Marcel Brelot

Allure des potentiels a la frontière et fonctions fortement sousharmoniques

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 14 (1970-1971), exp. n° 11, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1970-1971__14__A4_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
14e-15e années, 1970-1972, n° 11, 15 p.

10 juin 1971

ALLURE DES POTENTIELS À LA FRONTIÈRE ET FONCTIONS FORTEMENT SOUSHARMONIQUES

par Marcel BRELOT

1. - Je vais traiter ici deux questions qui mettent en évidence le rôle essentiel de l'effilement minimal. Il s'agira d'extensions en axiomatique de propriétés assez importantes en théorie classique, l'une sur l'allure de u/G à la frontière (u surharmonique > 0 , G fonction de Green de pôle fixé), l'autre sur les fonctions fortement sousharmoniques. Je n'aurai pas le temps ici de développer des applications, mais seulement de montrer l'intérêt théorique du sujet.

La première question reprend un théorème de L. NAÏM [12] qui permet d'ailleurs de retrouver des propriétés sur l'allure des fonctions surharmoniques classiques au voisinage d'un point frontière irrégulier.

On considère un espace de Green Ω (par exemple un domaine borné de $\underset{\sim}{R}^n$) et l'espace de Martin correspondant $\hat{\Omega}$ qui comporte la frontière de Martin Δ dont la partie minimale Δ_1 . Si $G(x , y)$ est la fonction de Green, la topologie de Martin qui prolonge celle de Ω est caractérisée comme permettant un prolongement continu sur $\hat{\Omega}$ des fonctions

$$x \longrightarrow \frac{G(x , y)}{G(x , y_0)} = K(x , y) \qquad (y_0 \text{ fixé } \in \Omega)$$

avec séparation de Δ (ce qui est indépendant de y_0). La topologie fine minimale T_F sur $\Omega \cup \Delta_1$, prolongeant la topologie fine classique sur Ω , est caractérisée par la propriété que les voisinages de tout $X \in \Delta_1$ coupent Ω selon les complémentaires des ensembles e de Ω effilés en X au sens minimal, c'est-à-dire caractérisés par la condition $R^e_{K_X} \neq K_X$, où K_X est une notation abrégée pour le prolongement $K(X , y)$ de $K(x , y)$ en $X \in \Delta$, et R désignant la réduite classique de la fonction (d'ailleurs harmonique K_X) relative à e .

Le théorème de L. Naïm en question dit que si v est surharmonique > 0 dans Ω , $v(x)/G(x , y_0)$ admet, en $X \in \Delta_1$, une limite fine (minimale), notée $\lim_{T_F}$, qui est égale à sa lim inf en X au sens de la topologie T_M de Martin. On rappelle qu'une limite fine d'une fonction en X vaut une limite_{T_M} , c'est-à-dire au sens de T_M en dehors d'un ensemble effilé convenable en X .

La démonstration fait intervenir la symétrie de la fonction de Green. L'adaptation axiomatique de la démonstration va introduire de façon naturelle un faisceau de fonctions harmoniques adjointes et les notions correspondantes de frontière de Martin et topologie fine. Cela va faire beaucoup d'hypothèses, mais elles sont satisfaites pour les équations aux dérivées partielles du 2e ordre de type elliptique dans $\underset{\sim}{R}^n$, avec des coefficients seulement lipschitziens.

$\underset{\sim}{2}$. - Introduisons progressivement les hypothèses nécessaires, et renvoyons à [2], [4], [8] pour les détails. Partons de l'axiomatique Brelot avec base dénombrable de l'espace fondamental Ω , les axiomes 1, 2, 3 et l'existence d'un potentiel > 0 (Ensemble d'hypothèses (A_1)). En prenant une base B du cône H^+ des fonctions harmoniques $\geqslant 0$ (et la topologie de la convergence uniforme locale sur l'espace des différences de telles fonctions), B est compacte métrisable, et u , harmonique $\geqslant 0$, se représente selon

(1) $$u(x) = \int X(x)\, d\mu_u(X)$$

où X décrit B , μ_u est une mesure $\geqslant 0$ unique ne chargeant que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de B .

Un ensemble $e \subset \Omega$ est effilé relativement à $X \in \mathcal{E}$ si $R_X^e \not\equiv X$. Il existe sur $\Omega \cup \mathcal{E}$ une topologie la moins fine introduisant sur Ω la topologie fine de Ω (la moins fine rendant continues les fonctions surharmoniques parmi les plus fines que celle de Ω), et dont les voisinages de tout $X \in \mathcal{E}$ coupent Ω selon les complémentaires des effilés relatifs à X ; on l'appelle <u>topologie fine minimale</u> T_F sur $\Omega \cup \mathcal{E}$.

Si B est définie par la condition pour les fonctions harmoniques > 0 de valoir 1 en $y_0 \in \Omega$, les K_X du cas classique $(X \in \Delta_1)$ sont les fonctions X de $\mathcal{E}$, Δ_1 de $\hat{\Omega}$ est homéomorphe à $\mathcal{E}$ de B , et $\Omega \cup \Delta_1$ avec la topologie fine minimale du cas classique est homéomorphe à $\Omega \cup \mathcal{E}$ avec la topologie fine minimale du cas axiomatique selon la correspondance évidente (de sorte qu'on écrira encore Δ_1 au lieu de $\mathcal{E}$ en axiomatique). Si S^+ est le cône des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$, il engendre un espace vectoriel sur lequel on sait, d'après Rose-Marie HERVÉ, mettre une topologie telle qu'il existe une base B^s de S^+ compacte métrisable ; elle contient une base B de H^+ , et en induit la topologie.

