GEORGES REEB

Propriétés des trajectoires de certains systèmes dynamiques

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 21, p. 129-140

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__129_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1949)

PROPRIÉTÉS DES TRAJECTOIRES DE CERTAINS SYSTÈMES DYNAMIQUES

par Georges REEB.

1. Introduction.

L'objet du présent exposé est de montrer d'une part que beaucoup de systèmes dynamiques, importants dans la pratique, peuvent être obtenus en perturbant un système dynamique dont les trajectoires sont toutes fermées, et de mettre en évidence des propriétés remarquables des trajectoires des systèmes dynamiques de ce type particulier.

A cet effet il sera commode de résumer brièvement dans cette introduction certaines idées essentielles de la mécanique non linéaire (cf. N. KRYLOFF and N. BOGOLIOUBOF [68]) où il s'agit essentiellement de l'étude des solutions périodiques de l'équation différentielle :

(1) $$x'' + x = \varepsilon f(x,x')$$

qui en coordonnées polaires $(x = \rho \cos \theta \ , y = \rho \sin \theta \ )$ peut s'écrire

(1)' $$\frac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon\, g(\rho, \theta) + \dots$$

(où les points désignent des termes d'ordre supérieur en ε).

a) Méthode des petits paramètres (POINCARÉ, etc.). - Soit $\rho = \psi(\rho_0, \theta, \varepsilon)$ la solution de (1)' où pour $\theta = 0$ on a $\psi(\rho_0, \theta, \varepsilon) = \rho_0$. Posons : $\psi(\rho_0, 2\pi, \varepsilon) = \psi(\rho_0, \varepsilon)$; on vérifie de suite que

(2) $$\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\rho_0, \varepsilon)\right)_{\varepsilon=0} = \int_0^{2\pi} g(\rho_0, \theta)\, d\theta \quad ;$$

soit $G(\rho_0) = \int_0^{2\pi} g(\rho_0, \theta)\, d\theta$.

Il est évident dès lors que l'équation $\psi(\rho_0, \varepsilon) = \rho_0$ a des solutions (pour les petites valeurs de ε) au voisinage des racines de $G(\rho)$. On en conclut que pour les petites valeurs de ε (et pour les valeurs de ρ d'un compact de la droite numérique) les solutions périodiques de (1)' sont en correspondance biunivoque avec les zéros (simples) de la fonction $G(\rho_0)$. De plus le signe de la dérivée de $G(\rho_0)$ au voisinage d'une racine permet d'étudier la stabilité de la trajectoire fermée correspondante.

b) Etude des oscillations de relaxation. - On peut définir ainsi des mouvements régis par (1), où f est construit de telle sorte que la fonction $\psi(\rho_0, \varepsilon)$ vérifie (pour des valeurs raisonnables de ε) les inégalités : $\psi(\rho_0, \varepsilon)-\rho_0 < 0$ pour les grandes valeurs de ρ_0 et $\psi(\rho_0, \varepsilon)-\rho_0 > 0$ pour les petites valeurs de ρ_0 .

Ceci peut s'interprèter graphiquement, et exprime physiquement des propriétés sur l'évolution de l'énergie $x^2 + x'^2$ de (1). Les inégalités précédentes montrent de suite que l'équation $\psi(\rho_0, \varepsilon) = \rho_0$ admet au moins une solution et que (1) admet une trajectoire fermée.

Le problème général. - Lorsqu'on examine les méthodes exposées en a) et b) on voit le rôle fondamental joué par les trajectoires $\rho = \rho_0$, (qui sont les trajectoires de l'équation (1) non perturbée (donc où on a fait $\varepsilon = 0$)). Ces trajectoires forment une fibration du plan des phases (x,x'), et ce sont les propriétés de cette fibration que nous avons utilisées. D'où le problème général :

Etudier sur une variété V_n les trajectoires d'un champ de vecteur E_ε dépendant du paramètre ε où E_ε satisfait à la condition suivante : pour $\varepsilon = 0$, les trajectoires de $E_{\varepsilon=0} = E_0$ sont les fibres d'une fibration de V_n en cercles S_1 , dont la base est V_{n-1} .

THÉORÈME DE SEIFERT. - SEIFERT a démontré [121] que si $n = 3$ et si $\chi(V_2) \neq 2$, le champ E_ε admet des trajectoires fermées (dont la somme des indices est $\chi(V_2)$) pourvu que $\| E_0 - E_\varepsilon \| < \alpha$ où α est une constante positive ne dépendant que de V_3 et de E_0 . A ma connaissance ce théorème important n'a pas encore été généralisé au cas où n est quelconque.

