BERNARD MALGRANGE

Fonctions moyenne-périodiques

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 97, p. 425-431
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__425_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1954)

FONCTIONS MOYENNE-PÉRIODIQUES

par Bernard MALGRANGE.

(d'après J.P. KAHANE [1])

La majeure partie de cet exposé sera consacrée à la démonstration, donnée par KAHANE au début de sa thèse [1], des principaux résultats de SCHWARTZ sur les fonctions moyenne-périodiques.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables d'une variable, et $\mathcal{E}'$, son dual, l'espace des distributions à support compact. La convolution munit $\mathcal{E}'$ d'une structure d'algèbre ; les idéaux fermés de $\mathcal{E}'$ sont les sous-espaces fermés invariants par translation ; leurs orthogonaux sont les sous-espaces fermés de $\mathcal{E}$ invariants par translation.

La transformation de FOURIER : $\mu \to \langle \mu , e^{-2\pi i x \lambda} \rangle = \mathcal{F}(\mu)(\lambda)$ $(\mu \in \mathcal{E}')$ établit un isomorphisme entre $\mathcal{E}'$ et l'espace $\mathfrak{A}$ des fonctions analytiques entières de type exponentiel à croissance lente sur l'axe réel (théorème de Paley-Wiener-Schwartz). A la convolution dans $\mathcal{E}'$ correspond la multiplication ordinaire dans $\mathfrak{A}$.

On appelle exponentielle-polynome une fonction de la forme $P(x)e^{2\pi i \lambda x}$ où P est un polynome.

PROBLÈME. - Tout sous-espace fermé V de $\mathcal{E}$, invariant par translation, est-il engendré par les exponentielles-polynomes qu'il contient ? (Synthèse spectrale dans $\mathcal{E}$).

Nous allons montrer que la réponse est affirmative.

Soit f une fonction de $\mathcal{E}$, $\mathcal{T}(f)$ le sous-espace fermé invariant par translation engendré par f. Il suffit de résoudre le problème pour les sous-espaces de $\mathcal{E}$ qui sont de la forme $\mathcal{T}(f)$.

DÉFINITION 1. - Si $\mathcal{T}(f) \neq \mathcal{E}$, f est appelée une fonction moyenne-périodique.

Dire que f est moyenne-périodique équivaut à dire qu'il existe une distribution à support compact $\mu \neq 0$ qui vérifie $\mu * f = 0$.

Considérons alors une décomposition de f : $f = f^+ + f^-$ où f^+ appartient à $\mathcal{D}'$ et à son support limité à gauche, f^- appartient à $\mathcal{D}'$ et à son support limité à droite : $\mu * f^+ = -\mu * f^- = \nu$ est une distribution à support compact.

DÉFINITION 2. - La fonction méromorphe $\dfrac{\mathfrak{F}(\nu)}{\mathfrak{F}(\mu)}$ sera appelée une transformée de Carleman de la fonction moyenne-périodique f et notée $\mathfrak{F}'(f)$.

Si l'on prend une autre distribution à support compact μ' qui vérifie $\mu' * f = 0$, on aura $\mu' * f^+ = \nu'$ d'où $\mu * \nu' = \nu * \mu' = \mu * \nu * f$, d'où $\dfrac{\mathfrak{F}(\nu')}{\mathfrak{F}(\mu')} = \dfrac{\mathfrak{F}(\nu)}{\mathfrak{F}(\mu)}$: la définition ne dépend pas de μ .

Si nous prenons une autre décomposition de f : $f = f_1^- + f_1^+$ qui vérifie les mêmes conditions, $\mu * f_1^+ = \nu_1 = \nu + \mu * (f_1^+ - f^+)$. Comme $f_1^+ - f^+$ est à support compact, nous voyons que : $\dfrac{\mathfrak{F}(\nu_1)}{\mathfrak{F}(\mu)} - \dfrac{\mathfrak{F}(\nu)}{\mathfrak{F}(\mu)} = \mathfrak{F}(f_1^+ - f^+)$ est une fonction entière : la transformée de Carleman n'est donc pas invariante mais sa partie polaire est bien définie.

Le théorème fondamental affirme que cette partie polaire détermine f :

THÉORÈME 1. - Si une fonction moyenne-périodique f a pour transformée de Carleman une fonction entière, f est nulle.

Pour démontrer le théorème 1, on utilise le lemme suivant :

LEMME. - Soient μ et ν deux distributions à support compact telles que $\dfrac{\mathfrak{F}(\nu)}{\mathfrak{F}(\mu)}$ soit entière. Quel que soit le polynome $P(x)$, il existe une distribution à support compact ν_P telle que $P(x)\mu * \nu = \mu * \nu_P$.