Ajoutons l'hypothèse de <u>proportionalité des potentiels de même support ponctuel</u> (ce qui donne l'ensemble d'hypothèses noté A_1^p). La topologie fine minimale est alors la seule déterminée par les propriétés de prolongement précisées plus haut. Les points extrémaux de B^s sont les potentiels à support ponctuel (d'ensemble Ω' homéomorphe à Ω selon la correspondance donnée par le support) et les points extrémaux de la base B incluse, d'ensemble $\mathcal{E}$. L'adhérence de Ω' dans B^s est, à un homéomorphisme près, un espace compact contenant Ω (dense) et une frontière contenant Δ_1 ou $\mathcal{E}$, ce qui se réduit, dans le cas classique, avec B^s convenable, aux notions rappelées, de sorte qu'on note encore $\hat{\Omega}$ cet **espace dit de Martin**, et Δ la frontière de Martin de Ω .

Si $p_y(x)$ est le potentiel de support ponctuel y et par exemple dans un B^s , tout potentiel v se représente selon

$$(2) \qquad v(x) = \int p_y(x)\, d\mu(y) \ ,$$

où μ est une mesure $\geqslant 0$ unique sur Ω .

Soulignons que les changements de B ou B^s ne causent que des homéomorphismes et conséquences banales.

On aura besoin de notions sur le balayage. Indiquons seulement que, pour tout $e \subset \Omega$ et tout ε_x (masse unité en x), il existe sur Ω une mesure (balayée) ε_x^e telle que

$$(3) \qquad \hat{R}_v^e(x) = \int v\, d\varepsilon_x^e \ , \quad \forall\ v \ \text{ surharmonique } \geqslant 0 \ .$$

Ajoutons encore l'hypothèse d'une base de <u>domaines complètement déterminants</u> c'est-à-dire tels que, pour tout potentiel p harmonique dans un tel domaine, $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$, $R_p^{\complement\omega} = p$ (Dans le cas classique, tous les domaines réguliers sont de ce type). <u>L'ensemble d'hypothèses sera alors noté</u> (A_2) .

On remarquera d'abord qu'avec un seul tel domaine δ contenant y_0 fixé et la mesure harmonique $d\rho_{y_0}^{\delta}$, $\int v\, d\rho_{y_0}^{\delta}$ est finie continue de $v \in S^+$, de sorte que l'égalité à 1 fournit une base compacte (métrisable) de S^+ . C'est une base B^s contenant une B qui, dans le cas classique, est justement homéomorphe à $\hat{\Omega}$ rappelé au début.

On va, grâce à la dernière hypothèse, introduire un <u>faisceau adjoint</u> [10]. On choisit, pour chaque y , un potentiel de support y , s. c. i. en (x , y) , et continu **pour** $x \neq y$ (c'est le cas s'il est situé dans une base B^s <u>fixée</u>). Alors, pour tout ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$ et $y \in \omega$, $\hat{R}_{p_y}^{\complement\omega}(x)$ (réduite régularisée) est un potentiel qui s'exprime selon

$$\int p_z(x)\, d\sigma_y^{\omega}(z) \ ,$$

où $d\sigma_y^{\omega}$ est une mesure $\geqslant 0$ unique (correspondant au choix de ω et x), nécessairement portée par $\partial\omega$ puisque la fonction est harmonique dans ω et $\complement\overline{\omega}$. On va prendre cette mesure comme mesure harmonique pour définir un nouveau **faisceau**. Il existe un faisceau unique de fonctions finies continues satisfaisant aux trois axiomes, en prenant pour ouverts réguliers les ouverts complètement déterminants. Les nouvelles notions seront dites adjointes, et notées par un astérisque. On posera $p^*_y(x) = p_x(y)$ [1]. Cette fonction de x est un potentiel adjoint de support $\{y\}$.

On utilisera la formule de Rose-Marie HERVÉ, qui remplacera la symétrie de la fonction de Green classique :

$$\hat{R}^E_{p_y}(x) = \hat{R}^{*E}_{p^*_x}(y) . \tag{4}$$

Il va nous falloir un espace de Martin adjoint correspondant au faisceau adjoint. Cela nécessite l'hypothèse de proportionalité des potentiels adjoints de support ponctuel. <u>L'ensemble de toutes les hypothèses sera noté</u> (A'_2) .

Alors on définira une base compacte (métrisable) de S^{*+} par la condition

$$\int v^* \, d\rho^{*\omega}_{y_0} = 1 ,$$

où v^* est surharmonique adjointe $\geqslant 0$, ω un domaine complètement déterminant adjoint (c'est-à-dire d'après [10] régulier). Car l'intégrale est alors continue de v^* avec la topologie de Rose-Marie HERVÉ sur l'espace engendré par S^{*+} .

On définit alors, comme plus haut, l'espace de Martin adjoint $\hat{\Omega}^*$, la frontière Δ^* et sa partie minimale Δ^*_1 , la topologie T^*_M de Martin adjointe et la topologie fine minimale adjointe T^*_F .

3. - THÉORÈME 1 [2]. - <u>On fait les hypothèses</u> (A'_2) (base dénombrable, axiomes 1, 2, 3, potentiel > 0 , base de domaines complètement déterminants, proportionalité des potentiels et aussi des potentiels adjoints à support ponctuel) <u>et on utilise</u> $\hat{\Omega}^*$, Δ^* , T^*_M , T^*_F <u>définis précédemment</u>.

