Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Arnaud de La Pradelle

Approximation des fonctions harmoniques à l'aide d'un théorème de G. F. Vincent-Smith

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 13 (1969-1970), exp. n° 3, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1969-1970__13__A2_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
13e année, 1969/70, n° 3, 16 p.
13 novembre 1969

APPROXIMATION DES FONCTIONS HARMONIQUES À L'AIDE D'UN THÉORÈME DE G. F. VINCENT-SMITH

par Arnaud de LA PRADELLE

Introduction. - Dans le paragraphe 1, nous exposerons, après des rappels sur la théorie des cônes de fonctions numériques, la démonstration du théorème d'approximation du type "Stone-Weierstrass" donné par G. F. VINCENT-SMITH dans [8]. Dans le paragraphe 2, nous améliorerons l'application qu'il en donne, en théorie axiomatique des fonctions harmoniques, au problème d'approcher toute fonction continue sur l'adhérence d'un ouvert relativement compact ω , par des fonctions harmoniques au voisinage de $\overline{\omega}$. Nous nous affranchirons de la condition que les fonctions surharmoniques au voisinage de $\overline{\omega}$, dont les restrictions à $\overline{\omega}$ sont continues, séparent linéairement ω^* . Dans le paragraphe 3, nous étudierons le problème de l'approximation d'une fonction $f \in \mathcal{C}(\overline{\omega})$ par des fonctions harmoniques au voisinage de $\overline{\omega}$, et à l'aide d'une hypothèse de séparation locale, on montrera que ce problème est de caractère local.

1. Rappels et théorème (voir [3]).

L'espace de base X est compact. On note C un cône convexe, stable par enveloppe inférieure finie, $C \subset \mathcal{C}(X)$.

On désigne par $\mathcal{M}^+$ le cône des mesures positives sur X , et on suppose qu'il existe $p \in C$, $p > 0$.

DÉFINITION 1. - Si μ et $\nu \in \mathcal{M}^+$, on dit que μ est balayée de ν (notée $\mu \underset{(C)}{<} \nu$), si

$$\mu(f) \leqslant \nu(f) , \qquad \forall f \in C .$$

$\mu < \nu$ définit une relation de préordre sur $\mathcal{M}^+$.

On montre que, pour toute $\nu \in \mathcal{M}^+$, il existe $\mu \underset{(C)}{<} \nu$, μ minimale, et même que si S est un sous-ensemble fermé de X , ayant la propriété que toute $v \in C$ est positive sur X si, et seulement si, elle est positive sur S , on peut choisir $\mu < \nu$, μ minimale, telle que $\mu(X - S) = 0$.

La relation fondamentale de la théorie du balayage s'écrit

$$\hat{f}(x) = \sup_{\mu \prec \varepsilon_x} \int f \, d\mu \quad ,$$

avec

$$(\hat{f}(x))_C = \inf\{g \ , \ f < g \in C\} \quad .$$

Quand il n'y a pas de confusion possible, on écrit simplement $\hat{f}$, et on a la caractérisation :

$$(\mu \in \mathfrak{M}^+ \ , \ \mu \ \text{minimale}) \iff (\mu(f) = \inf\{\mu(g) \ ; \ f < g \in C\} \ , \ \forall f \in - C)$$
$$\iff (\mu(f) = \mu(\hat{f})) \quad .$$

DÉFINITION 2. - f <u>est dite</u> C-<u>concave si,</u> $\forall x \in X$ <u>et</u> $\forall \mu < \varepsilon_x$, <u>on a</u>

$$\int^* f \, d\mu \leqslant f(x) \quad .$$

On note $\hat{C}$ le cône convexe des fonctions C-concaves s. c. i.

PROPOSITION 3. - <u>S'il existe</u> $q \in C$, $q < 0$, <u>alors, pour toute</u> $v \in \hat{C}$, <u>il existe un ensemble</u> $\{v_i\} \subset C$, <u>filtrant croissant tel que</u>

$$v = \sup v \quad .$$

DÉFINITION 4. - A <u>fermé</u> $\subset X$ <u>est une</u> C-<u>face si, pour tout</u> $x \in A$ <u>et toute</u> $\mu \underset{(C)}{\prec} \varepsilon_x$, <u>on a</u>

$$\operatorname{Supp} \mu \subset A \quad .$$

PROPRIÉTÉS 5.

(a) A <u>fermé</u> $\subset X$ <u>est une</u> C-<u>face si, et seulement si, il existe</u> $v \in \hat{C}$ <u>telle que</u>

$$v^{-1}(0) = A \quad .$$

(b) <u>Si</u> A <u>est une</u> C-<u>face et si</u> $v \in C$, <u>il est évident que</u>

$$(v)_A^{+\infty} = \begin{cases} v & \underline{\text{sur}} \ A \ , \\ + \infty & \underline{\text{ailleurs}} \ , \end{cases}$$

<u>est</u> C-<u>concave s. c. i.</u>

(c) <u>Toute intersection non vide de</u> C-<u>faces est une</u> C-<u>face, et, par suite, toute</u> C-<u>face contient une</u> C-<u>face minimale</u> (ZORN).

(d) $\underset{(C)}{\prec} \iff \underset{\hat{C}}{\prec}$, <u>et par suite</u> $\partial C = \partial \hat{C}$.

On note par A_x la plus petite C-face contenant x (elle n'est pas nécessairement minimale).

On suppose dorénavant qu'il existe $q \in C$, $q < 0$.

DÉFINITION 6. - On note ∂C , et on désigne par frontière de Choquet, l'ensemble des $x \in X$ tels que A_x soit minimale.

DÉFINITION 7. - On dit que x et y sont linéairement séparés par C , s'il existe u , $v \in C$ tels que

$$u(x)\ v(y) \neq u(y)\ v(x) \quad .$$

Celle-ci est plus forte que la séparation, elle lui est équivalente si $1 \in C$.

PROPRIÉTÉS 8.

1° $\partial C = \bigcap_{t \in -C} \{\hat{t} = t\}$.

