceptionnel pas trop gros, un théorème de partition, etc.

Si l'on pose en axiomes (I), (II), (T), on peut démontrer que tout ouvert appartenant à $\mathcal{U}$, est non compact (en particulier X), ainsi qu'un principe du minimum pour tout ouvert relativement compact. On obtient aussi le caractère local de l'hyperharmonicité et, si V est régulier, le fait que :

$$u_V(x) = \begin{cases} \int u \, d\mu_x^V & \text{si} \quad x \in V \\ u(x) & \text{si} \quad x \notin V \end{cases}$$

est hyperharmonique avec u .

Si l'on pose en axiomes (I), (II), (K_1) et la première partie de (T'), on peut démontrer que X est localement connexe, et traiter le problème de Dirichlet pour un ouvert relativement compact ω et une donnée-frontière continue, en suivant la méthode B.-P.-W. (BRELOT-PERRON-WIENER).

Prenant X à base dénombrable, (I), (II), (K_2), et (T'), on a, à la fois, que la résolutivité est équivalente à la $d\mu_x^\omega$-intégrabilité pour tout x dans ω (base dénombrable) et que l'enveloppe commune est harmonique (grâce à (K_2)). Mais on ne peut rien dire sur l'ensemble des points-frontière irréguliers de ω .

En définitive, on est amené à choisir comme axiomatique : (I), (II), (K_D) (dit (III)) et (T') (dit (IV)). $(X , \mathcal{H})$, satisfaisant à ces axiomes, est dit espace de Bauer. Nous nous plaçons maintenant dans un tel espace :

On démontre que les fonctions de $\mathcal{H}_U^*$ sont celles des fonctions u , s. c. i. dans U , $> -\infty$,qui vérifient :

$$\int u \, d\mu_x^V \leqslant u(x) \quad \text{pour tout} \quad V \quad \text{régulier} \quad \subset U \quad \text{et} \quad x \in V \, .$$

En outre, (III), formulé avec des suites, est alors équivalent à (K_D). On a aussi l'équivalence des groupes d'axiomes suivants :

(I) , (II) , (III) ; (I) , (II) , (III') ; (I) , (II) , (III") , avec, $\mathcal{B}$ désignant une base de X formée d'ensembles réguliers, les axiomes suivants :

AXIOME (III'). - $\forall\, V \in \mathcal{B}$ et $\forall\, f : V^* \to \overline{\mathbb{R}}$ qui possède une μ_x^V-intégrale supérieure finie pour un ensemble de x dense dans V,

$$x \longmapsto \int^* f\, d\mu_x^V \in \mathcal{H}_V .$$

AXIOME (III"). - $\forall\, V \in \mathcal{B}$ et $\forall\, f : V^* \to \overline{\mathbb{R}}$ qui est μ_x^V-intégrable pour un ensemble de x dense dans V, alors

$$x \longrightarrow \int f\, d\mu_x^V$$

est dans $\mathcal{H}_V$.

Ceci entraîne que $x \longrightarrow \int^* f\, d\mu_x^V$ (f quelconque minorée) est enveloppe supérieure d'un filtrant croissant de fonctions harmoniques bornées dans V, donc en particulier hyperharmonique. On démontre, comme il a été dit, le caractère localement connexe de X, le fait que tout ouvert relativement compact de X a une frontière non vide, que X est non compact, donc que dans un espace de Bauer les domaines réguliers forment une base de la topologie. On a le principe du minimum suivant :

Soit U ouvert relativement compact et $u \in \mathcal{H}_U^*$ avec

$$\liminf_{\substack{x \to y \\ x \in U}} u(x) \geqslant 0 , \qquad \forall\, y \in U^* .$$

Alors $u \geqslant 0$.

On démontre encore le caractère local de l'hyperharmonicité : $U \longmapsto \mathcal{H}_U^*$ est un faisceau.

On dit que $A \subset X$ est absorbant, si :

A est fermé et $\forall\, x \in A$, $\forall\, V$ voisinage régulier de x, $S\mu_x^V \subset A$ ($S\mu_x^V$ = support de μ_x^V). Soit A une partie de X. On a les équivalences suivantes :

$$A \text{ absorbant } \iff \exists\, u \in {}_+\mathcal{H}_X^* \text{ avec } A = u^{-1}(\{0\})$$

$$\iff \exists\, u \in \mathcal{H}_X^* \text{ avec } A = \overline{\{x \in X ;\ u(x) < +\infty\}}$$

$\emptyset$ est le seul compact absorbant.