<u>Alors, pour toute fonction surharmonique</u> $v \geqslant 0$ <u>sur</u> Ω , v/p_{y_0} <u>a en tout</u> $X \in \Delta^*_1$ <u>une limite fine adjointe égale à sa lim inf en</u> X <u>selon la topologie de Martin adjointe, c'est-à-dire</u>

$$\frac{v(x)}{p_{y_0}(x)} \underset{T^*_F}{\longrightarrow} \liminf_{T^*_M} \frac{v}{p_{y_0}} \quad (x \longrightarrow X) . \tag{5}$$

---

[1] Cette définition est inspirée par la propriété des fonctions de Green de deux équations elliptiques adjointes à coefficients lipschitziens (passage de l'une à l'autre par permutation de x et y). Car un choix convenable de B^s pour le faisceau des solutions de la 1re équation donne comme $p_x(y)$ la fonction de Green classique de cette équation et le faisceau adjoint (de la théorie axiomatique) est celui des solutions de l'équation classique adjointe ; la fonction de Green classique adjointe est alors le p^*_y précédent.

[2] Résultat déjà indiqué dans des conférences antérieures, en particulier dans [5], où l'on mentionne bien d'autres résultats et applications. Dans cette rédaction, on ajoute à la conférence le corollaire 2 et le paragraphe 4.

Si Λ est cette lim inf (a priori majorée par la $\liminf_{T_M^*}$) qu'on supposera finie, il suffit de voir que l'ensemble

$$E = \{x \mid \frac{v(x)}{p_{y_0}(x)} > \Lambda + \eta\} \quad (\eta > 0)$$

est effilé minimal adjoint en X . Or

$$v(x) \geqslant (\Lambda + \eta)\ \hat{R}^E_{p_{y_0}}(x) = (\Lambda + \eta)\ \hat{R}^{*E}_{p_x^*}(y_0) = (\Lambda + \eta) \int p_x^*(y)\ d\varepsilon'(y) ,$$

où ε' désigne brièvement $\varepsilon^{*E}_{y_0}$, d'où

$$\frac{v(x)}{(\Lambda + \eta)\ p_{y_0}(x)} \geqslant \int \frac{p_x^*(y)}{p_x^*(y_0)}\ d\varepsilon'(y) .$$

Mais $p_x^*(y)/p_x^*(y_0)$ vaut pour $x \in \complement\omega$, le potentiel adjoint $P_x^*(y)$, de support $\{x\}$, situé dans la base choisie de S^{*+} , et $P_x^*(y)$ tend vers l'élément extrémal $X(y)$ (au sens de la topologie de Rose-Marie HERVÉ sur la base) quand $x \longrightarrow X$ selon T_M^* (simple tautologie). Cela implique la convergence, pour y fixé, de la fonction de x vers $X(y)$.

Prenons $x_n \xrightarrow[T_M^*]{} X$ de façon que

$$I_n = \int P_x^*(y)\ d\varepsilon' \quad \text{tende vers} \quad \liminf_{x \to X} \int P_x^*\ d\varepsilon' .$$

La $\liminf_{n\to\infty} I_n$ doit d'autre part majorer $\int X(y)\ d\varepsilon'(y)$ (passage à la limite sous $\int$) (3). Donc

$$\liminf_{x \to X\ T_M^*} \int P_x^*\ d\varepsilon' \geqslant \int X(y)\ d\varepsilon' = \hat{R}^{*E}_X(y_0) .$$

Le premier membre minore

$$\frac{1}{\Lambda + \eta} \liminf_{x \to X\ T_M^*} \frac{v}{p_{y_0}} = \frac{\Lambda}{\Lambda + \eta} .$$

Donc $\hat{R}^{*E}_X(y_0) < 1 = X(y_0)$, et E est effilé adjoint.

COROLLAIRE 2. - On peut, dans (5), remplacer p_{y_0} par p_{y_1} (y_1 quelconque $\in \Omega$).

L'énoncé resta valable. Car $p_y(x)/p_{y_0}(x)$, pour $x \longrightarrow X$, a la limite $X(y)$ (finie > 0) selon T_M^* et, d'après le théorème, une limite selon T_F^* qui doit être la même.

<u>Remarque</u>. - Si v est un potentiel à support compact, on savait déjà que v/p_{y_0} a une limite en topologie de Martin adjointe (SMYRNELIS [14]).

4. - Le théorème 1 est a rapprocher de l'énoncé suivant que j'ai établi ([3], théorème 3) : Avec les hypothèses (A_2) , en prenant la base de S^+ définie par

---

(3) Il y a même en fait égalité, et même si l'on remplace la suite x_n par le filtre des voisinages T_M^* de X (voir [3], théorème 2).

une condition $\int v \, d\rho_{y_0}^{\omega_0} = 1$, où ω_0 est complètement déterminant contenant y_0 , $d\rho_{y_0}^{\omega_0}$ la mesure harmonique correspondante, on définit le faisceau adjoint en prenant $p_x(y)$ dans cette base et aussi l'espace de Martin $\hat{\Omega}$, et la topologie fine minimale dérivant de la base de S^+ . Alors toute fonction surharmonique adjointe $\geqslant 0$ admet en $X \in \Delta_1$, une limite fine minimale égale à la lim inf en X selon la topologie de Martin précédente.

La démonstration est voisine de celle du théorème précédent (4). Il est important de voir que notre théorème 1 peut se déduire de ce théorème antérieur (théorème 3 de [3]).