2° Si x , $y \in \partial C$, on a $A_x \neq A_y$ si, et seulement si, C sépare linéairement x et y .

3° Si $f \in \hat{C}$, on a $f \geqslant 0$ (resp. $f > 0$) sur X si, et seulement si, $f \geqslant 0$ (resp. > 0) sur ∂C .

Soient L et M deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}(X)$.

On note $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ les deux plus petits cônes convexes stables par inf , contenant respectivement L et M .

DÉFINITION 9. - On dit que L a la propriété de séparation faible de Riesz (notée "p. s. f. R"), si, $\forall\ (f_1 , f_2 , g_1 , g_2) \subset L$ tel que

$$\sup(f_1 , f_2) < \inf(g_1 , g_2) \quad ,$$

il existe $h \in L$ tel que

$$\sup(f_1 , f_2) \leqslant h \leqslant \inf(g_1 , g_2) \quad .$$

Soit $\mathcal{S}$ un cône convexe stable par inf , contenu dans $\mathcal{C}(X)$, on désigne par L un sous-espace de fonctions $\mathcal{S}$-affines continues.

DÉFINITION 10. - On dit que $(\mathcal{S} , L)$ est un simplexe géométrique si, pour toute $-f$, $g \in \mathcal{S}$, $f < g$, il existe $h \in L$ tel que

$$f \leqslant h \leqslant g \quad .$$

Il revient au même de dire que $(\mathfrak{L}, L)$ a la p. s. f. R, ou que $(\mathfrak{L}, L)$ est un simplexe géométrique.

Interprétation géométrique. - Si L sépare X, et contient les constantes, l'injection $X \xrightarrow{i} L'$ est continue, et l'enveloppe convexe fermée de $i(X)$ est un compact K par $\sigma(L', L)$; les formes linéaires affines sur K s'identifient aux éléments de L, et dire que L a la p. s. f. R, c'est exactement dire que K est un simplexe de Choquet.

DÉFINITION 11. - Etant donnés deux cônes C_1, $C_2 \subset \mathcal{C}(X)$ stables par inf, et tels qu'il existe $p_i > 0$, $p_i \in C_i$, et $q_i \in C_i$, $q_i < 0$ $(i = 1, 2)$, on dira que ∂C_1 est complètement inclus dans ∂C_2 (noté $\partial C_2 \ll \partial C_1$), si $\partial C_2 \subset \partial C_1$, et si toute C_1-face minimale contient une C_2-face minimale unique.

Il s'agit bien d'une relation d'ordre sur les frontières de Choquet.

LEMME 12. - Soient C_1 et C_2 deux cônes convexes stables par inf, C_1, $C_2 \subset \mathcal{C}(X)$, tels qu'il existe p_i, $q_i \in C_i$, $p_i > 0$, $q_i < 0$ $(i = 1, 2)$, et tels que $\widehat{C_1} \subset \widehat{C_2}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Pour toutes C_2-faces minimales A_1, A_2, $A_1 \neq A_2$, il existe des C_1-faces B_1, B_2, minimales distinctes, $A_i \subset B_i$ $(i = 1, 2)$;

(2) $\partial C_2 \subset \partial C_1$, et C_2 sépare linéairement les points de ∂C_2 qui sont linéairement séparés par C_2 ;

(3) $\partial C_2 \ll \partial C_1$.

Démonstration. - On remarque d'abord que l'inclusion $\widehat{C_1} \subset \widehat{C_2}$ et la propriété 5 (d) entraînent que toute C_1-face est une C_2-face, et donc que toute C_1-face contient une C_2-face minimale, on en tire immédiatement que (1) $\Longleftrightarrow$ (3).

(3) $\Longleftrightarrow$ (2) résulte de la propriété 8, 2°.

On suppose dans ce qui suit qu'il existe $\ell \in L$, $\ell > 0$.

PROPOSITION 13. - Soient $\mathbb{S}$ un cône convexe stable par inf, $\mathbb{S} \subset \mathcal{C}(X)$, tel qu'il existe $p, q \in \mathbb{S}$, $p > 0$, $q < 0$, et L un ensemble de fonctions $\mathbb{S}$-affines continues, alors $(\mathbb{S}, L)$ est un simplexe géométrique, si, et seulement si:

1° L a la p. s. f. R ;

2° $\partial \mathbb{S} \ll \partial \mathfrak{L}$.

Démonstration. - La condition est nécessaire. Soient $x \in \partial \mathbb{S}$ et $f \in -\mathfrak{L}$, on a

$$f(x) = (\widehat{f(x)})_{\mathbb{S}} = \inf\{v \in \mathbb{S}, \ v(x) > f(x)\} = \inf\{h \in L, \ h(x) > f(x)\} = (\widehat{f(x)})_{\mathbb{S}} .$$

On en déduit que $x \in \partial\mathcal{L}$ et que, si x_1, $x_2 \in \partial\mathcal{S}$ sont linéairement séparés par $\mathcal{S}$, ils le sont également par $\mathcal{L}$.

Si $\{f_1, f_2, g_1, g_2\} \subset L$, $\sup(f_1, f_2) < \inf(f_1, f_2)$, on a

$$\inf(g_1, g_2) \in \hat{\mathcal{S}} \quad \text{et} \quad \sup(f_1, f_2) \in -\hat{\mathcal{S}} .$$

A l'aide du lemme de Dini et de la proposition 3, on en déduit $-u$, $v \in \mathcal{S}$ tels que

$$\sup(f_1, f_2) < u < v < \inf(f_1, f_2) ,$$

puis la p. s. f. R.