$\emptyset$ et X sont évidemment absorbants. Ce sont les seuls en théorie classique ; pour l'équation de la chaleur : $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_{n+1}}$, les ensembles absorbants sont de la forme :

$$A_\tau = \{x \in \underset{\sim}{R}^{n+1} \text{ avec } x_{n+1} \leqslant \tau\} \qquad (\tau \in \overline{\underset{\sim}{R}}) .$$

L'inégalité de Harnack s'exprime alors ainsi :

Soient μ une mesure positive sur X, A le plus petit ensemble absorbant contenant $S\mu$, K un compact $\subset A$. Alors :

$$\exists\, \alpha = \alpha(K\,;\,\mu) \geqslant 0 \text{ tel que } \sup h(K) \leqslant \alpha \int h\, d\mu , \qquad \forall\, h \in {}_+\mathcal{H}_X .$$

Guidé par la comparaison avec l'axiomatique de base ; H. BAUER introduit la notion d'espace harmonique elliptique en un point x. (Il existe un système fondamental de voisinages réguliers V de x tels que $S\mu_x^V = V^*$.) Un espace harmonique est dit elliptique s'il est elliptique en chacun de ses points. L'espace $\underset{\sim}{R}^n$ en théorie classique est elliptique. Par contre, l'espace $\underset{\sim}{R}^{n+1}$, avec équation de la chaleur, n'est elliptique en aucun de ses points.

On peut démontrer alors des propriétés que nous retrouverons plus loin, à savoir :

(a) X elliptique connexe $\Rightarrow$ $\emptyset$ et X sont les seuls absorbants.
(b) X elliptique connexe ; $u \in {}_+\mathcal{H}_X^*$ $\Rightarrow$ $u = 0$ ou $u > 0$ partout.

Dans un espace elliptique X, l'inégalité de Harnack a une formulation bien plus simple : Soit G un domaine $\subset X$; K compact $\subset G$; $x \in G$. Alors, il existe $\alpha \geqslant 0$, tel que

$$\sup h(K) \leqslant \alpha\, h(x) \qquad \forall\, h \in {}_+\mathcal{H}_G .$$

Dans un espace de Bauer elliptique, on a, pour théorème, l'axiome (III) pour les suites de l'axiomatique de base (soit u_n une suite croissante de fonctions harmoniques dans un domaine $\omega \subset X$. Alors : ou bien $\sup u_n = +\infty$, ou bien $\sup u_n \in \mathcal{H}_\omega$).

Donc,

(I), (II), (K_D), (T') + espace elliptique $\Longrightarrow$ (I), (II) ; (III **et suites**).

Autrement dit, tout espace de Bauer elliptique connexe est un espace de Brelot. On a donc, dans un tel espace, les équivalents classiques de (III et suites)(à savoir (III) et ses autres formulations). Pour pouvoir poursuivre la comparaison entre les deux axiomatiques, nous introduisons d'autres notions :

Soit $(X\,;\,\mathcal{H})$ un espace de Bauer. Une partie de X est dite négligeable, si elle est de μ_x^V-mesure nulle, $\forall\, V$ régulier, $\forall\, x \in V$. Un tel ensemble est d'intérieur vide. D'où les notions de quasi-partout.

Soit $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ et $E \subset X$ quelconque. La fonction

$$R_\varphi^E = \inf\{v \in {}_+\mathcal{H}_X^* \text{ tel que } v(x) \geqslant \varphi(x) \text{ sur } E\}$$

est la réduite de φ sur E. $\hat{R}_\varphi^E$, régularisée s. c. i. de R_φ^E, est la balayée de φ sur E. $\hat{R}_\varphi^E \in {}_+\mathcal{H}_X^*$. On a les propriétés suivantes :

(a) Si $u \in {}_+\mathcal{H}_X^*$, alors

$$R_u^E = \inf\{v \in \mathcal{H}_X^* \text{ tel que } 0 \leqslant v \leqslant u \text{ et } v(x) = u(x) \text{ sur } E\}\,.$$

Donc :

$$0 \leqslant \hat{R}_u^E \leqslant R_u^E \leqslant u \quad\text{et}\quad R_u^E = u \quad\text{sur}\quad E\,.$$

(b) Si E est ouvert,

$$R_u^E = \hat{R}_u^E \quad (u \in {}_+\mathcal{H}_X^*)\,.$$

(c) Si V est régulier, $u \in {}_+\mathcal{H}_X^*$, on a

$$u_V = \hat{R}_u^{\complement V} = R_u^{\complement V}$$

(voir page 3 pour la définition de u_V).