2. Extension des méthodes a) et b) de l'introduction au cas général d'un champ E .

a) Extension de la méthode des petits paramètres. - Cette méthode se transpose de suite. Dans V_n on peut trouver (puisque V_n est fibré) des coordonnées locales (x, θ) où $x \in V_{n-1}$, et $\theta \in S_1$ telles que les équations différentielles des trajectoires de E_ε s'écrivent :

$$(\mathrm{I})' \qquad \frac{dx}{d\theta} = \varepsilon \vec{g}(x, \theta) + \dots$$

Soit alors $x = \psi(x_0, \theta, \varepsilon)$ la solution de (1)' où $\psi(x_0, 0, \varepsilon) = \rho_0$ alors on vérifie que si $\psi(x_0, \varepsilon) = \psi(x_0, 2\pi, \varepsilon)$,

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(\rho_o, \varepsilon)\right)_{\varepsilon=0} = \int_0^{2\pi} \vec{g}(x_o, \theta)\,d\theta = \int_{\text{Fibre } Sx_o} E'dt$$

où $E' = \left(\frac{\partial E_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$.

Posons :
$$\vec{G}(x_o) = \int_{Sx_o} E'dt \ .$$

Il est évident alors que les singularités isolées du champ $\vec{G}(x_o)$ sur V_{n-1} jouent le même rôle que les zéros de la fonction $G(\rho_o)$ ci-dessus. En particulier si V_{n-1} est compacte et si $\chi(V_{n-1}) \neq 0$, on retrouve un théorème analogue à celui de Seifert, (mais bien plus faible), valable au cas où n est quelconque.

b) Oscillations de relaxation :

3. Exemples de systèmes dynamiques du type considéré.

Donnons des exemples de systèmes dynamiques, conduisant à la détermination des trajectoires d'un champ E_ε défini dans A . (Nous indiquons simplement le système lorsque $\varepsilon = 0$).

1) Nous avons déjà considéré (oscillations de relaxation) le système dynamique $x'' + x = 0$.

On peut considérer plus généralement le système (dont la signification dynamique est claire) $x_i'' + \alpha_i^2 x_i = 0$ $(i = 1 \ldots n)$ où les α_i sont des constantes rationnelles.
(Cette hypothèse de rationnalité sur les α_i correspond à un phénomène de réeonnance).

2) Le problème des géodésiques d'une sphère euclidienne S_n (où d'autres espaces dérivés).

3) Le problème restreint des trois corps (avec des valeurs convenables pour les constantes d'intégration).

Dans tous ces exemples le système admet l'invariant intégral d'Elie Cartan, c'est-à-dire que le champ E_o défini par ce système dans une variété V_{2n} admet un invariant intégral relatif du type $\omega = \pi - H\,dt$ où π est une forme définie dans V_{2n} et H une fonction sur V_{2n} . De plus π est supposé de classe maximum (c'est-à-dire $(d\pi)^n \neq 0$). Nous supposons que la variété W_{2n-1} d'équation

$H(x) = H_o$ est régulière en tout point et compacte.

4. Propriétés globales dues à l'invariant intégral.

Parmi ces propriétés nous avons :

PROPRIÉTÉ 1. - L'espace fibré W_{2n-1} n'admet pas de section $W_{2(n-1)}$. Plus généralement même nous pouvons dire que, sans supposer que les trajectoires de E_o sont les fibres d'une fibration, le champ E_o n'admet pas de variété de section compacte.

En effet $d\pi$ induirait dans $W_{2(n-1)}$ une forme fermée de rang maximum qui ne saurait être homologue à zéro sa $(n-1)$-ième puissance $(d\pi)^{n-1}$ étant non nulle.

CONSÉQUENCE. - Les fibres de W_{2n-1} sont rationnellement homologues à zéro dans W_{2n-1} ; par suite chaque trajectoire du système dynamique considéré sera homologue à zéro dans la variété de configuration du système.

PROPRIÉTÉ 2. - Sur la base $W_{2(n-1)}$ de W_{2n-1} il existe une forme extérieure fermée quadratique de classe maximum.

Il suffit de constater que $d\pi$ étant un invariant intégral absolu, il est l'image réciproque d'une forme définie sur l'espace de base $W_{2(n-1)}$; cette forme sera visiblement fermée et de classe maximum, comme $d\pi$.

CONSÉQUENCE. - $W_{2(n-1)}$ est une variété presque complexe hermitienne, ce qui entraîne des conséquences importantes sur la topologie de $W_{2(n-1)}$ et W_{2n-1} .