La condition est suffisante. Soient $-f$, $g \in \mathcal{S}$, $f < g$, et B une $\mathcal{L}$-face minimale. On pose

$$\alpha = \inf\{\lambda ; \lambda\ell \geqslant f \text{ sur } B\} ,$$

et

$$D = \{x \in B , (\alpha\ell - f)(x) = 0\} = \{x \in X , (\alpha\ell - f)_B^{+\infty}(x) = 0\} ;$$

D est une $\mathcal{S}$-face qui contient une $\mathcal{S}$-face minimale A, $A \subset D \subset B$. On introduit de même

$$\beta = \sup\{\lambda ; \lambda\ell \leqslant g \text{ sur } B\} ,$$

et

$$D' = \{x \in X ; (g - \beta\ell)_B^{+\infty}(x) = 0\}$$

On a encore $A \subset D' \subset B$. Comme $\alpha < \beta$, il existe γ tel que $\alpha < \gamma\ell < \beta$ sur B et $(\gamma\ell)_B^{+\infty} \in \hat{\mathcal{L}}$, donc $(\gamma\ell)_B^{+\infty} = \sup\{\omega_i \in \mathcal{L} , \omega_i \nearrow\}$ et, d'après le lemme de Dini, il existe $h_i \in L$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tel que

$$f < \inf(h_1, \ldots, h_n) < (\gamma\ell)_B^{+\infty} .$$

Montrons qu'il existe $h \in L$, $f < h < \inf(h_1, \ldots, h_n)$. On considère pour cela la famille

$$\mathcal{F} = \{h \in L , h < \inf(h_1, \ldots, h_n)\} .$$

$\mathcal{F}$ est filtrante croissante, parce que L a la p. s. f. R. $\bar{k} = \sup\{h ; h \in \mathcal{F}\}$ est donc $\mathcal{L}$-affine s. c. i., et $\bar{k} = \inf(h_1, \ldots, h_n)$ sur $\partial\mathcal{L}$ d'après la propriété 8, 1°, et, par suite, $\bar{k} > f$ sur $\partial\mathcal{S} \subset \partial\mathcal{L}$; finalement, $\bar{k} > f$ sur X. D'après le lemme de Dini, on en déduit une $h \in L$,

$$f < h < \inf(h_1, \ldots, h_n) .$$

On remarque d'autre part que $\inf(h_1, \ldots, h_n) < g$ sur B, et que la famille

$$\mathcal{F}' = \{h \in L \ , \quad f < h\}$$

est filtrante décroissante, d'après ce que l'on vient de voir. $\underline{k} = \inf\{h \ ; \ h \in \mathcal{F}'\}$ est donc $\mathcal{L}$-affine s. c. s., et $\underline{k} < g$ sur B . B étant une $\mathcal{L}$-face minimale arbitraire, on a $\underline{k} - g < 0$ sur $\partial\mathcal{S} \subset \partial\mathcal{L}$, donc sur X . D'après le lemme de Dini, il existe donc $h \in L$ tel que

$$f < h < g \ .$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME 14. - Soient $\mathcal{S} \subset W \subset \mathcal{C}(X)$ deux cônes convexes stables par inf , tels qu'il existe $p , q \in \mathcal{S}$, $p > 0$, $q < 0$. On désigne par M l'espace des fonctions W-affines continues, et L un sous-espace de fonctions $\mathcal{S}$-affines continues. Si $(\mathcal{S} , L)$ est un simplexe géométrique, si $\partial W \subset \partial\mathcal{S}$, et si $\mathcal{S}$ sépare linéairement les points de ∂W qui sont linéairement séparés par W , alors (W , L) est un simplexe géométrique, et L est uniformément dense dans M .

Démonstration. - On a $\partial W \preccurlyeq \partial\mathcal{S} \preccurlyeq \partial\mathcal{L}$, et L a la p. s. f. R d'après la proposition 13. On conclut, d'après la même proposition, que (W , L) est un simplexe géométrique. En appliquant le lemme de Dini pour tout $\varepsilon > 0$, et $f \in M$, il existe $-s , t \in W$ et $\ell \in L$, tels que

$$f - \varepsilon p < s < \ell < t < \varepsilon p + f \ ,$$

grâce à la proposition 3.

2. Application axiomatique.

Rappel axiomatique de la théorie des Roumains ([2]). - L'espace de base Ω est localement compact et, à tout ouvert $\omega \subset \Omega$, on associe un espace vectoriel $\mathcal{H}(\omega) \subset \mathcal{C}(\omega)$ vérifiant l'axiome des faisceaux. Les fonctions de $\mathcal{H}(\omega)$ sont appelées fonctions harmoniques.

Un ouvert relativement compact $\omega \subset \Omega$ est dit régulier, si sa frontière ω^* est non vide et si, pour toute $f \in \mathcal{C}(\omega^*)$, il existe un prolongement continu unique à $\overline{\omega}$, tel que sa restriction à ω , notée H_f^ω , appartienne à $\mathcal{H}(\omega)$, et que l'on ait $H_f^\omega \geqslant 0$ dans ω dès que f est $\geqslant 0$. On peut donc écrire

$$H_f^\omega(x) = \int f \, d\rho_x^\omega \ ,$$

où ρ_x^ω est une mesure de Radon portée par ω^* . ρ_x^ω est appelée la mesure harmonique au point $x \in \omega$.

Une fonction v est dite hyperharmonique dans un ouvert ω, si elle est s. c. i., $> -\infty$, et si, pour tout $x \in \omega$, il existe un voisinage $V_v(x)$ de x contenu dans ω, tel que, pour tout ouvert régulier δ, $\bar{\delta} \subset V_v(x)$ et, pour tout $y \in \delta$, on ait

$$v(y) \geqslant \int^* v \, d\rho_y^\delta \ .$$

Un ouvert ω est dit de type M. P., si toute fonction v hyperharmonique dans ω est $\geqslant 0$, si v est $\geqslant 0$ en dehors d'un compact K_v de X, et si, pour tout $x \in \omega^*$, on a

$$\liminf_{y \to x} v(y) \geqslant 0 \ .$$

On suppose que les axiomes suivants sont vérifiés :

(H_0) Pour tout $x \in \Omega$, il existe h harmonique au voisinage de x telle que $h(x) > 0$.

(H_1) Les ouverts réguliers forment une base d'ouverts de Ω.

(H_2) Il existe un recouvrement de Ω par des ouverts de type M. P.