(d) Si $u\,,\,v \in {}_+\mathcal{H}_X^*$, $E\,,\,F \subset X$, alors :

$$R_{u+v}^E \leqslant R_u^E + R_v^E\,; \qquad R_u^{E\cup F} \leqslant R_u^E + R_u^F\,;$$

$$E \subset F \implies R_u^E \leqslant R_u^F\,; \qquad u \leqslant v \text{ dans } E \implies R_u^E \leqslant R_v^E\,.$$

$$E \subset F \implies R_u^E = R_{R_u^F}^E\,.$$

En particulier :

$$R_u^E = R_{R_u^E}^E\,,$$

mais la propriété avec les balayées est fausse dans un espace de Bauer général.

Soit $U \in \mathcal{U}$. On appelle surharmonique dans U toute fonction hyperharmonique finie dans un ensemble dense dans U . $\mathcal{S}_U$ (resp. ${}_+\mathcal{S}_U$) est l'ensemble des fonctions surharmoniques (resp. surharmoniques positives) dans U . $U \longmapsto \mathcal{S}_U$ est un faisceau. Soit $u \in \mathcal{H}_X^*$. Alors :

$$u \in \mathcal{S}_X \iff u \ \mu_x^V\text{-intégrable}, \quad \forall V \text{ régulier}, \ \forall x \in V ,$$

$$\iff u \text{ finie quasi-partout.}$$

Si $s \in \mathcal{S}_X$ et V régulier, alors $s_V \in \mathcal{S}_X$. On montre que, si $s \in {}_+\mathcal{S}_X$, $\hat{R}_s^E \in {}_+\mathcal{S}_X$, et la restriction de $\hat{R}_s^E$ à $\complement \overline{E}$ $(= R_s^E)$ appartient à $\mathcal{H}_{\complement \overline{E}}$.

Si $s \in {}_+\mathcal{S}_X$, l'ènveloppe supérieure de l'ensemble des minorantes sous-harmoniques de s (0 en est une) est une fonction harmonique qui minore s . Dans le cas où cette fonction est 0 , on dit que s est un potentiel. Ceci s'exprime encore par

$$0 \leqslant h \leqslant s \text{ et } h \text{ harmonique} \implies h = 0 .$$

On a, comme en théorie classique, un théorème de décomposition.

THÉORÈME de décomposition. - *Soit $s \in {}_+\mathcal{S}_X$. Il existe, de façon unique, p potentiel (c'est la partie potentielle de s) et h harmonique (c'est la partie harmonique de s) tels que :*

$$s = p + h .$$

h est la plus grande minorante sous-harmonique de s , donc $h \geqslant 0$ et $0 \leqslant p \leqslant s$.

Toute fonction $s \in {}_+\mathcal{S}_X$, majorée par un potentiel, est un potentiel. L'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_X$ des potentiels sur X est un cône convexe.

DÉFINITION. - Un espace harmonique de Bauer $(X ; \mathcal{H})$ est dit harmonique fort si:

(P_0) $\qquad \forall x \in X , \ \exists p \in \mathcal{P}$ avec $p(x) > 0$.

Par exemple, $\mathbb{R}^n$, avec les fonctions harmoniques classiques, est harmonique fort pour $n \geqslant 3$, $\mathbb{R}^{n+1}$, avec équation de la chaleur, est harmonique fort pour $n \geqslant 1$.

Introduisons :

(P_1) $\qquad \mathcal{P}$ sépare fortement les points de X .

(P_2) $\qquad {}_+\mathcal{S}_X$ sépare fortement les points de X .