On suppose donc , outre (A_2) , la proportionalité des potentiels adjoints (ce qui donne (A_2')). Alors le choix du potentiel adjoint p_x^* fournit selon Rose-Marie HERVÉ ([9], p. 559), un faisceau** identique au faisceau primitif. Donc si on prend comme potentiel adjoint $p_x^*/(\int p_x^* \, d\rho_{y_0}^{*\omega})$, où ω est complètement déterminant adjoint (c'est-à-dire régulier), on trouvera un faisceau** de fonctions

$$\frac{u(x)}{\int p_x^*(y) \, d\rho_{y_0}^{*\omega}(y)}$$

(u harmonique), où le dénominateur vaut $p_x^*(y_0)$ si $x \in C\overline{\omega}$, c'est-à-dire $p_{y_0}(x)$ (voir dans [10] l'effet du changement de potentiel-clef à support ponctuel dans la détermination du faisceau adjoint). Les fonctions surharmoniques correspondantes dans Ω sont de la forme $u(x)/p_{y_0}(x)$ hors $C\overline{\omega}$.

On obtient alors que u/p_{y_0} a une limite$_{T_F^*}$ égale à la lim inf$_{T_F^*}$ en $X \in \Delta_1^*$. C'est le théorème qui précède.

Il y a des applications importantes, sommairement indiquées dans [5], au cas d'un point X de Δ_1^* , où p_{y_0} ne tend pas vers 0 selon T_M^* ou T_F^* , comme généralisation d'étude des fonctions surharmoniques classiques ou axiomatiques au voisinage d'un point-frontière irrégulier.

Remarquons seulement ici qu'il est curieux de trouver des propriétés de limite pour des fonctions, ou quotients de fonctions, dérivant d'un faisceau, en utilisant des frontières et topologies associées à un faisceau adjoint. Il serait instructif d'examiner les interprétations probabilistes.

5. - La seconde question que je vais développer est l'extension en axiomatique d'une théorie des fonctions fortement sousharmoniques donnée dans le cas classique

---

(4) Dans la démonstration qui précède, on évite par la simple propriété de passage à la limite sous $\int$ un résultat plus précis ([3], théorème 2) utilisé inutilement aussi dans la démonstration rappelée ([3], théorème 3).

et dans une boule par SOLOMENTSEV [15], et retrouvée par GÅRDING et HÖRMANDER [7].

F. et M. RIESZ avaient remarqué [13] que si $f(z)$ est holomorphe dans le cercle unité et de module majoré en moyenne sur les circonférences concentriques, c'est-à-dire majorée par une fonction harmonique dans le cercle, la représentation intégrale de Poisson-Stieltjes met en évidence une mesure (associée) absolument continue par rapport à la mesure unitaire $d\theta$ invariante par rotation sur la circonférence-unité. GÅRDING et HÖRMANDER retrouvent ce résultat, source d'applications, en remarquant que $u = \log|f(z)|$ est sousharmonique, donc $|f(z)|$ (sousharmonique) de la forme e^u et majorée par une fonction harmonique $\geqslant 0$; en appliquant la théorie suivante, qui en est inspirée, ils trouvent que la mesure associée à la plus petite majorante harmonique de $|f(z)|$ est absolument continue et en déduisant la même chose pour f .

Dans la boule, une fonction fortement sousharmonique est définie comme $\varphi(u)$, où u est sousharmonique et $\varphi \geqslant 0$, une fonction convexe croissante avec

$$\frac{\varphi(t)}{t} \xrightarrow[(t\to+\infty)]{} +\infty \qquad (-\infty \leqslant t < +\infty) ,$$

φ continue au point $-\infty$. On suppose que $\varphi(u)$ admet une majoration en moyenne, c'est-à-dire par une fonction harmonique $\geqslant 0$. Un cas particulier est justement $|f(z)|$. On appelle mesure-frontière d'une fonction sousharmonique admettant une majoration harmonique $\geqslant 0$, la mesure de la représentation intégrale de la plus petite majorante harmonique dans la boule. Les auteurs supposent aussi que $\varphi(u)$ qui est sousharmonique admet une majorante harmonique. Alors ils montrent :

(a) $\varphi(u)$ admet une mesure-frontière absolument continue par rapport à $d\theta$ (mesure unitaire sur la frontière invariante par rotation), de densité p.-p.-$d\theta$, $\varphi(\lambda_\theta)$, où λ_θ est p.-p.-$d\theta$ la limite radiale au point-frontière θ .

(b) u admet une mesure-frontière $\lambda_\theta\, d\theta + d\mu^s$, où $d\mu^s$ est singulière par rapport à $d\theta$, et $\leqslant 0$.

Ils donnent d'autres propriétés qui s'adaptent mal à une extension en axiomatique, sauf la remarque suivante intéressante en soi.

(c) Soit h harmonique et différence de deux fonctions harmoniques $\geqslant 0$ (ce qui équivaut à l'existence d'une majorante harmonique $\geqslant 0$). Si $d\mu$ est la mesure-frontière de h , $|d\mu|$ est la mesure-frontière de $|h|$.

On voit aussitôt que cela équivaut à ce que $d\mu^+$ soit la mesure-frontière de $h^+ = 1/2(h + |h|)$. Cela vient de l'additivité de la mesure-frontière pour deux fonctions sousharmoniques dont l'une est harmonique.

