

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

M.-H. SCHWARTZ

**Compte-rendu de travaux de M. Heins sur diverses
majorations de la croissance des fonctions analytiques
ou sous-harmoniques**

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 23, p. 147-151

http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__147_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COMPTE-RENDU DE TRAVAUX DE M. HEINS SUR DIVERSES MAJORATIONS
DE LA CROISSANCE DES FONCTIONS ANALYTIQUES OU SOUS-HARMONIQUES

par Mme M.-H. SCHWARTZ

NOTATIONS. - Soit $u(z)$ une fonction sous-harmonique à valeurs réelles dans $]-\infty, +\infty]$, définie dans un domaine Ω du plan complexe $z = x + iy$ (en particulier, $\log|f(z)|$ si $f(z)$ est analytique).

Soit $\sigma(r) = \max u(re^{i\theta})$ (en particulier $\log M(r)$). Sauf indication contraire les limites seront prises pour $r \rightarrow \infty$.

1. On the Phragmen-Lindelöf Principle [4].

HYPOTHESES :

$u(z)$ est défini pour $x > 0$ et tel que

$$\limsup_{z \rightarrow iy} u(z) \leq 0$$

THÉORÈME de Phragmen-Lindelöf. - Si $u(z)$ n'est pas partout négatif, on a :

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma(r)}{r} = \alpha > 0$$

si, de plus, $\alpha < +\infty$, on a $u(z) \leq \frac{4\alpha}{\pi} x$.

Principaux résultats de HEINS. -

1° La limite de $\frac{\sigma(r)}{r}$, soit α , existe toujours et est positive :

($0 \leq \alpha \leq +\infty$)

2° Si, de plus, $0 < \alpha < +\infty$, on a :

$$u(z) = \alpha x + \varphi(z)$$

$\varphi(z)$ étant une fonction sous-harmonique négative qui, quel que soit $\xi > 0$, est supérieure à $-\xi r$ sur tout le demi-cercle de rayon r sauf peut-être sur un ensemble de mesure angulaire qui tend vers 0.

La démonstration de HEINS repose sur le même principe de majoration que celle du théorème de Phragmen-Lindelöf, mais il est appliqué une seconde fois de manière à obtenir des bornes inférieures.

Les résultats sont valables dans l'espace à n dimensions.

3° Conséquences.

Le quotient $\frac{1}{r} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} u^+(r e^{i\theta}) d\theta$ tend vers $\frac{\pi}{2}\alpha$ (AHLFORS [1] avait montré qu'il était une fonction croissante de r) ⁽¹⁾.

Le quotient $\frac{1}{r} \left[\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} u^2(r e^{i\theta}) d\theta \right]^{1/2}$ tend vers $\alpha \sqrt{\pi/2}$.

Résultats récents de Mme J. LELONG [9], [10].

Il existe une constante γ telle que $\alpha = \gamma^+$ ($\gamma^+ = \sup(\gamma, 0)$) et telle que $\varphi(M)/x \rightarrow \gamma$ lorsque z tend vers l'infini radialement, sauf peut-être pour un ensemble J de rayons dont la capacité extérieure, comptée sur la sphère unité, est nulle.

La borne supérieure de $\varphi(M)/x$, pour $OM = r$, tend vers γ .

Ces résultats sont exprimés R^n ; les résultats de HEINS, exprimés pour $z \in R^2$, sont aussi valables pour $z \in R^n$. Il n'en sera pas de même pour ses résultats ultérieurs.

2. Entire functions with bounded minimum modulus ; subharmonic functions analogues [7].

HYPOTHÈSES :

$u(z)$ est défini dans tout le plan complexe et non constant $\inf \mu(z) \leq 0$ quel que soit r .

Résultat antérieur, comportant comme cas particulier le théorème de Denjoy-Ahlfors pour $n = 1$:

$$\liminf \sigma(r) / \sqrt{r} > 0$$

Résultat principal de HEINS.