(P_3) $\qquad \forall V$ régulier, $\forall x \in V$, $\exists s \in {}_+\mathcal{S}_X$ tel que $\int s \, d\mu_x^V < s(x)$.

(P_4) $\qquad \forall V$ régulier, $\forall x \in V$, $\exists p \in \mathcal{P}$ avec $\int p \, d\mu_x^V < p(x)$.

Dans un espace de Bauer, les propriétés (P_i), $i = 0 , 1 , 2 , 3 , 4$, sont équivalentes. On a alors les implications :

(a) " X <u>espace de Bauer elliptique connexe, harmonique fort</u>" <u>entraîne</u> " X <u>espace de Brelot avec l'existence d'un potentiel</u> > 0 <u>partout</u>"

(b) " X <u>espace de Brelot avec l'existence de deux fonctions harmoniques</u> > 0 <u>non proportionnelles</u>" <u>entraîne</u> " X <u>espace de Bauer elliptique connexe harmonique fort</u>".

Seul (b) est délicat. On sait que, dans un espace de Brelot, l'existence de deux fonctions harmoniques > 0 non proportionnelles entraîne celle d'un potentiel $p > 0$, partout. En outre, l'axiome (III) ou (III et suites) donne bien (K_D). Les ensembles absorbants dans un espace de Brelot sont manifestement $\emptyset$ et X (de la forme $A_u = \overline{\{x \text{ tel que } u(x) < +\infty\}}$ où $u \in \mathcal{H}^*_{+X}$). Un espace de Brelot est manifestement elliptique, car on sait que, $\forall\, V$ domaine régulier, $\forall\, x \in V$ et $\forall\, \omega$ ouvert non vide de V^* , alors

$$\mu_x^V(\omega) > 0 .$$

Montrons donc (IV). Soient x et $y \in X$, $x \neq y$, et $\mathcal{B}$ la base de X formée des domaines réguliers qui ne contiennent pas à la fois x et y . Si

$$\omega_1 , \omega_2 , \ldots , \omega_n \in \mathcal{B} ,$$

on définit $p_{\omega_1,\ldots,\omega_n}$ par récurrence comme étant $(p_{\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}})_{\omega_n}$ (au sens de s_V) où p est toujours un potentiel > 0 sur X .

$$\mathfrak{F} = \{p_{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n} \text{ pour } \omega_1 , \omega_2 , \ldots , \omega_n \in \mathcal{B}\}$$

est un filtrant décroissant de potentiels sur X , et $\inf \mathfrak{F}$ est une fonction harmonique, car localement harmonique, donc

$$\inf \mathfrak{F} = 0 .$$

Par suite, il existe $V_1 , V_2 , \ldots , V_n \in \mathcal{B}$ avec :

$$p_{V_1,V_2,\ldots,V_n}(x) < p(x)$$

et n minimal. Il faut donc $x \in V_n$. Dans ce cas :

- ou bien $p_{V_1,\ldots,V_n}(y) = p(y)$ et p et $p_{V_1,\ldots,V_n}$ séparent fortement x et y ;
- ou bien $p_{V_1,\ldots,V_n}(y) < p(y)$ et comme $x \in V_n$, $y \notin V_n$ (définition de $\mathcal{B}$),

$$p_{V_1,\dots,V_{n-1}}(y) = p_{V_1,\dots,V_n}(y) < p(y) \ ; \qquad p_{V_1,\dots,V_{n-1}}(x) = p(x) \ .$$

Par suite p et $p_{V_1,\dots,V_{n-1}}$ séparent fortement x et y.

Il s'ensuit que ${}_+\mathcal{H}_X^*$ sépare fortement X, d'où (IV), et aussi (T) et (T^+) par le raisonnement classique. On a donc l'implication (b).

