ROGER GODEMENT

II. La transformation de Fourier dans le groupe complexe unimodulaire à deux variables

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 13, p. 75-81

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__75_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1949)

II. LA TRANSFORMATION DE FOURIER DANS LE GROUPE COMPLEXE UNIMODULAIRE A DEUX VARIABLES.

par Roger GODEMENT

[d'après GELFAND et NEUMARK [1]]

On renvoie au premier exposé pour les formules fondamentales d'intégration, ainsi que pour la construction des représentations unitaires irréductibles. Un renvoi tel que (I, (187.524)) signifiera ici : se reporter au premier exposé formule (187.524).

Dans le présent exposé, il s'agira du groupe à <u>deux</u> variables : matrices

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

de déterminant <u>un</u> ; les sous-groupes Z , Z' , K , K' , Δ (I, n^os 1,2,3,4,5) ont ici pour éléments génériques :

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} ; \quad z' = \begin{pmatrix} 1 & z' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad k = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} ; \quad k' = \begin{pmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ 0 & k'_{22} \end{pmatrix} ; \quad \delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} .$$

La fonction $\beta(g)$ (I, (1)) se réduit ici à $\beta(g) = |g_{22}|^4$.

Si χ est un caractère de Δ , on le prolonge à G tout entier en posant (I, (41)) $\chi(g) = \chi(\delta)$ pour $g = z'\delta z$; ceci étant, on obtient comme suit les représentations irréductibles construites dans (I, n° 10) : soit $\mathcal{H}_Z$ l'espace des fonctions de carré sommable sur le sous-groupe Z ; on réalise G comme sous-groupe de transformations de Z en posant, pour $z \in Z$ et $g \in G$: $zg = k'.T_g z$; on a alors une représentation irréductible dans $\mathcal{H}_Z$ en prenant un caractère χ de Δ et en posant

(1)
$$U_{\chi;g} f(z) = \beta^{-\frac{1}{2}}(zg) . \chi(zg) . f(T_g z) .$$

On va montrer dans cet exposé comment la représentation <u>régulière</u> de G se décompose en les représentations irréductibles (1).

---

[1] GELFAND (I.M.) et NAJMARK [NEUMARK] (M.A.). - Unitarnye predstavlenija gruppy Lorenca, Izvestija Akad. Nauk SSSR., Série math., t. 11, 1947, p. 411-504.

1. Opérateurs de composition.

On désigne par L l'ensemble des fonctions continues et à support compact sur G, par L^1 l'ensemble des fonctions sommables, par L^2 l'ensemble des fonctions de carré sommable sur G. Muni du produit de composition

(2) $$x * y(g) = \int x(gg_1^{-1}).y(g_1).d\mu(g_1),$$

L^1 devient une algèbre.

Toute représentation unitaire de G conduit à une représentation de L^1 en particulier, (1) conduit à la représentation qui associe, à $x \in L^1$, l'opérateur

(3) $$U_{\chi;x} = \int U_{\chi;g}.x(g).\, d\mu(g).$$

On va expliciter ces opérateurs. Pour $f \in \mathcal{H}_Z$ et $x \in L^1$, on aura

(4) $$U_{\chi;x}f(z) = \int x(g)\beta^{-\frac{1}{2}}(zg)\, \chi(zg)\, f(T_g z)\, d\mu(g) ;$$

prolongeons f à G en posant $f(k'z) = f(z)$; il vient

(5) $$U_{\chi;x}f(z) = \int x(g)\beta^{-\frac{1}{2}}(zg)\, \chi(zg)\, f(zg)\, d\mu(g)$$

d'où, en utilisant (I, (21)) et par des calculs simples, la formule

(6) $$U_{\chi;x}f(z) = \int K_{\chi;x}(z, z_1)f(z_1)d\mu(z_1)$$

où le "noyau" $K_{\chi;x}$ est donné par

(7) $$K_{\chi;x}(z, z_1) = \int x(z^{-1}k'z_1)\beta^{-\frac{1}{2}}(k')\, \chi(k')d\mu(k') ;$$

les opérateurs de composition en question sont donc des opérateurs intégraux.