PROPRIÉTÉ 3. - La période $T(x)$ de la trajectoire issue de x est une constante sur W_{2n-1} .

La transformation $x \to x \quad t \to t+T$ laisse invariant $d\pi$, (d'après la définition même des invariants intégraux). Donc $dT \wedge dH = 0$. C.Q.F.D.

5. Méthode des petits paramètres dans le cas de l'existence d'un invariant intégral.

Dans ce cas on peut préciser les théorèmes du paragraphe (2,a). En effet, on montre dans ces conditions que le champ $\vec{G}$ défini dans la base admet aussi un invariant intégral ; les singularités de $\vec{G}$ coïncident alors avec les points critiques d'une certaine fonction numérique sur la base $W_{2(n-1)}$. Ceci permet grâce aux théorèmes de Morse de préciser les résultats de (2,a).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALBRECHT (Felix). - Remarques sur un théorème de T. Wazewski relatif à l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles, Bull. Acad. Pol. Sc., Classe 3, t. 2, 1954, p. 315-318.

[2] ALBRECHT (Felix). - Un théorème de comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles, Bull. Acad. Pol. Sc., Classe 3, t. 4, 1956, p. 737-739.

[3] ALBRECHT (Felix). - Despre puncte singulare si solutii periodice, Com. Acad. R. p. Romîne, t. 5, 1955, p. 1035-1040.

[4] ANDRÉ (J.) und SEIBERT (P.). - Über stückweise lineare Differentialgleichungen, die bei Regelungsproblemen auftreten, Arch. Math., t. 7, 1956, p. 148-156 et p. 157-164.

[5] ANDRONOW (A.) et PONTRJAGIN (L.). - Systèmes grossiers [en russe], Doklady Akad. Nauk S.S.S.R., N.S., t. 14, 1937, p. 247-250.

[6] ARTIN (Emil). - Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg, t. 3, 1923, p. 170-175.

[7] de BAGGIS (H.F.). - Dynamical systems with stable structures, Contributions to the theory of nonlinear oscillations. - Princeton, Princeton University Press, 1952 (Annals of Math. Studies n° 29) ; p. 37-39.

[8] BARBAŠIN (E.A.). - Une condition pour l'existence d'une variété transversale [en russe], Doklady Akad. Nauk S.S.S.R., t. 70, 1950, p. 365-367.

[9] BAUM (J.D.). - Asymptoticity in topological dynamics, Trans. Amer. math. Soc., t. 77, 1954, p. 506-519.

[10] BAUTIN (N.N.). - On the number of limit cycles appearing with variations of the coefficients from an equilibrium state of the type of a focus or a center [en russe], Mat. Sbornik, N.S., t. 30 (72), 1952, p. 181-196.

[11] BENDIXSON (Y.). - Sur les courbes définies par une équation différentielle, Acta Math., t. 24, 1901, p. 1-88.

[12] BIRKHOFF (G.D.). - Collected mathematical papers. - New York, American mathematical Society, 1950 ; 3 volumes.

[13] BIRKHOFF (G.D.). - Dynamical systems. - New York, American mathematical Society, 1927 (Amer. math. Soc. Coll. Publ. n° 9).

[14] BIRKHOFF (G.D.). - Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques, Accad. Pontif. nuovi Lincei, Mem., série 3, t. 1, 1935, p. 85-216.

[15] BIRKHOFF (G.D.) et SMITH (P.A.). - Structure analysis of surface transformations, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 7, 1928, p. 345-379.

[16] BOOTHBY (William M.). - The topology of regular curve families with multiple saddle points, Amer. J. Math., t. 73, 1951, p. 405-438.

[17] BOOTHBY (William M.). - The topology of the level curves of harmonic functions with critical points, Amer. J. Math., t. 73, 1951, p. 512-538.

[18] BOTT (Raoul). - On manifolds all of whose geodesics are closed, Annals of Math., t. 60, 1954, p. 375-382.

[19] BROUWER (E.J.). -On continuous vector distributions on surfaces, Koninkl. Akad. Wet. Amsterdam, Proc. Sect. Sc., t. 11, 1909, p. 850-858 et t. 12, 1910, p. 716-734.

[20] BUSEMANN (Herbert). - Space with non-positive curvature, Acta Math., t. 80, 1948, p. 259-310.

[21] CARATHEODORY (G.E.). - Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. - Leipzig, Teubner, 1935.