Remarquons que tous les potentiels qui apparaissent dans (P_0), (P_1), (P_4) peuvent être choisis réels, continus, et harmoniques dans le complémentaire d'un compact (à support compact). Nous supposons ici essentiellement X à base dénombrable. Toute fonction de ${}_+\mathcal{H}_X^*$ est limite-croissante d'une suite de tels potentiels. De plus, il existe une fonction s_0 dans X, surharmonique, continue, réelle, > 0 partout. On obtient des raffinements sur les potentiels (on appelle potentiel fort, tout potentiel p tel que $\int p \, d\mu_x^V < p(x)$, $\forall$ V régulier, $\forall$ $x \in V$) :

(a) Soit A absorbant et soient $\mathcal{P}^A = \mathcal{P}_X \cap \mathcal{C}(X) \cap \{p$ tel que $A \subset p^{-1}(0)\}$ et K compact $\subset \complement A$. Toute $f \in \mathcal{C}(K)$ est limite uniforme sur K de fonctions appartenant à $\mathcal{P}^A - \mathcal{P}^A$;

(b) Soit A absorbant. Il existe un potentiel continu p tel que $A = p^{-1}(0)$ et que $\mathrm{Rest}_{\complement A}\, p$ soit un potentiel fort sur $\complement A$.

(c) Notons $\mathcal{P}^C$ l'ensemble des potentiels continus sur X. Alors $\mathcal{P}^C - \mathcal{P}^C \cap \mathcal{K}(X)$ est dense dans $\mathcal{C}_0(X)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur X.

(d) Appelons mesure "harmonique en x ", toute $\mu \geqslant 0$ telle que

$$\int u \, d\mu \leq u(x) \ , \quad \forall \ u \in {}_+\mathcal{H}_X^* \quad \text{et} \quad \int h \, d\mu = h(x) \ , \quad \forall \ h \in {}_+\mathcal{H}_X \ ,$$

$$\exists \ p \in \mathcal{P}^C \ \text{tel que} \ \forall \ x \in X \ \text{et} \ \forall \ \mu \ \text{harmonique en} \ x \ , \ \mu \neq \varepsilon_x \ ,$$

alors,

$$\int p \, d\mu < p(x) \ .$$

Tout tel potentiel est fort.

§ 2. Ensembles exceptionnels. Balayage. Problème de Dirichlet.

On se place ici dans un espace X de Bauer harmonique fort. Une partie P de X est dite polaire s'il existe $s \in {}_+\mathcal{S}_X$, avec $P \subset s^{-1}(+\infty)$. Toute union dénombrable de polaires est polaire ; tout sous-ensemble d'un polaire est polaire ; tout polaire est négligeable. Mieux, si $P \subset X$ est tel qu'il existe $s \in \mathcal{S}_X$, avec

$P \subset s^{-1}(+\infty)$, alors P est polaire ; si P est polaire et $x \in \complement P$, $\exists\, s \in {}_+\mathcal{S}_X$ avec $P \subset s^{-1}(+\infty)$ et $s(x) < +\infty$.

Soit $E \subset X$ et $x \in \complement E$. E est effilé en x , si :

- ou bien $x \in \complement \overline{E}$;
- ou bien $x \in \overline{E}$ et $\exists\, u \in {}_+\mathcal{H}^*_X$ avec

$$\liminf_{\substack{y \to x \\ y \in E}} u(y) > u(x) .$$

$G \subset X$ est dit ouvert fin si $\complement G$ est effilé en tout point x de G . L'ensemble des ouverts fins est l'ensemble des ouverts d'une topologie, dite topologie fine, qui est plus fine que la topologie de X , et qui est aussi la moins fine rendant continues les fonctions hyperharmoniques positives. On a les résultats suivants :

(a) $\hat{R}^G_u = R^G_u$ dès que $u \in {}_+\mathcal{H}^*_X$ et G est ouvert fin.

(b) $\hat{R}^E_u(x) = u(x)$, $\forall\, x$ finement intérieur à E .

(c) u , $v \in {}_+\mathcal{H}^*_X$ et $E \subset X$, alors

$$R^E_{u+v} = R^E_u + R^E_v \quad \text{et} \quad \hat{R}^E_{u+v} = \hat{R}^E_u + \hat{R}^E_v .$$

(d) E , $F \subset X$, $u \in {}_+\mathcal{H}^*_X$, alors

$$R^{E\cup F}_u + R^{E\cap F}_u \leqslant R^E_u + R^F_u$$

(même propriété avec les balayées).

Il s'ensuit que, pour $s \in {}_+\mathcal{S}_X$ et $x \in X$, l'application $K \longmapsto R^K_s(x)$ (K compact) est une capacité forte. La capacité extérieure associée est $E \longmapsto R^E_s(x)$.