2. Propriétés des noyaux.

a. Si $x \in L$ est nulle en dehors d'un compact $A \subset G$, les $z \in Z$ tels que $z^{-1}K'z$ rencontre A forment dans Z un compact ; d'après (7), il s'ensuit que $K_{\chi;x}(z, z)$ est nulle en dehors d'un compact de Z, et est continue ; on peut donc définir la trace de l'opérateur $U_{\chi;x}$ par la formule classique

(8) $$Sp(U_{\chi;x}) = \int K_{\chi;x}(z, z)\, d\mu(z).$$

b. Si l'on applique le raisonnement précédent à la fonction $\tilde{x} * x$, pour laquelle $U_{\chi;\tilde{x}*x} = U^*_{\chi;x}U_{\chi;x}$, on constate immédiatement que

(9) $$Sp(U_{\chi;\tilde{x}*x}) = \iint |K_{\chi;x}(z_1, z_2)|^2\, d\mu(z_1)d\mu(z_2) < +\infty ;$$

donc, pour $x \in L$, les opérateurs $U_{\chi;x}$ sont dans la classe d'Hilbert-Schmidt.

c. Comme L est partout dense dans L^1, il s'ensuit que les opérateurs de composition associés, dans les représentations irréductibles construites, aux fonctions sommables, sont complètement continus.

3. Où l'on montre quelques nouvelles formules d'intégration.

a. Par l'application $(z', \delta) \rightarrow z'^{-1} \delta z'$, K' est recouvert une fois par $Z' \times \Delta$ en calculant le déterminant fonctionnel de cette application, on est conduit à la formule suivante :

$$\int f(k')\, d\mu_{\ell}(k') = \iint f(z'^{-1} \delta z')\, \beta^{\frac{1}{2}}(\delta)\, |\lambda - \lambda^{-1}|^2\, d\mu(\delta)\, d\mu(z') . \tag{10}$$

b. La même méthode appliquée à l'application $(z, z', \delta) \rightarrow z^{-1}.z'^{-1}.\delta.z'z$ (compte-tenu du fait que, cette fois, G est recouvert deux fois, à l'exception d'une sous-variété négligeable) conduit à la formule

$$\int x(g)\, d\mu(g) = \frac{1}{2} \iiint x(z^{-1}\, z'^{-1} \delta\, z'z)\, |\lambda - \lambda^{-1}|^4\, d\mu(\delta)\, d\mu(z)\, d\mu(z') \tag{11}$$

c. On a de même

$$\int x(g)\, d\mu(g) = \frac{1}{2} \iiint x(z^{-1} \delta\, z'z)\, \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\, |\lambda - \lambda^{-1}|^2\, d\mu(\delta)\, d\mu(z)\, d\mu(z') \tag{12}$$

4. Caractères des représentations irréductibles.

Les formules (7) et (8) donnent

$$Sp(U_{\chi;x}) = \iint x(z^{-1}k'z)\, \beta^{-\frac{1}{2}}(k')\, \chi(k')\, d\mu_{\ell}(k')\, d\mu(z) \quad ; \tag{13}$$

D'après (10) il vient donc

$$Sp(U_{\chi;x}) = \iiint x(z^{-1} z'^{-1} \delta\, z'z)\, \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)\, \chi(\delta)\, |\lambda - \lambda^{-1}|^2\, d\mu(\delta)\, d\mu(z)\, d\mu(z') \tag{14}$$

ce qui, en tenant compte de (12), conduit à

$$Sp(U_{\chi;x}) = \int x(g) . \frac{\chi(g) + \overline{\chi(g)}}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^2} . d\mu(g) . \tag{15}$$

On est donc conduit à considérer la fonction $2\,\Re\chi(g) . \,|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^{-2}$; elle est définie presque partout sur G, de type positif et invariante par les automorphismes intérieurs de G ; d'après (15), cette fonction joue le rôle de caractère de la représentation (χ) de G, et la formule (15) est rigoureusement conforme à celles de la théorie des groupes compacts, par exemple.