La limite de $\sigma(r) / \sqrt{r}$, soit α , existe, et est > 0 .

Conséquence : Si Ω est un domaine dont la frontière coupe tous les cercles $|z| = r$ et si, lorsque z tend vers un point frontière, $\limsup u(z) \leq 0$, alors, ou bien $u(z) \leq 0$ dans Ω , ou bien $\lim \sigma(r) / \sqrt{r} = \alpha$, $0 < \alpha \leq +\infty$.

⁽¹⁾ Voir [6], l'auteur y reprend la méthode d'Ahlfors [1] : inégalités différentielles et convexité par rapport aux fonctions exponentielles qui réalisent l'égalité.

Des exemples sont donnés relativement au cas où $u(z) \leq 0$ dans Ω :
 $\sigma(r)/\sqrt{r}$ ou $\sigma(r)/r^\tau$ ($\tau > 0$) peuvent ne pas tendre vers 0 mais osciller
entre 0 et $-\infty$ ou tendre vers $-\infty$.

La démonstration de HEINS, pour s'appliquer à toutes les fonctions sous-harmoniques, nécessite la généralisation de la formule de Blaschke pour les fonctions d'ordre $\rho < 1$. Pour $\limsup \sigma(r)/r^\rho < +\infty$ il établit donc à partir du théorème de F. Riesz (en supposant $u(z)$ harmonique à l'origine) la formule suivante :

$$u(z) = u(0) + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|\zeta| < r} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu(\zeta)$$

μ étant une mesure positive telle que

$$\mu^*(r) = \mu[|\zeta| < r] = O(r^\rho).$$

L'auteur introduit alors la fonction $U(z)$ obtenue en "rabattant" le long des cercles $|z| = r$, toute la masse μ sur l'axe réel négatif. D'une part $U(z)$ permet de retrouver avec M. BRELOT [2] l'inégalité de Millioux-Schmitt d'où HEINS déduit rapidement que l'ordre est au moins $1/2$; d'autre part $U(z)$ permet de déduire l'existence de la limite de $\sigma(r)/\sqrt{r}$ dans le cas considéré de l'existence de la limite de $\sigma(r)/r$ dans les conditions du théorème de Phragmén-Lindelöf. Dans ses majorations, l'auteur utilise également un raffinement de ce théorème relatif aux grandes valeurs de $-u(z)$ sur l'axe des y .

On conçoit que cette méthode fournisse une démonstration simple du théorème de G. Valiron sur les zéros d'une fonction d'ordre inférieurs à 1, à zéros réels négatifs.

3. The Denjoy-Ahlfors-Carleman Theorem [8].

HYPOTHÈSES :

$u(z)$ sous-harmonique dans le plan et non constant ;

$u(z) \leq 0$ en tous les points de n chemins $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ tendant vers l'infini (et ayant 2 à 2 l'origine pour seul point d'intersection) ;

$u(z)$ atteint une valeur strictement positive dans chacun des domaines Ω_k ayant pour frontières 2 courbes γ consécutives, soit γ_k et γ_{k+1} .

Résultat d'Ahlfors ⁽²⁾ dans le cas des fonctions entières :

$$\liminf \sigma(r)/r^{n/2} = \alpha > 0$$

Résultat de Heins :

si $\alpha < +\infty$, $u(z)$ est d'ordre $n/2$:

$$\lim \frac{\log \sigma(r)}{\log r} = \frac{n}{2}.$$

L'existence d'une limite pour $\sigma(r)/r^{n/2}$ est présumée dans le cas général, et démontrée dans le cas où $n = 1$ (mémoire [7]) et dans le cas étudié par Denjoy où les γ_k sont des droites : c'est une conséquence immédiate du mémoire [4] ; on a alors angle $\gamma_k \gamma_{k+1} = 2\pi/n$.