(H_3) Pour tout ouvert ω, l'enveloppe supérieure d'un ordonné filtrant croissant $\{h_i\}$ de fonctions harmoniques, majorées par une constante, est harmonique.

Dans l'axiomatique de H. BAUER, les fonctions hyperharmoniques dans Ω séparent linéairement Ω [1], et on en déduit le principe du minimum. Ici on suppose, à défaut de séparation, que le principe du minimum est vérifié selon (H_2). Une théorie axiomatique, vérifiant les conditions de BAUER localement, vérifie évidemment (H_0), (H_1), (H_2).

Indiquons les propriétés suivantes :

(H_0) et (H_3) entraînent la locale connexité de Ω.

Si ω est un ouvert de type M. P., tout sous-ouvert de ω est lui-même de type M. P.

<u>Problème de Dirichlet pour ouvert</u>. - Soit ω un ouvert relativement compact de type M. P., $\subset \Omega$, de frontière ω^* non vide. Pour toute fonction numérique f, définie sur ω^*, on note $\overline{\mathcal{H}_f^{(\omega)}}$ la famille des v hyperharmoniques dans ω, vérifiant, en tout point-frontière $y \in \omega^*$,

$$\liminf_{x \to y} v(x) \geqslant f(y) \ , \quad \text{et} \ > -\infty \ .$$

---

(1) Avec la convention $0 . \pm \infty = 0$.

On pose $\overline{H_f^{\omega}}(x) = \inf\{v \; ; \; v \in \overline{\mathcal{K}_f^{\omega}}\}$.

DÉFINITION 15. - f <u>est dite résolutive, si</u> $\overline{H_f^{\omega}}$ <u>est finie, et si</u> $\underline{H_f^{\omega}} = \overline{H_f^{\omega}}$. <u>On note</u> H_f^{ω} <u>la valeur commune</u>.

Les fonctions résolutives forment un espace vectoriel.

On notera par $\mathcal{S}$ (resp. W) le cône convexe des fonctions continues sur $\overline{\omega}$, prolongeables surharmoniquement au voisinage de $\overline{\omega}$ (resp. surharmoniques dans ω). $\mathcal{S}$ et W sont stables par inf , et $\mathcal{S} \subset W$. On suppose de plus qu'il existe $p , q \in \mathcal{S}$, $p > 0$, $q < 0$.

On démontre, comme dans le cas classique, que l'espace vectoriel fermé (dans $\mathcal{C}(\omega^*)$) engendré par $W_{|\omega^*}$ est un sous-espace de fonctions résolutives.

DÉFINITION 16. - $x_0 \in \omega^*$ <u>est dit point-frontière</u> $\mathcal{E}$-<u>régulier, si on</u>

$$\lim_{x \to x_0} H_f^{\omega}(x) = f(x_0) , \qquad \underline{\text{pour toute}} \; f \in \mathcal{E} ,$$

<u>où</u> $\mathcal{E}$ <u>est un sous-cône de</u> $\overline{W}$.

Si x_0 est $\mathcal{E}$-régulier, il est aussi $\mathcal{E}$-régulier, et on note $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ l'ensemble des points $\mathcal{E}$-réguliers.

<u>Problème de Dirichlet pour compact</u> ([4]). - Soient $E \subset \Omega$, E compact, $E^* \neq \emptyset$ tel qu'il existe un ouvert ω de type M. P., $\omega \supset E$, et f définie sur E^* . On note $\overline{\mathcal{K}_f^E}$ la famille des fonctions v hyperharmoniques au voisinage de E , et vérifiant

$$\liminf_{\complement E \ni x \to y \in E^*} v(x) \geqslant f(y) , \qquad \text{pour tout } y \in E^* ,$$

et

$$\overline{K_f^E}(x) = \inf\{v(x) \; ; \; v \in \overline{\mathcal{K}_f^E}\} , \qquad \text{pour tout } x \in E .$$

On introduit de même $\underline{K_f^E}(x) = \overline{K_{(-f)}^E}(x)$.

DÉFINITION 17. - f <u>est dite résolutive, si</u> $\overline{K_f^E}$ <u>est finie, et si</u> $\underline{K_f^E} = \overline{K_f^E}$, <u>et on note</u> K_f^E <u>la valeur commune</u>.

Pour tout fermé $F \subset \Omega$, on note $\mathcal{S}(F)$ (resp. $L(F)$) le cône (resp. l'espace vectoriel) des fonctions continues sur F qui sont les restrictions à F de fonctions hyperharmoniques au voisinage de F (resp. harmoniques au voisinage de F). On suppose qu'il existe $p , q \in \mathcal{S}(E)$, $p > 0$, $q < 0$.

Les fonctions résolutives forment un espace vectoriel, et on démontre comme dans le cas classique que toute fonction $v \in \mathcal{S}(E)$ est résolutive.

DÉFINITION 18. - $x_0 \in E^*$ <u>est dit point-frontière</u> $\mathcal{E}$-<u>stable pour</u> E , <u>si on a</u>

$$K_f^E(x_0) = f(x_0) \ , \qquad \text{pour toute } \ f \in \mathcal{E} \ ,$$

<u>où</u> $\mathcal{E}$ <u>est un sous-cône de</u> $\overline{\mathcal{S}}$.

Si x_0 est $\mathcal{E}$-stable, il est aussi $\overline{\mathcal{E}}$-stable, et on note $\mathcal{R}_s(\mathcal{E})$ l'ensemble des points $\mathcal{E}$-stables.

PROPOSITION 19 ([4]). - <u>Si</u> $v \in \mathcal{S}(E)$, <u>et si</u> $\{\omega_i\}$ <u>est un ensemble filtrant décroissant d'ouverts tels que</u> $\cap\, \omega_i = E$, <u>on a</u>

$$K_v^E(x) = \sup_{\omega_i} H_v^{\overline{\omega_i}}(x) = \lim_{\omega_i} H_v^{\overline{\omega_i}}(x) \quad .$$

COROLLAIRE 20. - $(\mathcal{S}(E) \ , L(E))$ <u>est un simplexe géométrique</u>.