Il suffit de démontrer le lemme pour $P(x) = x$ (on procède ensuite par récurrence).

Cela revient à démontrer que la fonction entière $\dfrac{M'(\lambda)}{M(\lambda)} N(\lambda)$ appartient à $\mathcal{A}$. (on pose $\mathfrak{F}(\mu) = M$, $\mathfrak{F}(\nu) = N$)

or, on peut écrire :

$$\frac{M'(\lambda)}{M(\lambda)} = \frac{a}{\lambda} + b + \sum \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i}\right) = \frac{a}{\lambda} + b - \sum \frac{\lambda}{\lambda_i^2} + \lambda^2 \sum \frac{1}{(\lambda - \lambda_i)\lambda_i^2}$$

$\sum \dfrac{1}{|\lambda_i|^2} = A < +\infty$ car M est une fonction d'ordre 1.

$\left|\frac{N(\lambda)}{\lambda-\lambda_i}\right| \leqslant \max_{|\lambda'-\lambda| \leqslant 2} |N(\lambda')|$ quel que soit λ_i (module maximum)

d'où $\left|\frac{M'(\lambda)}{M(\lambda)} N(\lambda)\right| \leqslant [\,|a| + |b| + |\lambda|^2 A + |\lambda| A\,] \max_{|\lambda'-\lambda| \leqslant 2} |N(\lambda')|$

et le lemme s'ensuit immédiatement.

D'après le théorème des supports, les ν_p ont leurs supports dans un intervalle fixe. On applique le lemme à μ tel que $\mu * f = 0$ et $\nu = f^+ * \mu$. On peut supposer que μ est indéfiniment différentiable (si $\mu * f = 0$; $\alpha * \mu * f = 0$, α fonction indéfiniment différentiable à support compact, et $\alpha * \mu$ est indéfiniment différentiable).

Alors $\mu * \nu_p = P(x)\ \mu * \nu = P(x)\ \mu * \mu * f^+$. Toutes les distributions qui interviennent ont leur support limité à gauche : le thèorème des supports montre que : $\nu_p = P(x)\ \mu * f^+$ et aussi $\nu_p = -P(x)\ \mu * f^-$, d'où $P(x)\ \mu * f = 0$.

Soit a tel que $\mu(a) \neq 0$; on choisit une suite de polynomes : $P_i(x)$ qui tendent vers $\frac{1}{\mu(a)}\ \delta_{(a)}$ sur un voisinage du support de μ. Alors $P_i(x)\mu \to \delta_a$ dans $\mathcal{E}'$ donc, $\tau_a f = 0$, d'où $f = 0$.

C.Q.F.D.

2. Théorèmes généraux.

DÉFINITION 3. - On appelle spectre de f l'ensemble des pôles de $\mathfrak{F}'(f)$ (comptés avec leur ordre de multiplicité).

PROPOSITION 1. - Soit f une fonction moyenne-périodique ; pour que $P(x)\, e^{2\pi i \lambda x}$ ($P(x)$ étant un polynome de degré n) appartienne à $\mathcal{T}(f)$, il faut et il suffit que λ appartienne au spectre de f avec un ordre de multiplicité au moins égal à $n+1$.

On peut supposer pour la démonstration que $\lambda = 0$.

Supposons que $\mathfrak{F}'(f)$ ait un pôle d'ordre $n+1$ à l'origine ; soit μ une distribution à support compact orthogonale à $\mathcal{T}(f)$; la symétrique $\check{\mu}$ de μ par rapport à l'origine vérifie $\check{\mu} * f = 0$; donc $\mathfrak{F}(\check{\mu})\ \mathfrak{F}'(f)$ est une fonction entière, $\mathfrak{F}(\check{\mu})$ a un zéro d'ordre $n+1$ au moins à l'origine, donc $\langle x^k, \mu \rangle = 0$ $(0 \leq k \leqslant n)$; donc $x^k \in \mathcal{T}(f)^{\perp\perp} = \mathcal{T}(f)$.