La notion nouvelle et la propriété (b), qui entraîne facilement (a), étaient déjà en fait dans un mémoire fort développé, en russe, resté longtemps peu connu, de SOLOMENTSEV [15].

Il était naturel de chercher des extensions à des cas plus généraux. Ainsi M. HEINS [9] passe du cercle à une surface de Riemann, mais sans parler de frontière, grâce aux notions (de PARREAU) de fonction harmonique > 0 quasi-bornée (limite d'une suite croissante de fonctions harmoniques bornées) ou singulière (sans minorante harmonique bornée > 0) ; ces fonctions correspondent dans le cercle à des mesures-frontière à densité ou songulière, et les énoncés parlent de décomposition de fonction mais non de mesure ; les démonstrations sont très simples, et peuvent d'ailleurs visiblement s'appliquer à de larges axiomatiques. Puis S. YAMASHITA [17] étendit (a) et(b) aux surfaces de Riemann avec frontière de Martin, mesures représentatives et limites fines remplaçant les limites radiales, tandis que G. WANBY [16] considérait les sous-solutions de l'équation de Laplace-Beltrami sur une variété de Riemann et un domaine de frontière assez régulière. Mais il était plus général de se placer dans un cadre axiomatique moderne. Ainsi dans l'axiomatique de Brelot avec les hypothèses (A_1) et les constantes harmoniques, Linda LUMER-NAЇM avait déjà, un peu avant, au cours d'un mémoire [11], étendu (a) en remplaçant λ_θ par la limite fine à la frontière "minimale", $d\theta$ par la mesure associée à la constante 1 dans la représentation intégrale. La plus petite majorante harmonique de $\varphi(u)$ est alors la solution d'un problème de Dirichlet, traité par GOWRISANKARAN [8], avec donnée-frontière remplaçant λ_θ, et usage essentiel de la topologie fine minimale.

Nous allons reprendre la question dans le même esprit, mais en étendant aussi (b) et (c).

Nous nous plaçons d'abord dans les hypothèses (A_1) seulement (5). On dispose de la représentation intégrale. On en déduit, pour une différence u, de fonctions harmoniques $\geqslant 0$, une représentation de même type avec mesure unique μ_u dite associée ou mesure-frontière de u. On emploiera le même terme relativement à une fonction sousharmonique majorée par une fonction harmonique $\geqslant 0$, la mesure μ_u étant celle associée à la plus petite majorante harmonique notée u_*. On étend d'abord (c) selon la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - <u>Avec</u> (A_1), <u>si</u> h <u>est différence de deux fonctions harmoniques</u> $\geqslant 0$, μ_u^+ <u>est la mesure-frontière de</u> $(h^+)_*$, <u>c'est-à-dire</u> $\mu_h^+ = \mu_{h^+}$.

(5) On pourrait, dans ce qui suit (proposition et corollaire), remplacer l'hypothèse d'un potentiel > 0 par celle, moins forte, de l'existence d'une fonction harmonique > 0, mais le cas où elles diffèrent est trivial (proportionalité des fonctions harmoniques > 0) et les résultats sont évidents.

D'abord $h^+ - h^- = (h^+)_* - (h^-)_*$, car h^+ et $(h^+)_*$ diffèrent d'un potentiel, de sorte que les deux membres diffèrent d'une fonction qui est la différence de deux potentiels finis. Mais une fonction de ce type, lorsqu'elle est harmonique, doit être nulle [6]. Puis

$$\mathfrak{J}_{\mu^+} \geq \mathfrak{J}_{\mu} = h ,$$

donc $\mathfrak{J}_{\mu^+} \geq h^+$, et $\mathfrak{J}_{\mu^+}$ harmonique majore $(h^+)_*$. Ainsi

$$\mathfrak{J}_{\mu^+} = (h^+)_* + \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ harm.} \geq 0) .$$

De même

$$\mathfrak{J}_{\mu^-} = (h^-)_* + \varepsilon' \qquad (\varepsilon' \text{ harm.} \geq 0) .$$

Par différence, il vient

$$\mathfrak{J}_{\mu^+} - \mathfrak{J}_{\mu^-} = (h^+)_* - (h^-)_* + \varepsilon - \varepsilon' .$$

Mais c'est aussi $\mathfrak{J}_{\mu} = h = h^+ - h^-$, d'où $\varepsilon = \varepsilon'$.

Alors,

$$\mu^+ = \mu_{h^+} + \mu_\varepsilon$$

à cause de l'unicité de la mesure associée.

De même,

$$\mu^- = \mu_{h^-} + \mu_\varepsilon .$$

D'où

$$\mu = \mu_{h^+} - \mu_h .$$

Ainsi, μ_h majore μ et 0 , donc μ^+ , et comme elle minore μ^+ , il y a égalité, et $\varepsilon = 0$.

COROLLAIRE 4. - Si u est sousharmonique avec majorante harmonique ≥ 0 , $\mu_u^+ = \mu_{u^+}$. En effet, $(u^+)_* \geq (u_*)^+$, et $(u^+)_*$ majorante harmonique ≥ 0 de u majore u_* , donc $(u_*)^+$. Donc

$$(u^+)_* = (u_*)^+ = ((u_*)^+)_* .$$

Alors, μ_{u^+} ou $\mu_{u_*^+}$ vaut, d'après la proposition, $\mu_{(\mu_*)^+}$, c'est-à-dire $\mu_{((\mu_*)^+)_*} = \mu_{(u^+)_*} = \mu_{u^+}$.