En effet, si $-u$, v sont surharmoniques au voisinage de E , telles que $-u_{|E}$ et $v_{|E}$ appartiennent à $\mathcal{S}(E)$, et que $u_{|E} < v_{|E}$, il existe ω_i tel que

$$u \leqslant H_v^{\overline{\omega_i}} \leqslant v \quad .$$

COROLLAIRE 21. - $\mathcal{R}_s(\mathcal{S}) = E^* \cap \partial\mathcal{S}(E)$.

<u>Démonstration</u>. - Soit u sous-harmonique au voisinage de E , telle que $u_{|E} \in -\mathcal{S}(E)$. On a, en notant de la même façon u et ses traces sur E^* et ω_i^* ,

$$K_u^E = \inf H_u^{\overline{\omega_i}} = \inf\{v \in \mathcal{S} \ , \ \ u < v\} = \hat{u} \quad .$$

On conclut que $K_u = u$ pour toute $u \in -\mathcal{S}(E)$ si, et seulement si, $u = \hat{u}$.

COROLLAIRE 22 (Pour le cas classique, voir M. BRELOT [4]). - $\mathcal{R}_s(\mathcal{E}) = E^*$ <u>si, et seulement si</u>, $L_{|E^*}$ <u>est uniformément dense dans</u> $\overline{\mathcal{E} - \mathcal{E}}_{|E^*}$.

<u>Démonstration</u>. - Pour toute u' sousharmonique au voisinage de E , telle que $u'_{|E} = u \in \mathcal{E}$, $H_{u'}^{\overline{\omega}}$ tend uniformément vers $K_u = u$ sur E^* , d'après le lemme de Dini, d'où le résultat par différence.

Réciproquement, si pour tout $\varepsilon > 0$ et $v \in \mathbb{S}$, on a, sur E^*, $h - \varepsilon p < v < h + \varepsilon p$ pour un $h \in L(E)$, on en déduit $h - \varepsilon p < K_v < h + \varepsilon p$, puis $K_v = v$ sur E^*.

PROPOSITION 23. – $\partial W \cap \omega^* \subset \mathcal{R}(\mathbb{S})$.

<u>Démonstration</u>. – Soient $x_0 \in \partial W \cap \omega^*$, $u \in -W$ et $v \in W$, $u < v$. On a $u \leqslant H_u^\omega \leqslant v$ dans ω. On en déduit que $H_u^\omega \leqslant \hat{u}$ dans ω. $\hat{u}$ étant s. c. s., on peut écrire

$$\limsup_{x \in \omega \to x_0} H_u^\omega(x) \leqslant \limsup_{\omega \ni x \to x_0} \hat{u}(x) = \hat{u}(x_0) = u(x_0) \quad .$$

Il est trivial que

$$\liminf_{\omega \ni x \to x_0} H_u^\omega(x) \geqslant u(x_0) \quad ,$$

et on conclut que x_0 est régulier.

On aura besoin du lemme suivant.

LEMME 24. – <u>Soient</u> $\mathcal{E}$ <u>un cône convexe</u>, $\mathcal{E} \subset W$, <u>et</u> A <u>une</u> $\mathcal{E}$<u>-face minimale non vide de</u> $\bar{\omega}$, <u>alors</u> $A \cap \omega^* \neq \emptyset$.

<u>Démonstration</u>. – Soit B une W-face minimale contenue dans A. $0_B^{+\infty} \in \hat{W}$ est hyperharmonique et, si $B \cap \omega^* = \emptyset$, on aurait $\liminf(0_B^{+\infty} + q) = +\infty$, et ω étant de type M. P., on en déduit $0_B^{+\infty} > -q$, ce qui est impossible si B est non vide. On conclut que $B \cap \omega^* \neq \emptyset$, et a fortiori $A \cap \omega^* \neq \emptyset$.

THÉORÈME 25. – <u>Si les deux conditions suivantes sont réalisées</u> :

1° $\mathbb{S}$ <u>sépare linéairement les points de</u> $\mathcal{R}(\mathbb{S})$ <u>qui sont linéairement séparés par</u> W ;

2° $\mathcal{R}(\mathbb{S}) = \mathcal{R}_s(\mathbb{S})$;

<u>alors</u> L <u>est uniformément dense dans</u> M.

<u>Démonstration</u>. – D'après la proposition 23 et le corollaire 21, la condition 2° implique que $\partial W \cap \omega^* \subset \partial \mathbb{S} \cap \omega^*$. Le lemme précédent implique que, si A est une W-face minimale, il existe nécessairement B telle que $B \cap A \neq \emptyset$, et donc telle que $A \subset B$. On en déduit que $\partial W \subset \partial \mathbb{S}$. Enfin la condition 1° entraîne que $\partial W \ll \partial \mathbb{S}$, d'après la propriété 8, 2°, et le lemme 12. On conclut que L est dense dans M, d'après le corollaire 20 et le théorème 14.

COROLLAIRE 26 (G. F. VINCENT-SMITH [8]). - Si $\mathbb{S}$ sépare linéairement ω^*, et si $\mathcal{R}_s = \mathcal{R}$, L est uniformément dense dans M.

Remarque. - Le corollaire 26 s'étend au cas d'un ouvert non relativement compact, à frontière métrisable, lorsque l'espace de base est dénombrable à l'infini (voir [6]).

DÉFINITION 27 ([3], p. 521). - Un ouvert relativement compact ω, $\omega^* \neq \emptyset$, est dit faiblement déterminant si, pour toute fonction s surharmonique $\geqslant 0$, localement bornée au voisinage de $\overline{\omega}$, harmonique dans ω, il existe une famille filtrante croissante $\{h_i\}$ de fonctions continues sur $\overline{\omega}$, harmoniques dans ω, et telle que

$$s(x) = \sup h_i(x) , \qquad \text{pour tout } x \in \omega^* .$$

THÉORÈME 28. - Si $\mathbb{S}$ sépare linéairement les points de ω^* qui sont linéairement séparés par W, et si ω est faiblement déterminant, alors L est uniformément dense dans M si, et seulement si,

$$\mathcal{R}(\mathbb{S}) = \mathcal{R}_s(\mathbb{S}) .$$

On s'appuie sur le résultat suivant.