Réciproquement, supposons que $P(x)$ appartienne à $\mathcal{T}(f)$. On peut choisir μ tel que $\mu * f = 0$, $\nu = \mu * f^+$ et $\mathfrak{F}(\nu)$ ne s'annule pas à l'origine (on remplace éventuellement μ et ν par μ_1 et ν_1 avec $\mathfrak{F}(\mu) = \lambda^k\, \mathfrak{F}(\mu_1)$,

$\mathcal{F}(\nu) = \lambda^k \mathcal{F}(\nu_1)$; on a encore $\mu_1 * f^+ = \nu_1)$. On a $\mu * P(x) = 0$, donc $\mathcal{F}(\mu)$ s'annule au moins $n + 1$ fois à l'origine et $\mathcal{F}'(f)$ a un pôle d'ordre au moins $n + 1$.

Nous pouvons maintenant donner la réponse au problème posé :

THÉORÈME 2. - La fonction moyenne-périodique f est limite dans $\mathcal{E}$ de combinaisons linéaires des exponentielles-polynomes contenues dans $\mathcal{T}(f)$.

Soit σ une distribution à support compact ; $\sigma * f \in \mathcal{T}(f)$, donc $\sigma * f$ est moyenne-périodique. Une transformée de Carleman de $\sigma * f$ est $\mathcal{F}(\sigma)\,\mathcal{F}'(f)$ (en décomposant : $\sigma * f = \sigma * f^+ + \sigma * f^-$) .

D'après le théorème 1, pour que $\sigma * f = 0$, il faut et il suffit que $\mathcal{F}(\sigma)$ s'annule sur le spectre de f .

En appliquant la proposition 1 : pour que $\sigma * f = 0$, il faut et il suffit que $\sigma * P(x)\, e^{2\pi i \lambda x} = 0$ quand $P(x)\, e^{2\pi i \lambda x} \in \mathcal{T}(f)$; ou encore pour que $\check{\sigma} \in \mathcal{T}(f)^{\perp}$ il faut et il suffit que $\langle \check{\sigma} , P(x)\, e^{2\pi i \lambda x} \rangle = 0$ quand $P(x)\, e^{2\pi i \lambda x} \in \mathcal{T}(f)$.

C.Q.F.D.

On peut préciser ce résultat :

THÉORÈME 3. - Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$, invariant par translation, $V \neq \mathcal{E}$. Les exponentielles-monômes de V forment une base de V. Par rapport à ces exponentielles-monômes, toute fonction f de V admet un développement formel $f \sim S_{j,k}\, a(\lambda_j, k) x^k e^{2\pi i \lambda_j x}$ déterminé explicitement par la partie polaire de $\mathcal{F}'(f)$. Si ce développement formel est nul, f est nulle. Si une somme d'exponentielles-monômes de V tend vers f sur un intervalle assez grand (pour la convergence uniforme des fonctions ainsi que de toutes leurs dérivées), les coefficients de cette somme tendent vers ceux du développement formel de f .

Soit μ une distribution à support compact telle que $\check{\mu} \in V^{\perp}$, et soit a la longueur du plus petit intervalle contenant le support de μ ; on peut supposer que $\mathrm{supp}(\mu) \subset [0 , a]$.

Pour toutes les fonctions moyenne-périodiques, nous prendrons comme décomposition : $f^+ = Yf$, $f^- = (1 - Y)f$ (Y : fonction de Heaviside).

Soit f une fonction de V :

$$\mu * f^+ = - \mu * f^- = \nu \text{ et } \nu \text{ a son support dans } [0 , a] .$$

Soit $\sum_p$ une somme d'exponentielles monômes de V ; $\mu * \sum_p^+ = \sigma_p$.

Si $\sum_p$ tend vers f sur l'intervalle $[-\varepsilon, a+\varepsilon]$, σ_p tendra vers ν, donc la partie polaire de $\mathcal{F}'(\sum_p)$ tendra vers la partie polaire de $\mathcal{F}'(f)$.

Si $\sum_p = \sum a_p(\lambda_j, k)\, x^k e^{2\pi i \lambda_j x}$, la partie polaire de $\mathcal{F}(\sum_p)$ est :

$$\left\{ \frac{a_p(\lambda_j, k)\, k\,!}{[2\pi i(\lambda_j - \lambda)]^{k+1}} \right\} \qquad \text{(calcul immédiat)}$$

En prenant pour f une exponentielle-monôme de V, on voit que les exponentielles-monômes forment un système libre dans V (et même un système libre sur tout intervalle de longueur $> a$). Elles forment donc une base de V ; le reste du théorème suit immédiatement.

REMARQUE. – La même théorie peut se faire dans $\mathcal{D}'$ (espace des distributions), $\mathcal{C}$ (espace des fonctions continues).