(e) Si $E_n \subset X$ croissant , $E = \sup E_n$, $u \in {}_+\mathcal{H}^*_X$, alors

$$\sup R^{E_n}_u = R^E_u \; ; \qquad \sup \hat{R}^{E_n}_u = \hat{R}^E_u .$$

(f) Si u_n croissante $\in {}_+\mathcal{H}^*_X$; $u = \sup u_n$, $E \subset X$, alors :

$$\sup R^E_{u_n} = R^E_u \quad \text{et} \quad \sup \hat{R}^E_{u_n} = \hat{R}^E_u .$$

(g) $\hat{R}^E_u(x) = R^E_u(x)$, $\forall\, x \in \complement E$.

(h) $E \subset X$; $x \in \complement E$; $\varphi \in {}_+\mathcal{C}(X)$ avec $0 < \varphi(x) < +\infty$. Alors

$$E \text{ effilé en } x \iff \inf_{V \text{ voisinage de } x} \hat{R}_{\varphi}^{E\cap V}(x) < \varphi(x) .$$

Nous pouvons donc poser la définition suivante :

$E \subset X$ est faiblement effilé en x $(x \in X)$, si :

$$\inf_{V \text{ voisinage de } x} \hat{R}_{1}^{E\cap V}(x) < 1 .$$

Par exemple, un ensemble polaire est faiblement effilé en tout point, et, si x est un point polaire dans $E \subset X$, l'effilement faible de E en x est exactement l'effilement faible de $E - \{x\}$ en x . Nous dirons que $E \subset X$ est totalement effilé, s'il est faiblement effilé en tout point de X , que $E \subset X$ est semi-polaire s'il est réunion dénombrable d'ensembles totalement effilés. Les trois notions de polaire, totalement effilé, et semi-polaire, sont confondues dès que tout ensemble totalement effilé est polaire (toute union dénombrable de polaires est polaire, tout polaire est totalement effilé, tout ensemble totalement effilé est semi-polaire). Ceci se passe dans le cas elliptique, mais dans un espace de Bauer quelconque, les trois notions sont, en général, distinctes. Par exemple, dans le cas $\underset{\approx}{R}^{n+1}$, avec équation de la chaleur, il existe des ensembles totalement effilés qui ne sont pas polaires (car, de complémentaire non connexe) et des ensembles semi-polaires qui ne sont pas totalement effilés. Notons ici que les notions d'effilement, de polarité et de semi-polarité sont locales (toujours dans X harmonique fort) au sens suivant :

E effilé en x $\iff$ $\exists\, U$ ouvert tel que $x \in U$ et $E \cap U$ est effilé en x dans l'espace harmonique U .

E polaire (resp. semi-polaire) $\iff$ $\forall\, x$, $\exists\, U$ ouvert, $x \in U$, avec $E \cap U$ polaire (resp. semi-polaire) dans l'espace harmonique U .

(Ceci prouve d'ailleurs que, si $U \in \mathcal{U}$, la trace sur U de la topologie fine de X n'est autre que la topologie fine de U comme espace harmonique.)

Les ensembles semi-polaires sont les ensembles exceptionnels du théorème suivant.

THÉORÈME de convergence. - Soient $\mathfrak{a}$ non vide $\subset {}_{+}\mathcal{H}_X^*$ et $u = \inf \mathfrak{a}$. Alors :

$$E = \{x \in X \text{ tel que } \hat{u}(x) < u(x)\}$$

est semi-polaire. On ne peut, bien sûr, améliorer ce résultat. On a encore :

Si $E \subset X$ et $f \geq 0$ sur X , alors $\{x \text{ tel que } \hat{R}_f^E(x) < R_f^E(x)\}$ est semi-polaire.

Si $E \subset X$ et $u \in {}_+\mathcal{H}_X^*$, alors $\{x$ tel que $\hat{R}_u^E(x) < u(x)\}$ est semi-polaire.