[22] de CASTRO (Antonio). - Sull'esistenza ed unicità delle soluzioni periodiche dell'equazione : $x'' + f(x , x') + g(x) = 0$, Boll. Un. mat. Ital., t. 9, 1954, p. 369-372.

[23] CHARPENTIER (Mlle Marie). - Sur la semi-continuité d'inclusion des trajectoires de la dynamique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 196, 1933, p. 1771-1773.

[24] COHN-VOSSEN (Stefan). - Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen, Compos. math., t. 2, 1935, p. 69-133.

[25] COHN-VOSSEN (Stefan). - Totalkrümmung und geodätische Linien auf einfach-zusammenhängenden offenen vollstängigen Flächenstücken, Mat. Sbornik, t. 43, 1936, p. 139-163.

[26] COLOMBO (Giuseppe). - Sull'equazione differenziale non lineare del terzo ordine di un circuito osçillante triodico, Rend. Sem. mat. Univ. Padova, t. 19, 1950, p. 114-140.

[27] COLOMBO (Giuseppe). - Moti di regime di un sistema non-lineare autonomo in due gradi di libertà, con debole accoppiamento capacitivo, Rend. Sem. mat. Univ.Padova, t. 24, 1955, p. 400-420.

[28] COLOMBO (Giuseppe). - Sulle oscillazioni non-lineari in due gradi di libertà, Rend. Sem. mat. Univ. Padova, t. 19, 1950, p. 413-441.

[29] COLOMBO (Giuseppe). - Sopra il fenomeno dell'azione asincrona, Rend. Sem. mat. Univ. Padova, t. 24, 1955, p. 353-395.

[30] DENJOY (Arnaud). - Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 11, 1932, p. 333-376.

[31] DUBOIS-VIOLETTE (Mme). - Etude des réseaux de courbes tracés sur une surface close et en général localement homéomorphes à un faisceau de droites parallèles, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 68, 1951, p. 267-325.

[32] DUFF (G.F.D.). - Limit-cycles and rotated vector fields, Annals of Math., Series 2, t. 57, 1953, p. 15-31.

[33] EL'SGOL'C (L. E.). - Kačestvennye metody v matematičeskom analyze , (Méthodes qualitatives en analyse mathématique). - Moscou, 1955.

[34] EL'SGOL'C (L. E.). - Ocenka čisla osobykh toček dinamčeskoj sistemy zadannoj na mnogoobrazii, Mat. Sbornik, N.S., t. 26 (68), 1950, p. 215-223 ; An estimate for the number of singular points of a dynamical system defined on a manifold, Amer. math. Soc. transl., t. 68, 1952, 14 p.

[35] FRANKEL (Th.). - Homology and flows on manifolds, Annals of Math., t. 65, 1957, p. 331-339.

[36] FRIEDRICHS (K. O.). - Asymptotic phenomena in mathematical physics, Bull. Amer. math. Soc., t. 61, 1955, p. 485-504.

[37] FUNK (P.). - Uber Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, Math. Annalen, t. 74, 1913, p. 278-300.

[38] GOMORY (Ralph E.). - Trajectories tending to a critical point in 3-space; Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 140-153.

[39] GOTTSCHALK (W. H.). - Transitivity and equicontinuity, Bull. Amer. math. Soc., t. 54, 1948, p. 982-984.

[40] GOTTSCHALK (W. H.). - Almost periodic points with respect to transformation semi-groups, Annals of Math., t. 47, 1946, p. 762-766.

[41] GOTTSCHALK (W. H.) and HEDLUND (G. A.). - The dynamics of transformation groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 65, 1949, p. 348-359.

[42] GOTTSCHALK (W.H.) and HEDLUND (G. A.). - Topological dynamics. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Amer. math. Soc. Coll. Publ. n° 36).

[43] GRABAR (M. I.). - Transformation of dynamical systems into systems of solutions of differential equations, [en russe] Vestn. Moskov Univ., Ser. Fiz. Mat. Estest. Nauk, t. 3, 1952, p. 3-8 . Analysé dans Math. Rev., t. 14, 1953, p. 981.

[44] GRAFFI (Dario). - Sopra alcune equazioni differenziali della radiotecnica, Mem. r. Acc. Sc. Bologna, (9), t. 9, 1942, p. 145-153.

[45] GRAFFI (Dario). - Sopra alcune equazioni differenziali non lineari della fisica-matematica, Mem. r. Acc. Sc. Bologna, (9) 7, 1940, p. 121-129.

[46] GREEN (L. W.). - Surfaces without conjugate points, Trans. Amer. math. Soc., t. 76, 1954, p. 529-546.