COROLLAIRE. - Si χ_1 et χ_2 sont des caractères de Δ ni égaux ni conjugués, les représentations irréductibles correspondantes sont non équivalentes.

5. Calculs pénibles pour arriver en vue du théorème de Plancherel.

Soit $x \in L$; d'après (9), la fonction $K_{\chi;x}(z_1, z_2)$ est de carré sommable sur le groupe abélien $Z \times Z$; on va lui infliger une transformation de Fourier, et introduire la fonction

(16) $$\hat{K}_{\chi;x}(w_1, w_2) = \iint K_{\chi;x}(z_1, z_2).\exp[-2\pi i R(w_1 z_1 + w_2 z_2)].\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2),$$

laquelle s'écrit en vertu de (7)

(17) $$\hat{K}_{\chi;x}(w_1, w_2) = \iiiint x(z_1^{-1}\delta z' z_2)\,|\lambda|^2.\chi(\delta).\exp[-2\pi i R(w_1 z_1 + w_2 z_2)].\, d\mu(\delta)\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2)\, d\mu(z').$$

Ceci fait, on prend sur G de nouveaux paramètres

(18) $$p_1 = g_{11}/g_{12} \;;\; p_2 = 1/g_{12} \;;\; p_3 = g_{22}/g_{12},$$

et on pose $x(g) = x(p_1, p_2, p_3)$. Dans (17) intervient l'élément $g = z_1^{-1}\delta z' z_2$; ses paramètres sont, en fonction de ceux de z_1, z_2, z', δ, donnés par

(19) $$p_1 = z'^{-1} + z_2 \;;\; p_2 = z'^{-1}\chi^{-1} \;;\; p_3 = z'^{-1}\lambda^{-2} - z_1.$$

Posant $d\mu(p_i) = dp_i \overline{dp_i}$, on tire de là que, pour λ donné, on a

(20) $$d\mu(z_1)d\mu(z_2)d\mu(z') = |p_2|^{-4}\, d\mu(p_1)d\mu(p_2)d\mu(p_3),$$

ce qui, par des calculs divers, conduit à

(21) $$\hat{K}_{\chi;x}(w_1, w_2) = \iiiint x(p_1, p_2, p_3).\exp\{-2\pi i.R[w_2 p_1 + (w_1\lambda^{-1} - w_2\lambda)p_2 - w_1 p_3]\}.\chi(\delta).|p_2|^{-4}.d\mu(p_1)d\mu(p_2)d\mu(p_3)d\mu(\delta).$$

6. La formule de Plancherel sur G.

La formule (21) conduit à introduire la transformée de Fourier

(22) $$X(u_1, u_2, u_3) = \iiint x(p_1, p_2, p_3).\exp[-2\pi i R(p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3)].\, |p_2|^{-4}.d\mu(p_1)d\mu(p_2)d\mu(p_3),$$

au moyen de laquelle (21) s'écrit

(23) $$\hat{K}_{\chi;x}(w_1, w_2) = \int X(w_2, w_1\lambda^{-1} - w_2\lambda, -w_1).\chi(\delta).d\mu(\delta).$$

Or, il se trouve que l'on a, d'une manière générale

$$(24)\qquad \int x(g)d\mu(g) = \iiint x(p_1\,,\,p_2\,,\,p_3)\,|p_2|^{-6}.d\mu(p_1)d\mu(p_2)d\mu(p_3)\ ,$$

et donc

$$(25)\quad \int |x(g)|^2 d\mu(g) = \iiint x(p_1\,,\,p_2\,,\,p_3)\,|p_2|^{-4}\,\overline{x(p_1\,,\,p_2\,,\,p_3)}\,|p_2|^{-2}.\ d\mu(p_1)d\mu(p_2)d\mu(p_3)\ ;$$