La démonstration de Heins utilise essentiellement, comme celle d'Ahlfors :

1° le Verzerrungssatz d'Ahlfors ⁽²⁾ sur la représentation conforme d'un domaine tel que Ω sur la bande $|y| < \frac{a}{2}$, $b(r)$ étant un arc convenablement défini intercepté par Ω sur $|z| = r$, et $\theta(r)$ sa mesure angulaire ; ρ et r étant deux rayons de rapport assez grand : la distance des images de $b(\rho)$ et $b(r)$ est supérieure à

$$a \int_{\rho}^r \frac{dt}{t\theta(t)} - 4a$$

2° les majorations à l'aide des mesures harmoniques. Mais alors que Ahlfors utilise simplement le théorème de Phragmen-Lindelöf, Heins utilise la représentation des domaines Ω_k non plus sur le demi-plan mais sur des demi-bandes variables : $x < 0$, $2|y| < a_k(\rho, r)$. $\sigma_k(\rho)$ et $\sigma_k(r)$ étant les maxima de $u(z)$ sur des arcs convenablement définis, interceptés par Ω_k sur les cercles $|z| = \rho$ et $|z| = r$, et $\mu_k(r, \rho)$ étant le maximum de la mesure harmonique dans Ω_k des seconds par rapport aux premiers, on a

$$\sigma_k(\rho) \leq \sigma_k(r) \mu_k(\rho, r).$$

C'est en fonction de μ_k que sera choisi a_k , et une phase essentielle de la démonstration consistera à démontrer que $\lim_{r \rightarrow \infty} a_k(\rho, r) = 2\pi/n$.

⁽²⁾ Voir par exemple NEVANLINNA [11].

L'auteur utilise également une minoration de $\mu(\rho, r)$ en fonction de ρ/r due à BEURLING ⁽³⁾.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AHLFORS (Lars V.). - On Phragmén-Lindelöf's principle, Trans. Amer. math. Soc., t. 41, 1937, p. 1-8.
- [2] BRELOT (Marcel). - Quelques applications aux fonctions holomorphes de la théorie moderne du potentiel et du problème de Dirichlet, Bull. Soc. royale Sc. Liège, t. 8, 1939, p. 385-391.
- [3] HEINS (Maurice H.). - The problem of Milloux for functions analytic throughout the interior of the unit circles, Amer. J. of Math., t. 67, 1945, p. 213-238.
- [4] HEINS (Maurice H.). - On the Phragmén-Lindelöf principle, Trans. Amer. math. Soc., t. 60, 1946, p. 238-244.
- [5] HEINS (Maurice H.). - The minimum modulus of a bounded analytic function, Duke math. J., t. 14, 1947, p. 179-215.
- [6] HEINS (Maurice H.). - On some theorems associated with the Phragmén-Lindelöf principle, Ann. Acad. scient. Fenn., Series A, I : Math.-Phys., 1948, n° 46, 10 p.
- [7] HEINS (Maurice H.). - Entire functions with bounded minimum modulus, Subharmonic function analogues, Ann. of Math., t. 49, 1948, p. 200-213.
- [8] HEINS (Maurice H.). - On the Denjoy-Carleman-Ahlfors theorem, Ann. of Math., t. 49, 1948, p. 533-537.
- [9] LELONG (Mme J.). - Propriétés des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 226, 1948, p. 1161-1163.
- [10] LELONG (Mme J.). - Quelques applications de la théorie de potentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 226, 1948, p. 1333-1335.
- [11] NEVANLINNA (Rolf). - Eindeutige analytische Funktionen. - Berlin, Julius Springer, 1936 (Die Grundlehren der math. Wiss., Band 46).

⁽³⁾ Ces trois mémoires ont été précédés par divers autres, en particulier [3] et [5]. L'auteur y étudie le comportement de $m^*(r, f) = \sup_{r \leq \rho \leq 1} \min |f(\rho e^{i\theta})|$.

Si $f(z)$ est analytique et $|f(z)| < 1$ pour $|z| < 1$: $\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) \log m^*(r, f)$ existe, les limites 0 et $-\infty$ correspondant respectivement au produit de Blaschke et à la constante 0.