3. Quelques propriétés des fonctions moyenne-périodiques.

L'introduction des transformées de Carleman de fonctions moyenne-périodiques permet de résoudre certains problèmes difficilement abordables autrement. Voici un exemple :

THÉORÈME 4. – Soit f une fonction de L^∞, moyenne-périodique (dans $\mathcal{D}'$). Son spectre est réel et simple, les coefficients de son développement sont bornés par $\|f\|$, et f est une distribution presque-périodique.

Soit μ tel que $\mu * f = 0$, et soit $\mu * f^+ = \nu$ ($f^+ = Yf$). Soit

$$G(\lambda) = \int_0^{+\infty} f^+(x) e^{-2\pi i \lambda x}\, dx ,$$

$G(\lambda)$ est une fonction définie pour $\mathcal{I}\lambda < 0$, et l'on a $\mathcal{F}(\mu)\, G(\lambda) = \mathcal{F}(\nu)$, d'où $\mathcal{F}'(f) = G(\lambda)$. De même, si $\mathcal{I}\lambda > 0$: $\mathcal{F}'(f) = -\int_{-\infty}^{0} f(x) e^{-2\pi i \lambda x}\, dx$.

Par suite : $|\mathcal{F}'(f)(\lambda)| \leqslant \dfrac{\|f\|}{2\pi|\mathcal{I}\lambda|}$ d'où résulte immédiatement que le spectre de f est réel et simple et que les coefficients de son développement formel sont bornés par $\|f\|$.

$f \sim a_0 + \mathop{S}\limits_{\lambda_j \neq 0} a_j\, e^{2\pi i \lambda_j x}$. Une primitive seconde de $f - a_0$ est moyenne-périodique et a pour développement formel :

$$f_2 \sim \mathop{S}_{\lambda_j \neq 0} \frac{a_j}{(2\pi i \lambda_j)^2} e^{2\pi i \lambda_j x} .$$

Comme $\sum \frac{1}{|\lambda_i|^2} < +\infty$, ce développement est absolument convergent : sa somme f_2 est donc une fonction presque périodique. Alors $f = a_0 + f_2''$ est une distribution presque périodique.

Terminons en donnant sans démonstration deux théorèmes de prolongement. Soit Λ une suite de nombres complexes (non nécessairement tous distincts) I un intervalle fermé. On appelle $\mathcal{E}_I$ l'espace des fonctions continues sur I et $\mathcal{E}_I(\Lambda)$ l'espace des fonctions limites uniformes sur I de sommes d'exponentielles-monômes de Λ .

THÉORÈME 5 (LEONTIEV-KAHANE). - Si Λ est une suite symétrique s'accumulant angulairement sur l'axe réel, et si $I > 2\pi$ dans max Λ , toute fonction de $\mathcal{E}_I(\Lambda)$, analytique sur I , se prolonge en une fonction de $\mathcal{E}_R(\Lambda)$ analytique sur R .

Appelons moyenne-période d'une suite Λ la borne supérieure $L(\Lambda)$ des intervalles I sur lesquels $\mathcal{E}_I(\Lambda) = \mathcal{E}_I$, et moyenne-période d'une fonction moyenne-périodique f , la moyenne-période L_f du spectre de f .

Pour toute suite Λ , on a $L(\Lambda) \geqslant 2\pi$ dans max Λ (LEVINSON).

COROLLAIRE. - Si Λ est une suite symétrique s'accumulant angulairement sur l'axe réel, on a $L(\Lambda) = 2\pi$ dans max Λ . (Hypothèse de Schwartz).

Sinon, il existerait un intervalle I avec $\mathcal{E}_I(\Lambda) = \mathcal{E}_I$, et auquel le théorème 5 s'appliquerait ; en particulier, toute fonction analytique sur I se prolongerait en une fonction analytique sur toute la droite, ce qui est absurde.

THÉORÈME 6. - Soit f une fonction moyenne-périodique, analytique sur toute la droite, et soit Λ son spectre ; f se prolonge analytiquement en $\bar{f}$ dans une bande horizontale B du plan complexe (éventuellement un demi-plan ou le plan entier) telle que sur tout segment de longueur L_f de la frontière de B , il y ait au moins une singularité de $\bar{f}$; et $\bar{f}$ $\mathcal{E}_B(\Lambda)$.

(Beaucoup plus difficile que le théorème 5).

BIBLIOGRAPHIE

[1] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 5, 1953-54, p. 39-130 (Thèse Sc. math. Paris. 1954).

ADDITIF

On trouvera une démonstration très simple et plus élémentaire du théorème 1 dans :

KOOSIS (Paul). - Note sur les fonctions moyenne-périodiqnes, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 357-360.

[Otobre 1957]