si alors on tient compte de la formule

$$(26)\quad X''_{u_2\bar{u}_2}(u_1\,,\,u_2\,,\,u_3) = -\pi^2\iiint x(p_1\,,\,p_2\,,\,p_3)\,|p_2|^{-2}.\exp[-2\pi i R(p_1u_1 + \ldots)].\ d\mu(p_1)\ldots$$

on a, en appliquant le théorème habituel de Plancherel :

$$(27)\quad \int |x(g)|^2\,d\mu(g) = \pi^{-2}\iiint X(u_1\,,\,u_2\,,\,u_3)X''_{u_2\bar{u}_2}(u_1\,,\,u_2\,,\,u_3)d\mu(u_1)d\mu(u_2)d\mu(u_3).$$

D'autre part, on voit facilement que

$$(28)\quad \lambda\bar{\lambda}\,\frac{d^2}{d\lambda\,d\bar{\lambda}}\,X(w_2\,,\,w_1\lambda^{-1} - w_2\lambda,\,-w_1)$$

$$= |\lambda^{-1}w_1 + \lambda w_2|^2\,X''_{u_2\bar{u}_2}(w_2\,,\,w_1\lambda^{-1} - w_2\lambda\,,\,-w_1);$$

en faisant le changement de variables

$$(29)\qquad u_1 = w_2\ \ ;\ \ u_2 = w_1\lambda^{-1} - w_2\lambda\ \ ;\ \ u_3 = -w_1\ ;$$

la formule (27) donne alors

$$(30)\quad \int |x(g)|^2\,d\mu(g) = \iiint X(w_2\,,\,w_1\lambda^{-1} - w_2\lambda\,,\,-w_1)\ \times$$

$$\times\ \overline{\lambda\bar{\lambda}\frac{d^2}{d\lambda\,d\bar{\lambda}}\,X(w_2\,,\,w_1\lambda^{-1} - w_2\lambda,\,-w_1)}\ d\mu(\delta)d\mu(w_1)d\mu(w_2)\ \ ;$$

écrivant alors explicitement le caractère χ de Δ sous la forme

$$(31)\qquad \chi(\delta) = \chi_{n,\rho}(\delta) = |\lambda|^{n+i\rho}.\,\lambda^{-n}\ \ ,$$

on voit que la transformée de Fourier per rapport à λ de la fonction (28) est, en tenant compte de (23), $-(n^2 + \rho^2)\hat{K}_{\chi;x}(w_1\,,\,w_2)$; (30) et Plancherel sur Δ donnent alors la formule

$$(32)\ \int |x(g)|^2 d\mu(g) = \pi^{-2}\iiint |\hat{K}_{\chi;x}(w_1\,,\,w_2)|^2\,d\mu(w_1)d\mu(w_2).(n^2 + \rho^2)d\mu(\chi)\ ,$$

où $d\mu(\chi)$ désigne la mesure de Haar sur le groupe dual de Δ . En appliquant maintenant Plancherel, cette fois sur $Z \times Z$, il vient la <u>formule de Plancherel</u>

pour le groupe G .

(33) $\int |x(g)|^2 d\mu(g) = \pi^{-2} \iiint |K_{\chi;x}(z_1 , z_2)|^2 \, d\mu(z_1) d\mu(z_2).(n^2 + \rho^2) d\mu(\chi)$

ou encore, en tenant compte de (9)

(34) $$\int x(g)\overline{y(g)} d\mu(g) = \frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{+\infty} Sp(U_{\chi_{n,\rho};x} U^*_{\chi_{n,\rho};y}) \, (n^2 + \rho^2) d\rho \ .$$

(Le coefficient $1/8\pi^4$ provient du choix de la mesure de Haar ; notons aussi que, les fonctions de ρ qui interviennent ici étant paires, on s'est borné à intégrer de 0 à $+\infty$, ce qui introduit encore un coefficient 2).