LEMME 29. - Si $\mathbb{S}$ sépare linéairement les points de ω^* qui sont linéairement séparés par W, et si ω est faiblement déterminant, alors (W , M) est un simplexe géométrique, et

$$\partial W \cap \omega^* = \mathcal{R}(\mathbb{S}) .$$

Démonstration. - Soient $s \in W$, et u sousharmonique continue $\leqslant 0$, au voisinage de $\overline{\omega}$, telle que $u_{|\overline{\omega}} = t$ vérifie

$$t < s \quad \text{sur } \omega^* .$$

La régularisée s. c. s. t' de la fonction, égale à H_t^ω dans ω, et à u ailleurs, est $\leqslant 0$, sousharmonique et localement bornée, et on a

$$(1) \qquad t \leqslant t' < s \quad \text{sur } \omega^* .$$

Comme ω est faiblement déterminant, on en déduit que

$$t' = \hat{t} \quad \text{sur } \omega^* ,$$

et on peut trouver $h \in M$ tel que

$$t \leqslant t' \leqslant h \leqslant s .$$

Notons $\mathcal{U}_c$ le cône des fonctions sousharmoniques continues et ≤ 0 au voisinage de $\overline{\omega}$. Si $x_0 \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$, on a

(2) $$t(x_0) = t'(x_0) = (\hat{t}(x_0))_W , \qquad \text{pour toute } t \in -\mathcal{U}_c .$$

On vérifie que

(3) $$\bigcap_{t\in -W} \{t = (\hat{t})_W\} = \bigcap_{t\in W-W} \{t = (\hat{t})_W\} ,$$

et que l'application $\varphi \rightarrow (\hat{\varphi}(x))_{W|\omega^*}$ de $\mathcal{C}(\omega^*)$ dans $\underset{\sim}{R}$ est continue pour tout $x \in \omega^*$.

On en déduit, à l'aide de (3), appliqué aux restrictions à ω^* des fonctions de $\mathcal{U}_c$ et de W, que si $\mathcal{U}_c - \mathcal{U}_{c|\omega^*}$ est dense dans $\overline{W - W}_{|\omega^*}$, on a

(4) $$\bigcap_{t\in -W_{|\omega^*}} \{t = (\hat{t})_{W|\omega^*}\} = \bigcap_{t\in -\mathcal{U}_{c|\omega^*}} \{t = (\hat{t})_{W|\omega^*}\} .$$

Or il est évident d'après le principe du minimum que, pour toute $t \in -W$, on a, en posant $t' = t_{|\omega^*}$,

$$\{t = (\hat{t})_W\} \cap \omega^* = \{t' = (\hat{t'})_{W|\omega^*}\} ,$$

et donc, d'après (4), on peut écrire

$$\omega^* \cap \bigcap_{t\in -W} \{t = (\hat{t})_W\} = \omega^* \cap \bigcap_{t\in -\mathcal{U}_c} \{t = (\hat{t})_W\} .$$

D'après (2) et la propriété 8, 1°, on en déduit que $x_0 \in \omega^* \cap \partial W$, et finalement $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subset \omega^* \cap \partial W$; puis l'égalité, d'après la proposition 23.

Il suffit pour cela de montrer que $\mathcal{U}_c - \mathcal{U}_{c|\omega^*}$ est bien dense dans $\overline{W - W}_{|\omega^*}$. Comme il existe une fonction $h > 0$, harmonique au voisinage de $\overline{\omega}$, toute fonction $v \in \mathcal{S}$ s'obtient comme le sup d'un ordonné filtrant croissant de fonctions $v_i \in -\mathcal{U}_{c|\omega^*}$, et $\mathcal{S}$ sépare linéairement les points de ω^* qui sont linéairement séparés par W. On en déduit qu'il en est de même pour $\mathcal{U}_c$, et on obtient la densité grâce au théorème de Stone-Weierstrass.

Montrons que (W, M) est un simplexe géométrique.

On considère μ, ν minimales par rapport à W, portées par ω^* ; elles sont aussi minimales par rapport à $W_{|\omega^*}$, et vérifient

$$\mu(h) = \nu(h) , \qquad \text{pour toute } h \in M .$$

On a donc

$$\mu(t) = \mu((\hat{t})_{W|\omega^*}) \quad \text{et} \quad \nu(t) = \nu((\hat{t})_{W|\omega^*}) \ , \qquad \text{pour toute} \quad t \in - W_{|\omega^*} \ .$$

Pour toute $t \in - \mathcal{U}_{c|\omega^*}$, on a, d'après (1),

$$\mu((\hat{t})_{W|\omega^*}) = \inf_{t \leqslant h \in M} \mu(h) = \inf_{t \leqslant h \in M} \nu(h) = \nu((\hat{t})_{W|\omega^*}) \ ,$$

et donc

$$\mu(t) = \nu(t) \ , \qquad \text{pour toute} \quad t \in - \mathcal{U}_{c|\omega^*} \ ;$$

puis

$$\mu(t) = \nu(t) \ , \qquad \text{pour toute} \quad t \in - W_{|\omega^*} \ ,$$

par densité. Ceci montre que $(W_{|\omega^*} , M_{|\omega^*})$ est un simplexe géométrique, il en est de même pour (W , M) d'après le principe du minimum.

<u>Démonstration du théorème</u> 28. - La condition est <u>suffisante</u>, d'après le théorème 25.