[47] HAAG (Jules). - Les mouvements vibratoires. - Paris, Presses Universitaires de France, 1952.

[48] HAAS (Félix). - On the global behaviour of differential equations on two-dimensional manifolds, Proc. Amer. math. Soc., t. 4, 1953, p. 630-636.

[49] HADAMARD (M.). - Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, J. Math. pures et appliquées, t. 4, 1898, p. 27-73.

HEDLUND (G. A.). - voir GOTTSCHALK [42].

[50] HILMY (Heinrich). - Sur les ensembles quasi-minimaux dans les systèmes dynamiques, Annals of Math., Series 2, t. 37, 1936, p. 899-907.

[51] HILMY (Heinrich). - Les centres d'attraction minimaux des systèmes dynamiques, Comp. Math., t. 3, 1936, p. 227-238.

[52] HILMY (Heinrich). - Sur les mouvements des systèmes dynamiques qui admettent "l'incompressibilité" des domaines, Amer. J. of Math., t. 59, 1937, p. 803-808.

[53] HILMY (Heinrich). - Sur la structure d'ensemble des mouvements stables au sens de Poisson, Annals of Math., t. 37, 1936, p. 43-45.

[54] HILMY (Heinrich). - Sur les théorèmes de récurrence dans la dynamique générale, Amer. J. of Math., t. 61, 1939, p. 149-160.

[55] HOPF (Heinz). - Differentialgeometrie und topologische Gestalt, Jber. dtsch. Mat.Ver., t. 41, 1932, p. 209-229.

[56] HOPF (H.) et RINOW (W.). - Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, Comment. math. Helvet., t. 3, 1931, p. 209-225.

[57] HUSSON (Edouard). - Les trajectoires de la dynamique, - Paris, Gauthier-Villars, 1932 (Mém. Sc. math. n° 55).

[58] JENKINS (J. A.) and MORSE (M.). - Topological methods on Riemann surfaces, pseudoharmonic functions, Contributions to the theory of riemann surfaces. - Princeton, Princeton University Press, 1953 (Annals of Math. Studies n° 30); p. 111-139.

[59] KAMKE (E.). - Über die partielle Differentialgleichung

$$f(x\ ,\ y)\ \frac{\partial z}{\partial x} + g(x\ ,\ y)\ \frac{\partial z}{\partial y} = h(x\ ,\ y)\ ,$$

Math. Z., t. 41, 1936, p. 56-66 et t. 42, 1936, p. 287-300.

[60] KAPLAN (Wilfred). - Topology of the two-body problem, Amer. math. Monthly, t. 49, 1942, p. 316-323.

[61] KAPLAN (Wilfred). - Regular curve-families filling the plane, I, Duke math. J., t. 7, 1940, p. 154-185 ; II, t. 8, 1941, p. 11-46.

[62] KAPLAN (Wilfred). - The structure of a curve-family on a surface in the neighbourhood of an isolated singularity, Amer. J. of Math., t. 64, 1942, p. 1-35.

[63] KAPLAN (Wilfred). - Topology of level curves of harmonic functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 63, 1948, p. 514-522.

[64] KAPLAN (Wilfred). - Dynamical systems with indeterminacy, Amer. J. Math., t. 72, 1950, p. 573-594.

[65] KERÉKJÁRTÓ (B.V.). - Vorlesungen über Topologie, I. - Berlin, Springer, 1923 (Grundl. math. Wiss., Band 8),

[66] KNESER (Hellmuth). - Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen, Math. Annalen, t. 91, 1924, p. 135-154.

[67] KOOPMAN (B. O.). - Birkhoff on dynamical systems, Bull. Amer. math. Soc., t. 36, 1930, p. 162-166.

[68] KRYLOFF (N.) and BOGOLIUBOFF (N.). - Introduction to non-linear mechanics. - Princeton, Princeton University Press, 1947 (Annals of Math. Studies n° 11).

[69] LA SALLE (J.). - Relaxation oscillations, Quart. appl. Math., t. 7, 1949, p. 149.

[70] LEFSCHETZ (S.). - Topics in Topology. - Princeton, Princeton University Press, 1942 (Annals of Math. Studies n° 10).

[71] LEFSCHETZ (S). - Contributions to the theory of non-linear oscillations, I , II , III . - Princeton, Princeton University Press, 1950, 1952 et 1956 (Annals of Math. Studies n° 20 , 29 et 36).

[72] LEFSCHETZ (S.). - Lectures on differential equations. - Princeton, Princeton University Press, 1948.