7. Formule d'inversion de Fourier.

Si l'on introduit la fonction $f = x * \tilde{y}$, la formule précédente s'écrit

(35) $$f(e) = \frac{1}{8\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} Sp(U_{\chi_{n,\rho};f}).(n^2 + \rho^2) d\rho \ ;$$

en faisant subir à f une translation, on obtient plus généralement

(36) $$f(g) = \int Sp(U_{\chi;g} U_{\chi;f}) \, d\chi \ ,$$

où l'on désigne par $d\chi$ la mesure $1/8\pi^4(n^2 + \rho^2) dn d\rho$ (cette mesure joue le rôle de mesure de Haar sur le "dual" de G). En explicitant cette formule, on est donc conduit au résultat suivant : si l'on pose

(37) $$K_{\chi;f}(z_1 , z_2) = \iint f(z_1^{-1} \delta z' z_2) \beta^{-\frac{1}{2}} (\delta) \chi(\delta) \, d\mu(\delta) \, d\mu(z')$$

on a inversement

(38) $$f(g) = \iint \beta^{-\frac{1}{2}}(zg) \, \overline{\chi(zg)} \, K_{\chi;f}(z , T_g z) d\mu(z) d\chi .$$

Cette formule n'est démontrée ici que pour le produit de composition de deux fonctions à support compact, mais on peut l'étendre au cas d'une fonction quelconque de carré sommable (auquel cas les relations écrites ne sont valables que presque partout).

8. Décomposition de la représentation régulière en somme continue.

Reprenons la formule

(39) $$K_{\chi;x}(z_1 , z_2) = \int x(z_1^{-1} k' z_2) \beta^{-\frac{1}{2}}(k') \chi(k') d\mu_\ell(k')$$

et remplaçons-y la fonction x par la fonction $y(g) = x(gg_0)$; il vient, par un calcul simple

(40) $$K_{\chi;y}(z_1\ ,\ z_2) = \beta^{-\frac{1}{2}}(z_2g_0)\ \overline{\chi(z_2g_0)}\ K_{\chi;x}(z_1\ ,\ T_{g_0}z_2)\ .$$

Pour z et χ donnés, associons alors à chaque $x \in L$ la fonction

(41) $$x_{z;\chi}(z_1) = K_{\chi;x}(z\ ,\ z_1)\ \ ;$$

la formule (40) montre que, si l'on note V_g l'opérateur de translation à droite de g (dans l'espace L^2 du groupe G), l'application $x \rightarrow x_{z;\chi}$ transforme V_g en l'opérateur $U_{\chi;g}$ défini dans $\mathcal{H}_z$ par la formule (1) ; en tenant compte des formules (9) et (34) on obtient alors

(42) $$(V_g x\ ,\ y) = \iint (U_{\chi;g}x_{z;\chi}\ ,\ y_{z;\chi})\ d\mu(z)d\chi,$$

ce qui constitue une décomposition de la représentation régulière suivant les représentations unitaires $\{\mathcal{H}_z\ ;\ U_{\chi;g}\}$ considérées.

Enfin, les résultats précédents permettent de montrer que, pour que les représentations irréductibles définies (au moyen de (1)) par deux caractères de Δ soient équivalentes, il faut et il suffit que ces deux caractères soient identiques ou conjugués (on a vu au n° 4 que la condition était nécessaire). Il s'ensuit qu'on peut établir une correspondance biunivoque entre ces représentations et les "caractères" qu'on leur a associés au n° 4 , conformément au cas des groupes compacts, et contrairement au cas de la plupart des groupes discrets infinis. De ce point de vue, le groupe complexe unimodulaire a donc un comportement assez "normal".

Par contre, une différence essentielle avec le cas des groupes compacts se présente ; comme on le montrera dans un 3e exposé, il existe d'autres représentations unitaires irréductibles que celles qu'on fait intervenir jusqu'ici dans l'étude de la représentation régulière. GELFAND et NEUMARK consacrant à leur étude 55 pages de leur mémoire, on comprendra qu'il serait utopique de vouloir les exhiber ici (la difficulté est, non pas de les fabriquer, mais de montrer qu'il n'y en a pas d'autres, et d'arriver à décomposer toute représentation unitaire de G).