La condition est <u>nécessaire</u>. Si $L = M$, désignons par $\mathfrak{M}$ le plus petit cône convexe stable par inf , et contenant M , on a $\partial\mathcal{L} = \partial\mathfrak{M}$. (W , M) étant un simplexe géométrique, $\partial W \ll \partial\mathfrak{M}$, et donc $\partial W \ll \partial\mathcal{L}$. Comme $\partial\mathbb{S} \ll \partial\mathcal{L}$, toute W-face minimale rencontre une $\mathbb{S}$-face minimale, et $\partial W \ll \partial\mathbb{S}$. Si $x_0 \in \mathcal{R}(\mathbb{S})$, $x_0 \in \omega^* \cap \partial W$, et $x_0 \in \mathcal{R}_s(\mathbb{S})$. On obtient ainsi l'inclusion $\mathcal{R}(\mathbb{S}) \subset \mathcal{R}_s(\mathbb{S})$. L'inclusion inverse se voit en remarquant que, pour toute $t \in - \mathcal{U}_c$, on a

$$K_t^{\overline{\omega}} \geqslant t' \geqslant t$$

(t' étant définie comme dans la relation (1) du lemme 29), et en utilisant la densité de $\mathcal{U}_c - \mathcal{U}_{c|\omega^*}$ dans $\mathbb{S} - \mathbb{S}_{|\omega^*}$.

3. Caractère local de l'approximation.

On supposera que la propriété $(H_2^!)$ est vérifiée :

$(H_2^!)$ Pour tout $x \in \Omega$, il existe un voisinage v_x de x , tel qu'il existe un potentiel localement borné p dans v_x , avec $p(x) > 0$.

Il est équivalent de dire que, pour tout $x \in \Omega$, il existe un voisinage compact K_x de x , tel que $\mathbb{S}(K_x)$ sépare linéairement K_x . L'axiomatique de Bauer est donc vérifiée localement (*), et en particulier $(H_2^!)$ entraîne (H_2).

(*) avec l'axiome de convergence affaibli (H_4).

PROPOSITION 30. - *Si* (H'_2) *est vérifiée, et si* $x_0 \in E^*$ *est tel que, pour tout voisinage* V *de* x_0, *il existe un compact* K, *voisinage de* x_0, $K \subset V$, *tel que* x_0 *soit* $\mathcal{S}(E \cap K)$-*stable pour* $E \cap K$, *alors* x_0 *est* $\mathcal{S}(E)$-*stable pour* E.

Démonstration. - Si x_0 était $\mathcal{S}(E)$-instable pour E, il existerait une fonction hyperharmonique v au voisinage de E, telle que

$$\liminf_{\complement E \ni x \to x_0} v(x) > v(x_0) \quad .$$

On peut alors se donner un voisinage K compact de x_0, tel que x_0 soit $\mathcal{S}(E \cap K)$-stable pour $E \cap K$, et que $\mathcal{S}(K)$ sépare linéairement les points de K d'après (H'_2). On se donne alors $\varphi \in \mathcal{C}((E \cap K)^*)$ telle que $v(x_0) < \varphi(x_0)$, $\varphi \leqslant \hat{v}$ où $\hat{v}$ désigne la fonction s. c. i. définie sur $(E \cap K)^*$ par

$$\hat{v}(y) = \liminf_{\complement(E \cap K) \ni x \to y} v(x) \quad .$$

On a alors $K_\varphi^{E \cap K} \leqslant v$ sur $E \cap K$, et donc

$$K_\varphi^{E \cap K}(x_0) < \varphi(x_0) \quad ,$$

et x_0 est $\mathcal{S}(E \cap K)$-instable d'après (H'_2), ce qui est impossible.

Remarque. - On a seulement besoin que, pour tout $x \in E^*$, il existe un voisinage v_x de x et un potentiel localement borné p dans v_x, $p(x) > 0$.

Grâce à l'inégalité $K_v^E(x_0) \leqslant K_v^{E \cap V}(x_0) \leqslant v(x_0)$, pour tout voisinage compact V de x_0, et toute fonction $v \in \mathcal{S}(E)$, on a la réciproque suivante.

PROPOSITION 31. - *Si* $x_0 \in E^*$ *est* $\mathcal{S}(E)$-*stable pour* E, x_0 *est* $\mathcal{S}(E)$-*stable pour* $E \cap V$, *où* V *est un voisinage compact de* x_0.

Soient $f \in \mathcal{C}(E)$, et F un fermé de E ; on désigne par $\mathcal{S}'(F)$ (resp. $\mathcal{L}'(F)$) le plus petit cône convexe stable par inf, contenant $f_{|F}$ et $\mathcal{S}(F)$ (resp. $f_{|F}$ et $\mathcal{L}(F)$), et qui est contenu dans $\mathcal{C}(F)$.

THÉORÈME 32. - *Si* (H'_2) *est vérifiée, et si* $f \in \mathcal{C}(E)$ *est telle que* $\mathcal{S}(E)$ *sépare linéairement les points de* $E^* \cap \partial\mathcal{L}'(E)$ *qui sont linéairement séparés par* $\mathcal{L}'(E)$, *alors* $f \in L(E)$ *si, et seulement si, pour tout* $x \in E$, *il existe un voisinage compact* V *de* x, *tel que*

$$f_{|V \cap E} \in \overline{L(V \cap E)} \quad .$$

On aura besoin du lemme suivant.

LEMME 33. - <u>Soient</u> X <u>compact, et</u> C <u>un cône convexe stable par</u> inf , $C \subset \mathcal{C}(X)$, <u>tel qu'il existe</u> $p, q \in C$, $p > 0$, $q < 0$, <u>et soit</u> F <u>un fermé</u> $\subset X$. <u>Si</u> A <u>est une</u> C-<u>face minimale, alors</u> $A \cap F$ <u>est une</u> $C_{|F}$-<u>face minimale</u>.

<u>Démonstration</u>. - $A \cap F$ est évidemment une $C_{|F}$-face. Celle-ci est minimale, d'après l'inégalité

$$u_{|F}(x) \leqslant \widehat{(u_{|F}(x))}_{C_{|F}} \leqslant \widehat{(u(x))}_C \quad ,$$

pour toute $u \in -C$ et $x \in F$. Ceci montre que $\partial C \cap F \subset \partial C_{|F}$. La propriété 8, 2°, permet aisément de conclure.