---

(6) Soient les potentiels p , q et $p - q$ harmonique. Alors $p - q \leq p$, d'où $p - q \leq 0$; de même, $q - p \leq q$, d'où $q - p \leq 0$, donc $p - q = 0$.

7\. - Nous allons maintenant étendre (a) et (b) en utilisant les notions et résultats suivants sous les hypothèses (A_1) avec les constantes harmoniques.

(A) Une fonction borélienne f dans Ω est uniformément intégrable relativement aux mesures qui seront ici les mesures harmoniques $d\rho_{x_0}^{\omega_i}$ (famille fixée quelconque d'ouverts ω_i relativement compacts, de réunion Ω, contenant x_0 fixé), et on dira aussi "relativement aux ω_i ", si $\sup \int_{|f|>\alpha} |f| \, d\rho_{x_0}^{\omega_i}$ est fini.

Cela équivaut à la double condition :

$$(\alpha) \begin{cases} \sup \int |f| \, d\rho_{x_0}^{\omega_i} < +\infty , \\ \text{et} \\ \int_{e\subset\partial\omega_i} |f| \, d\rho_{x_0}^{\omega_i} < \varepsilon \text{ arbitrairement choisi, dès que } \int_e d\rho_{x_0}^{\omega_i} < \eta \text{ convenable,} \end{cases}$$

indépendant de i .

Si $\varphi(t)$ est convexe, croissante $\geqslant 0$, avec $\varphi(t)/t \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ $(0 \leqslant t < +\infty)$ cela équivaut aussi à

$$(\beta) \quad \sup \int \varphi(|f|) \, d\rho_{x_0}^{\omega_i} < +\infty .$$

Il y a évidemment conservation de la propriété par addition finie ou passage à g de module moindre.

(Sur la notion générale introduite en théorie du potentiel par DOOB, voir [1], [2].)

Remarques. - Si f est sousharmonique $\geqslant 0$, $\varphi(f)$ l'est aussi (extension facile du cas classique, voir [10]), et l'intégrabilité uniforme de f entraîne la majoration par une fonction harmonique $\geqslant 0$.

L'intégrabilité uniforme pour les $d\rho_{x_0}^{\omega_i}$ implique la même propriété par toute sous-famille ω_i' des ω_i , de réunion Ω ; et, ce qui est important et non évident, lorsque f est harmonique, il y a équivalence pour une sous-famille ω_i' quelconque croissante emboîtée $(\bigcup \omega_i' = \Omega)$. Car l'hypothèse avec cette famille ω_i' et la propriété (β), où $\varphi(|f|)$ est sousharmonique comme f , entraîne la majoration (β) avec les ω_i , c'est-à-dire l'intégrabilité uniforme relative aux $d\rho_{x_0}^{\omega_i}$.

(B) Tout potentiel v satisfait à l'intégrabilité uniforme relative à toute suite croissante ω_n de réunion Ω (7).

Car $\int v \, d\rho_{x_0}^{\omega_n}$ fini décroît, tend vers 0 $(n\ \infty)$, d'où la 1re condition (α).

Puis, soit n_0 tel que $\int v \, d\rho_{x_0}^{\omega_n} < \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Pour chaque $n < n_0$,

(7) Cet énoncé remplace le corollaire 2,1, p. 435 de LUMER-NAÏM [11]), un peu inexact.

$\int v \, d\rho_{n_0}^{\omega_n} < \varepsilon$ dès que $\int_e d\rho_{x_0}^{\omega_n} < \eta_n$ convenable. Donc si $\int_e d\rho_{x_0}^{\omega_p} \leqslant \inf_{n<n_0} \eta_n$, on aura

$$\int v \, d\rho_{x_0}^{\omega_p} < \varepsilon \,, \qquad \forall \, p \,.$$

(C) En théorie classique d'un espace de Green avec frontière de Martin Δ, on sait traiter un problème de Dirichlet correspondant à une donnée-frontière f sur Δ de **partie** minimale Δ_1. On sait qu'en cas de "résolutivité" la solution admet p.-p.-$d\mu_1$ sur Δ_1 une limite fine minimale (DOOB [6]).

Introduisons, en axiomatique précédente, la notion plus générale de frontière fine minimale Δ_1, formée des éléments extrémaux de B, et la topologie fine minimale sur $\Omega \cup \Delta_1$. Considérons, avec GOWRISANKARAN [8], les fonctions v hyperharmoniques, bornées chacune inférieurement, de lim inf fine en $X \in \Delta_1$, majorant $f(X)$ donnée, seulement p.-p.-$d\mu_1$. On note

$$\overline{\mathcal{H}}_f = \inf_v v \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{H}}_f = - \overline{\mathcal{H}}_{-f} \,.$$

Il y a égalité de ces enveloppes avec une fonction harmonique notée $\mathcal{H}_f$ (cas de résolutivité qui, dans le cas classique, équivaut à celui ci-dessus) si, et seulement si, f est intégrable-$d\mu_1$, et $\mathcal{H}_f(x) = \int X(x) \, f(X) \, d\mu_1(X)$ (<u>solution du problème de type</u> D_G) ; de plus $\mathcal{H}_f(x)$ admet la limite fine (minimale) $f(x)$ p.-p.-$d\mu_1$ sur Δ_1, tandis que tout potentiel a la limite 0 p.-p.-$d\mu_1$ [8].