[73] LEVINSON (N.) and SMITH (O.K.). - A general equation for relaxation oscillations, Duke math. J., t. 9, 1942, p. 382-403.

[74] LIEBMANN (W.). - Berührungstransformationen ; Geometrische Theorie der Differentialgleichungen, Enzykl. math. Wiss..., Band III, 3. Teil, Heft 4. - Leipzig, Teubner, 1915.

[75] MAIER (A. G.). - Sur les trajectoires dans l'espace à trois dimensions, Doklady Akad. Nauk S.S.S.R., N.S., t. 55, 1947, p. 579-581.

[76] MAIER (A. G.). - Sur un problème de Birkhoff, Doklady Akad. Nauk S.S.S.R., N.S., t. 55, 1947, p. 473-475.

[77] MAIER (A. G.). - O central'nykh traektorijakh i probleme Birkgofa, Mat. Sbornik, N.S., t. 26 (68), 1950, p. 265-290.

[78] MARKOF (A.). - Sur une propriété générale des ensembles minimaux de M. Birkhoff, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 193, 1931, p. 823-825.

[79] MASSERA (José L.). - The number of subharmonic solutions of non-linear differential equations of the second order, Annals of Math., Series 2, t. 50, 1949, p. 118-126.

[80] MASSERA (José L.). - Sur un théorème de G. Sansone sur l'équation de Liénard, Boll. Un. mat. Ital., t. 9 (3), 1954, p. 367-369.

[81] MASSERA (José L.). - Contributions to stability theory, Annals of Math., t. 64, 1956, p. 182-206.

[82] MIKOLAJSKA (Z.). - Sur une propriété asymptotique des intégrales d'une équation différentielle du second ordre, Bull. Acad. Polon. Sc., série 3, t. 2, 1954, p. 113-116.

[83] MILNOR (JOHN). - The characteristics of a vector field on the two-sphere, Annals of Math., Series 2, t. 58, 1953, p. 253-257.

[84] MINORSKY (Nicolas). - Meccanica non-lineare, Boll. Un. mat. Ital., t. 5 (3), 1950, p. 313-330.

[85] MINORSKY (Nicolas). - Sur les systèmes non linéaires à deux degrés de liberté, Rend. Sem. mat. Torino, t. 13, 1953-1954, p. 59-70.

[86] MINORSKY (Nicolas). - La méthode stroboscopique et ses applications, Bull. Soc. franç. Méc., t. 4, 1954, p. 15-26.

[87] MINORSKY (Nicolas). - Sur l'interaction des oscillations non linéaires, Rend. Sem. mat. fis. Milano, t. 25, 1953-1954, p. 144-164.

[88] von MISES (Richard). - Über der Verlauf der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung, Compos. math., t. 6, 1938, p. 203-220.

[89] MORSE (Marston). - The calculus of variations in the large. - New York, American mathematical Society, 1934 (Amer. math. Soc. Coll. Publ. n° 18).

[90] MORSE (Marston). - A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one, Trans. Amer. math. Soc., t. 26, 1924, p. 25-60.

[91] MORSE (M.) and HEDLUND (G.A.). - Manifolds without conjugate points, Trans. Amer. math. Soc., t. 51, 1942, p. 362-386.

[92] MORSE (M.) and HEDLUND (G. A.). - Symbolic dynamics, Amer. J. Math., t. 60 1938, p. 815-866.

[93] MYERS (Sumner Byron). - Connections between differential geometry and topology, I : Simply connected surfaces, Duke math. J., t. 1, 1935, p. 376-391 ; II : Closed surfaces, t. 2, 1936, p. 95-102.

[94] MYERS (Sumner Byron). - Arcs and geodesics in metric spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 57, 1945, p. 217-227.

[95] NEMYCKII (V. V.). - Topological problems of the theory of dynamical systems [en russe], Uspekhi Matem. Nauk, N.S., t. 4, n° 6 (34), 1949, p. 91-153 (Amer. math. Soc. Transl. 103).

[96] NEMYCKII (V. V.). - Generalizations of the theory of dynamical systems [en russe], Uspekhi Matem. Nauk, N.S., t. 5, n° 3 (37), 1950, p. 47-59.

[97] NEMYCKII (V. V.). - Über vollständig unstabile dynamische Systeme, Annali Mat. pura appl., Série 4, t. 14, 1935-1936, p. 275-286.

[98] NEMYCKII (V. V.) et STEPANOV (V. V.). - Kacestvennaya teoriya differencial'nyh uravnenii (Qualitative theory of differential equations). - Moscou, Leningrad, 1947.