<u>Démonstration du théorème</u> 32. - On remarque d'abord que f est nécessairement harmonique dans l'intérieur $\mathring{E}$ de E si $\mathring{E} \neq \emptyset$, et que, dans ce cas, $f \in M(E)$. Il s'agit de montrer que l'on a $\partial\mathfrak{L}'(E) \ll \partial\mathfrak{L}(E)$, d'après le théorème 14. Soit donc A' une $\mathfrak{L}'(E)$-face minimale, on a $A' \cap E^* \neq \emptyset$ (lemme 24). Soient $y_0 \in A' \cap E^*$, et un voisinage compact V de y_0 tel que $f_{|V\cap E} \in \overline{L(V \cap E)}$. D'après (H_2'), il existe un voisinage compact V' de y_0, $V' \subset V$, tel que $\mathbb{S}(V')$ sépare linéairement V', et on aura encore $f_{|V'\cap E} \in \overline{L(V' \cap E)}$. On posera donc $V = V'$. D'après le lemme 33, $A' \cap V \cap E$ est une $\mathfrak{L}'(E)_{|V\cap E}$-face minimale et, d'après l'inclusion $\mathfrak{L}'(E)_{|V\cap E} \subset \mathfrak{L}'(V \cap E)_{|V\cap E}$, $A' \cap V \cap E$ est une $\mathfrak{L}'(V \cap E)_{|V\cap E}$-face minimale, notée A'_V. D'après l'hypothèse, on a $\overline{\mathfrak{L}'(V \cap E)}_{|V\cap E} = \overline{\mathfrak{L}(V \cap E)}_{|V\cap E}$, et par suite A'_V est aussi une $\mathfrak{L}(V \cap E)_{|V\cap E}$-face minimale qui contient une seule $\mathbb{S}(V \cap E)_{|V\cap E}$-face minimale, notée C_V (d'après la proposition 13 et le corollaire 20). D'autre part, on a $C_V \cap E^* \neq \emptyset$ (corollaire 21) ; tout point de $C_V \cap E^*$ est $\mathbb{S}(V \cap E)$-stable pour $E \cap V$; d'après la proposition 30, tous ces points sont aussi $\mathbb{S}(E)$-stables pour E. Il existe donc une $\mathbb{S}(E)$-face minimale, soit C, telle que $C \cap A \neq \emptyset$, et donc telle que $C \cap A' \neq \emptyset$. C est contenue dans une $\mathfrak{L}(E)$-face minimale, soit A, et $A \cap A' \neq \emptyset$. On conclut que $A' \subset A$, puis que $\partial\mathfrak{L}'(E) \subset \partial\mathfrak{L}(E)$.

On a l'inclusion forte. En effet, on vient de voir que si A' est une $\mathfrak{L}'(E)$-face minimale, il existe une $\mathbb{S}(E)$-face C telle que $A' \cap C \cap E^* \neq \emptyset$. Si A'_1 et A'_2 sont deux $\mathfrak{L}(E)$-faces minimales distinctes, il leur correspond des $\mathbb{S}(E)$-faces C_1 et C_2, $A'_i \cap C_i \cap E^* \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$. C_1 et C_2 sont donc distinctes, parce que $\mathbb{S}(E)$ sépare linéairement les points de $\partial\mathfrak{L}' \cap E^*$ qui sont linéairement séparés par $\mathfrak{L}'$ (lemme 12). $(L(E), \mathbb{S}(E))$ étant un simplexe géométrique, il existe deux $\mathfrak{L}(E)$-faces minimales et distinctes telles que $A_i \supset C_i$ $(i = 1, 2)$. On en déduit $A_i \cap A'_i \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$, puis $A_i \supset A'_i$ $(i = 1, 2)$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 34. - Si (H'_2) est vérifiée, si $f \in \mathcal{C}(E)$, et si $f_{|E^*} \in \overline{\mathbb{S}(E) - \mathbb{S}(E)}_{|E^*}$, alors $f \in L(E)$ si, et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage compact V de x, tel que

$$f_{|V \cap E} \in \overline{L(V \cap E)} \quad .$$

COROLLAIRE 35. - Si $\mathbb{S}(E)$ sépare linéairement E^*, et si $f \in \mathcal{C}(E)$, alors $f \in L(E)$ si, et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage compact V de x, tel que

$$f_{|V \cap E} \in \overline{L(V \cap E)} \quad .$$

Si $\mathbb{S}(E)$ sépare linéairement E^*, on peut en effet voir, comme dans le cas classique, que la stabilité est de caractère local, ce qui est mieux que la proposition 30.

Le théorème 32 a été montré, dans le cas classique, par Robert Loyd LUDWIG [7] en utilisant Hahn-Banach. Il s'étend sans difficulté au cas non compact dans le même cadre que [6], en supposant E^* métrisable et Ω dénombrable à l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (H.). - Harmonische Raüme und ihre Potentialtheorie. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 22).

[2] BOBOC (N.), CONSTANTINESCU (C.) and CORNEA (A.). - Axiomatic theory of harmonic functions. Non negative superharmonic functions, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 15, 1965, p. 283-312.

[3] BOBOC (N.) and CORNEA (A.). - Convex cones of lower semicontinuous functions, Revue roum. Math. pures et appl., t. 13, 1967, p. 471-525.

[4] BRELOT (M.). - Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes, Bull. Soc. math. France, t. 73, 1945, p. 55-70.

[5] DENY (J.). - Systèmes totaux de fonctions harmoniques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 1, 1949, p. 103-113.

[6] de LA PRADELLE (A.). - A propos du mémoire de G. F. Vincent-Smith sur l'approximation des fonctions harmoniques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 19, 1969, fasc. 2, p. 355-370.

[7] LUDWIG (Robert Loyd). - Approximation of harmonic functions, Dissertation, University of California, Los Angeles, 1969.

[8] VINCENT-SMITH (G. F.). - Uniform approximation of harmonic functions, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 19, 1969, fasc. 2, p. 339-353.

(Texte reçu le 9 février 1970)

Arnaud de LA PRADELLE
25-27 boulevard Arago
75 - PARIS 13