(D) Un autre théorème de DOOB, dans le cas classique (espace de Green, frontière de Martin et problème de Dirichlet correspondant), exprime qu'une fonction harmonique satisfaisant à la condition d'intégrabilité uniforme pour la famille des ω_i relativement compacts est une solution de problème de Dirichlet-Martin (et réciproquement). Linda LUMER a remarqué que ce résultat et la démonstration s'adaptent en axiomatique avec les hypothèses (A_1), les constantes harmoniques et le problème de type D_G. La condition d'intégrabilité uniforme de u harmonique entraîne donc (et il y a même équivalence) que μ_u soit absolument continue par rapport à μ_1, la densité étant donc la limite fine de u (p.-p.-$d\mu_1$).

8. - Nous sommes maintenant en mesure d'étendre (a) et (b). On peut isoler une partie sous forme de lemme.

LEMME 5. - En axiomatique, sous les mêmes hypothèses (A_1), avec constantes harmoniques : soit u sousharmonique $\geqslant 0$ dans Ω. L'intégrabilité uniforme (relative aux ω_i relativement compacts) équivaut à l'existence d'une plus petite majorante harmonique u_* solution d'un problème du type D_G, c'est-à-dire dont le $d\mu_{u_*}$ est absolument continue par rapport à $d\mu_1$.

S'il y a intégrabilité uniforme, il y a 1 majorante harmonique, donc une plus petite u_* ; $u_* - u$ est un potentiel ; il y a intégrabilité uniforme relative à une suite croissante $\omega_n (\bigcup \omega_n = \Omega)$; il en est de même pour $u_* = u_* - u + u$. Ainsi, il y a intégrabilité uniforme de u_* pour tous les ω_i, et u_* est donc solution d'un problème de type D_G.

S'il y a une plus petite majorante harmonique u_*, solution d'un problème de type D_G, il y a intégrabilité uniforme de u_*, donc de u.

THÉORÈME 6. – On part des hypothèses (A_1), avec constantes harmoniques. On donne une fonction $\varphi(t)$, croissante convexe, continue dans $]-\infty, +\infty[$ telle que $\varphi(t)/t \xrightarrow[(t\to+\infty)]{} +\infty$.

Soit u sousharmonique dans l'espace Ω. On suppose que $\varphi(u)$, qui est sousharmonique et est dite fortement sousharmonique, admet une majorante harmonique ≥ 0. Alors, résultat nouveau étendant (b), u admet une majorante harmonique ≥ 0, et $d\mu_u$ est de la forme

(α) $\qquad \lambda(X)\, d\mu_1 + d\mu^s$, $\qquad d\mu^s \leq 0$, singulière relativement à $d\mu_1$.

X décrit Δ_1, $\lambda(X)$ intégrable-$d\mu_1$ vaut p.-p.-$d\mu_1$ la limite fine (minimale) de u ou de u_* en $X \in \Delta_1$.

De plus,

(β) $\qquad \mu_{\varphi(u)}$ vaut $\varphi(\lambda(X))\, d\mu_1(X)$ $\qquad$ (L. LUMER-NAÏM).

Noter que $\int \chi(x)\, \lambda(X)\, d\mu_1(X)$ et $\int \chi(x)\, \varphi(\lambda(X))\, d\mu_1(X)$ sont les solutions du problème de Dirichlet de type D_G pour les données respectives $\lambda(X)$ et $\varphi(\lambda(X))$.

Comme $\varphi(u) \leq \varphi(u^+) \leq \varphi(u) + \varphi(0)$, la majoration de $\varphi(u)$ par une fonction harmonique ≥ 0, montre la même chose pour $\varphi(u^+)$, ce qui entraîne pour u^+ l'intégrabilité uniforme que nous considérons. Le lemme montre que μ_{u^+} a une densité (intégrable) en μ_1, c'est-à-dire aussi μ_u^+, qui lui est égale [8]. De $\mu_u = \mu_u^+ - \mu_u^-$, on voit en décomposant μ_u^-, par Radon-Nikodym, en une partie absolument continue à densité intégrable et une partie singulière, on obtient (α), et

$$u_*(x) = \int \chi(x)\, \lambda(X)\, d\mu_1(X) + \int \chi(x)\, d\mu^s(X) ,$$

où il faut encore interpréter la densité λ.

La 1re intégrale est une fonction harmonique de limite fine λ, p.-p.-$d\mu_1$ sur Δ_1, et la seconde a une limite fine 0, p.-p.-$d\mu_1$ (Extension de la théorie de

---

[8] On peut éviter l'usage de la proposition (3) en remarquant seulement que $u_* = (u^+)_* - ((u^+)_* - u_*)$, et le terme entre parenthèses, ≥ 0, a une mesure associée qu'on décompose.

DOOB, voir [8]) ; u et u_* ont mêmes limites fines p.-p.-$d\mu_1$, la différence étant un potentiel.

Puis (β) s'obtient aisément : puisque $\varphi(u)$ admet une majorante harmonique, $(\varphi(u))_*$ existe et admet à la frontière la limite fine $\varphi(\lambda(X))$ p.-p.-$d\mu_1$. La décomposition de la mesure associée donne

$$(\varphi(u))_* = \int \ell(X)\ X(x)\ d\mu_1(X) + \int X(x)\ d\mu'(X) \qquad (\ \mu'\ \text{singulière}\ \geqslant 0\ ).$$

Ces intégrales ont les limites fines $\ell(X)$ et 0 p.-p.-$d\mu_1$ pour les mêmes raisons que plus haut, donc

$$\ell(X) = \varphi(\lambda(X)) \quad \text{p.-p.-}d\mu_1 \ .$$

Mais

$$\varphi(u) \leqslant \varphi(u_*) \leqslant \varphi\left(\int \lambda(X)\ X(x)\ d\mu_1(X)\right) \leqslant \int \varphi(\lambda(X))\ X(x)\ d\mu_1(X)\ .$$

Le terme de droite, fini, est une majorante harmonique de $\varphi(u)$ et $(\varphi(u))_*$. Donc $\mu' = 0$, et $(\varphi(u))_* = \int \varphi(\lambda(X))\ X(x)\ d\mu_1(X)$.