[99] OTROKOV (N. F.). – Rozdenie predel'nykh ciklov v algebraičeskikh differencial'nykh sistemakh (Generation of limit cycle in algebraic differential systems), Doklady Acad. Nauk S.S.S.R., N.S., t. 105, 1955, p. 26-28.

[100] PAINLEVÉ (Paul). – Existence de l'intégrale générale, Détermination d'une intégrale particulière par ses valeurs initiales, Encycl. Sc. math. pures et appl., t. 2, vol. 3, fasc. 1. – Leipzig, Teubner, et Paris, Gauthier-Villars, 1910 ; article II 15, p. 1-57.

[101] PETROVITCH (M.). – Intégration qualitative des équations différentielles. – Paris, Gauthier-Villars, 1931 (Mém. Sc. math. n° 48).

[102] PETROVSKIJ (I. G.) i LANDIS (E. M.). – O cisle predel'nykh ciklov uravnenija $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x , y)}{N(x , y)}$, gde M i N polinomy vtoroj stepeni (On the number of limit cycles of the equation $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x , y)}{N(x , y)}$ where M and N are polynomials of second degree), Doklady Akad. Nauk S.S.S.R., N.S., t. 102, 1955, p. 29-32.

[103] PLIS (A.). – Remarque sur le système dynamique dans le domaine doublement connexe, Ann. Pol. Math., t. 3, 1956, p. 169-171.

[104] PLIS (A.). – On a topological method for studying the behaviour of the integrals of ordinary differential equations, Bull. Acad. Pol. Sc., Série 3, t. 2, 1954, p. 415-418.

[105] PLIS (A.). – On the problem of non-local existence for first integrals of a system of ordinary differential equations, Bull. Acad. Pol. Sc., Série 3, t. 3, 1955, p. 63-67.

[106] PLIS (A.). – Sets filled by asymptotic integrals of ordinary differential equations, Bull. Acad. Pol. Sc., t. 4, 1956, p. 749-752.

[107] POINCARÉ (Henri). – Méthodes nouvelles de la mécanique céleste. tomes I, II, III. – Paris, Gauthier-Villars, 1892-1899.

[108] POINCARÉ (Henri). – Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, J. Math. pures et appl., Série 3, t. 7, 1881, p. 375-422.

[109] POINCARÉ (Henri). – Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, Trans. Amer. math. Soc., t. 6, 1905, p. 237-274.

[110] PREISSMANN (Alexandre). – Quelques propriétés globales des espaces de Riemann, Comment. math. Helvet., t. 15, 1943, p. 175-216.

[111] PUTNAM((C. R.). – Stability and almost periodicity in dynamical systems, Proc. Amer. math. Soc., t. 5, 1954, p. 352-356.

[112] RAUCH (H.E.). – A contribution to differential geometry in the large, Annals of Math., Series 2, t. 54, 1951, p. 38-55.

[113] RAUCH (H. E.). – Geodesics, symetric spaces and differential geometry in the large, Comment. math. Helvet., t. 27, 1953, p. 294-320.

[114] de RHAM (Georges). – Sur la réductibilité des espaces de Riemann (Appendice), Comment. math. Helvet., t. 26, 1952, p. 328-344.

[115] REEB (G.). – Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, Mém. Acad. royale Belgique, Cl.Sc., t. 27, 1952, p. 1-64.

[116] REEB (G.). – Sur la théorie générale des systèmes dynamiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 89-115.

RINOW (W.). – voir HOPF (H.).

[117] RINOW (W.). – Über Zusammenhänge zwischen der Differentialgeometrie im Grossen und im Kleinen, Math. Z., t. 35, 1932, p. 512-528.

[118] RINOW (W.). – Bericht über die innere Flächentheorie A. D. Alexandrovs, Jber. dtsch. Mat. Ver., t. 56, 1953, p. 77-87.

[119] SAMEDOVA (S. A.). – Criteria of existence and uniqueness of a periodic solution of the equation $y' = f(x , y)$, Akad. Nauk Azerbaidzan S.S.S.R. Trudy Inst. Fiz. Mat., t. 6, 1953, p. 25-39.

[120] SEIFERT (Herbert). – Closed integral curves in 3-space and isotopic two-dimensional deformations, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 287-302.

[121] SEIFERT (Herbert). – Periodische Bewegungen mechanischer Systeme, Math. Z., t. 51, 1948, p. 197-216.

[122] SPEISER (Andreas). – Topologische Fragen aus der Himmelsmechanik, Vjschr. naturf. Ges., Zürich, t. 85, 1940, p. 204-213.