Soient μ à support compact et $E \subset X$. On appelle <u>mesure balayée de</u> μ <u>sur</u> E, et l'on note μ^E, l'unique mesure positive ν telle que

$$\int p \, d\nu = \int \hat{R}_p^E \, d\mu \, , \qquad \forall \, p \in \mathcal{P}^C \, ,$$

on a alors aussi :

$$\int u \, d\mu^E = \int \hat{R}_u^E \, d\mu \, , \qquad \forall \, u \in {}_+\mathcal{H}_X^* \, .$$

Il est clair que, si V est régulier, $\mu_x^V = (\varepsilon_x)^{\complement V}$. Les ensembles polaires sont caractérisés par le fait que toute balayée sur eux est nulle. μ^E est portée par $(S\mu \cap \overset{\circ}{E}) \cup E^*$, et on a les bonnes propriétés de passage à la limite :

Si $E_n \subset X$ croissant et $E = \sup E_n$, alors μ^{E_n} tend vaguement vers μ^E.

Si μ_n tend vaguement vers μ, alors μ_n^E tend vaguement vers μ^E, ceci pour tout $E \subset X$.

Soit alors U un ouvert non vide relativement compact de X ; $x \in U$. Nous prenons pour <u>mesure harmonique</u> μ_x^U la balayée $(\varepsilon_x)^{\complement U}$, d'où les propriétés suivantes :

Si $f \in \mathcal{C}(U^*)$, alors $x \dashrightarrow \int f \, d\mu_x^U \in \mathcal{H}_U$.

Si $f : U^* \to \overline{\mathbb{R}}$ et, sur un ensemble partout dense de x, possède une μ_x^U-intégrale supérieure finie, ou est μ_x^U-intégrable, alors

$$x \dashrightarrow \int^* f \, d\mu_x^U \quad (\text{resp. } \int f \, d\mu_x^U)$$

est harmonique dans U.

Si $u \in \mathcal{H}_X^*$, alors $\int u \, d\mu_x^U \leq u(x)$.

Si f est μ_x^U-intégrable pour tout x dans U, on appellera <u>solution **généralisée**</u>, attachée à f, la fonction harmonique dans U : $x \dashrightarrow \int f \, d\mu_x^U$.

La méthode BRELOT-PERRON-WIENER se déroule ici normalement.

Si $f : U^* \to \overline{\mathbb{R}}$, on considère :

$$\overline{H}_f = \inf \{u \in \mathcal{H}_U^* \text{ tel que } \liminf_{\substack{x \to z \\ x \in U}} u(x) \geq f(z) \text{ et } > -\infty \, , \quad \forall \, z \in U\}$$

et aussi

$$\underline{H}_f = - \overline{H}_{(-f)} \, ;$$

$f \to \overline{H}_f$ est sous-additive positivement homogène ; $\overline{H}_f \geq \underline{H}_f$; f est résolutive, si $\overline{H}_f$ et $\underline{H}_f$ sont égales et finies. On désigne alors par H_f l'enveloppe commune. Les fonctions résolutives sont exactement les fonctions μ_x^U-intégrables, $\forall\, x \in U$. H_f est alors la solution généralisée attachée à f.

Appelons enfin régulier, tout point $z \in U^*$ tel que :

$$f \in \mathcal{C}(U^*) \implies \lim_{x \to z} H_f(x) = f(z) ,$$

$$U \text{ régulier} \iff \text{tout point } z \in U^* \text{ est régulier.}$$

La régularité d'un point frontière, qui est une notion locale, se caractérise de la façon suivante :

$$z \in U^* \text{ régulier} \iff \complement U \text{ non effilé en } z \iff (\varepsilon_z)^{\complement U} = \varepsilon_z .$$

On en déduit que l'ensemble des points-frontière irréguliers est un semi-polaire, et l'on peut même prouver la propriété globale suivante :

$$\exists\, p \in \mathcal{P}^C \text{ tel que } \forall\, U \text{ ouvert relativement compact } z \in U^*$$

$$z \text{ régulier} \iff \hat{R}_p^{\complement U}(z) = p(z) .$$

On obtient encore un théorème de partition et un théorème de prolongement, ce qui prouve que, en dehors de l'axiome (D) (qui n'est pas vérifié en général), l'axiomatique Bauer permet d'établir une grande partie des résultats connus en axiomatique de base.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (Heinz). - Harmonische Raüme und ihre Potentialtheorie. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 22).

[2] BRELOT (Marcel). - Axiomatique des fonctions harmoniques. - Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1966 (Séminaire de Mathématiques supérieures, 14).