EXTENSION 7. - Si on supprime l'hypothèse que les constantes sont harmoniques, on fixera une fonction harmonique $h > 0$, on conservera le même φ , et on supposera que $h\varphi(u/h)$ (et non plus $\varphi(u)$) admet une majoration harmonique > 0 . On applique ce qui précède aux fonctions h-harmoniques ou surharmoniques, et on revient à u surharmonique donnée.

On obtient alors le même énoncé final en remplaçant μ_1 par μ_h , en considérant μ^s singulière par rapport à μ_h , et λ comme la limite fine de u/h ou u_*/h . Mais

$$\int X(x)\ \lambda(X)\ d\mu_h(X) \quad \text{et} \quad \int X(x)\ \varphi(\lambda(X))\ d\mu_h(X)$$

sont les solutions d'un problème de Dirichlet un peu différent [8] : on considère l'enveloppe inférieure des fonctions surharmoniques v , telles que v/h bornée inférieurement admette une lim inf fine $\geqslant \lambda(X)$ (resp. $\varphi(\lambda(X))$ p.-p.-$d\mu_h$), l'enveloppe supérieure analogue, et leur valeur commune finie ; c'est aussi le produit par h de la solution du problème de type D_G relatif aux fonctions h-harmoniques, à une base du cône des fonctions h-harmoniques > 0 (d'ailleurs homéomorphe à B , ce qui permet de prendre la même variable X), et à la donnée λ . Il suffit de remarquer que si X décrit B , il y a homéomorphisme avec la base définie par $X(x_0)/h(x_0) = 1$, puis avec la base du cône H^+ des fonctions h-harmoniques > 0 , définie par $Y(x_0) = 1$, où $Y = X/h$, et avec toute autre base de H^+ . Les éléments extrémaux se correspondent sur toutes ces bases, et la mesure correspondant à la représentation de la constante du 2e faisceau est telle que

$1 = \int Y(x)\, d\nu(Y)$, c'est-à-dire que $d\nu = d\mu_h$.

La question se pose enfin d'examiner des extensions à des axiomatiques plus larges. L'adaptation a été faite pour l'axiomatique de Bauer, par K. JANSEN (Thèse, Erlangen 1969), quant au résultat de L. LUMER-NAÏM qui étendait (a). Il resterait à compléter et à s'occuper des interprétations probabilistes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRELOT (M.). - L'intégrabilité uniforme ; quelques applications à la théorie du potentiel, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 6e année, 1961/62, n° 1a, 12 p.

[2] BRELOT (M.). - Axiomatique des fonctions harmoniques. - Montréal, Les Presses de l'Université, 1966 (Séminaire de Mathématiques supérieures, 14. Eté 1965).

[3] BRELOT (M.). - Recherches sur la topologie fine et ses applications, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 17, 1967, fasc. 2, p. 395-423.

[4] BRELOT (M.). - On topologies and boundaries in potential theory. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 175).

[5] BRELOT (M.). - Quelques recherches sur l'allure à la frontière des fonctions harmoniques, Colloquium on mathematical Analysis [1970. Jyväskylä] (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).

[6] DOOB (J. L.). - A non probabilistic proof of the relative Fatou theorem, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 293-300.

[7] GÅRDING (L.) and HÖRMANDER (L.). - Strongly subharmonic functions, Math. Scand., t. 15, 1964, p. 93-96.

[8] GOWRISANKARAN (K.). - Fatou-Naïm-Doob limit theorems in the axiomatic system of Brelot, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 2, p. 455-467.

[9] HEINS (M.). - On the theorem of Szegö-Solomentsev, Math. Scand., t. 20, 1967, p. 281-289.

[10] HERVÉ (R.-M.). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-571 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[11] LUMER-NAÏM (L.). - $\mathcal{H}^p$-spaces of harmonic functions, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 17, 1967, fasc. 2, p. 425-469.

[12] NAÏM (L.). - Sur le rôle de la frontière de Martin dans la théorie du potentiel, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 183-281 (Thèse Sc. math. Paris, 1957).

[13] RIESZ (F.) und RIESZ (M.). - Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Compte Rendu du Congrès des Mathématiciens scandinaves [4. 1916. Stockholm], p. 27-44. - Uppsala, Almqvist & Wicksells, 1920.

[14] SMYRNELIS (E.). - Allure des fonctions harmoniques au voisinage d'un point-frontière irrégulier, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, 1968, Série A, p. 157-159.

[15] SOLOMENTSEV (D.). - On some classes of subharmonic functions [en russe avec sommaire en anglais] Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., t. 2, 1938, p. 571-582.

[16] WANBY (G.). - Subharmonic and strongly subharmonic functions in case of variable coefficients, Math. Scand., t. 22, 1968, p. 283-309.

[17] YAMASHITA (S.). - On some families of analytic functions on Riemann surfaces, Nagoya math. J., t. 31, 1968, p. 57-68.

(Texte reçu le 15 octobre 1972)

Marcel BRELOT
3 rue Ernest Cresson
75014 PARIS