[123] STOKER (J. J.). – Nonlinear vibrations. – New York, Interscience, 1950.

[124] SZARSKI (Jacek). – Sur un problème de caractère intégral relatif à l'équation $\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x , y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ définie dans le plan tout entier, Ann. Soc. Pol. Math., t. 19, 1946, p. 106-132.

[125] SZMYDTOWNA (Z.). – Sur l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires, Ann. Soc. Pol. Math., t. 24, 1951, p. 17-34 ; Sur l'allure asymptotique des intégrales de certains systèmes d'équations différentielles non linéaires, Ann. Pol. Math., t. 1, 1955, p. 253-276.

[126] SZMYDT (Z.). – Sur la structure de l'ensemble engendré par les intégrales tendant vers le point singulier du système d'équations différentielles, Bull. Acad. Pol. Sc., Série 3, t. 1, 1953, p. 223-227.

[127] SZMYDTOWNA (Z.). – Sur les intégrales premières de l'équation $y' = f(x , y)$, Ann. Soc. Pol. Math., t. 23, 1950, p. 167-182.

[128] TATARKIEWICZ (Krzysztof). – Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation différentielle du second ordre, Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska, sect. A, t. 7, 1953, p. 19-81.

[129] THOM (René). – Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 228, 1949, p. 973-975.

[130] UNO (Toshio). – On some systematic method for finding limit cycles, Proc. first Jap. nat. Congr. appl. Mech., 1951, – Science Council of Japan, 1952 ; p. 513-516.

[131] URA (Taro). – Sur les courbes définies par les équations différentielles dans l'espace à m dimensions, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 70, 1953, p. 287-360.

[132] URA (Taro). – Sur les périodes fondamentales de solutions périodiques, Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, t. 4, 1955, p. 113-130.

[133] WAZEWSKI (Tadeusz). – Sur l'évaluation du nombre des paramètres essentiels dont dépend la famille des intégrales d'un système d'équations différentielles ayant une propriété asymptotique, Bull. Acad. Pol. Sc., Série 3, t. 1, 1953, p. 3-5.

[134] WAZEWSKI (Tadeusz). – Sur la structure de l'ensemble engendré par les

intégrales non asymptotiques des équations différentielles, Bull. Acad. Pol. Sc., Série 3, t. 3, 1955, p. 143-148.

[135] WAZEWSKI (Tadeusz). - Sur les intégrales de branchement des systèmes des équations defférentielles ordinaires, Ann. Pol. Math., t. 1, 1955, p. 338-345.

[136] WAZEWSKI (Tadeusz). - Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires, Ann. Soc. Pol. Math., t. 20, 1947, p. 279-313.

[137] WAZEWSKI (Tadeusz). - Sur la structure de l'ensemble engendré par les intégrales non asymptotiques des équations différentielles, Bull. Acad. Pol. Sc., série 3, t. 3, 1955, p. 143-148.

[138] WAZEWSKI (Tadeusz). - Sur un problème de caractère intégral relatif à l'équation $\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x , y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, Mathematica, t. 8, 1934, p. 103-116.

[139] WAZEWSKI (Tadeusz). - Sur les intégrales premières de l'équation $P(x , y)dx + Q(x , y)dy = 0$, Mathematica, t. 9, 1935, p. 179-181.

[140] WAZEWSKI (Tadeusz). - Sur les intégrales stables non périodiques des systèmes d'équations différentielles, Ann. Soc. Pol. Math., t. 13, 1934, p. 50-52.

[141] WAZEWSKI (T.) et ZAREMBA (S. K.). - Sur les ensembles de condensation des caractéristiques d'un système d'équations différentielles ordinaires, Ann. Soc. Pol. Math., t. 15, 1936, p. 24-33.

[142] WEIL (André). - On systems of curves on a ring-shaped surface, J. Indian math. Soc., t. 19, 1931, p. 109-112.

[143] WHITEHEAD (J. H. C.). - On the covering of a complete space by the geodesics through a point, Annals of Math., t. 36, 1935, p. 679-704.

[144] WHITNEY (Hassler). - On regular families of curves, Bull. Amer. math. Soc., t. 47, 1941, p. 145-147.

[145] WHITNEY (Hassler). - Regular families of curves, Annals of Math., Series 2, t. 34, 1933, p. 244-270.

[146] WHITNEY (Hassler). - Cross-sections of curves in 3-spaces, Duke math. J., t. 4, 1938, p. 222-226.

[147] ZOLL (Otto). - Über Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien, Math. Annalen, t. 57, 1903, p. 108-133.

[Septembre 1957]