SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES-LOUIS LIONS

Espaces de Beppo-Levi et quelques applications

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 117, p. 169-181

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__169_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1955)

ESPACES DE BEPPO-LEVI ET QUELQUES APPLICATIONS

par Jacques-Louis LIONS

Introduction. - Le point de départ de l'étude des espaces de Beppo-Levi (en abrégé BL) est le principe de Dirichlet (cf. COURANT [7]) dont voici un énoncé imprécis :

Soit Ω ouvert de R^n, connexe, de frontière Ω^* ; on donne une fonction φ sur Ω^* ; désignons par E l'espace des fonctions f définies sur Ω, une fois continûment différentiables dans Ω, f continue dans $\bar{\Omega}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$; parmi les $f \in E$, égales à φ sur Ω^*, il existe (avec les hypothèses "convenables" sur Ω^* et φ) une fonction h et une seule, rendant minimum $\int_\Omega |\text{grad } f|^2 \, dx$. Cette fonction est harmonique dans Ω.

Il est naturel de chercher à remplacer, dans l'énoncé précédent, l'espace E par l'espace des distributions sur Ω, dont le gradient est de carré sommable sur Ω (d'où la notion de $BL(\Omega)$ (cf. n° 1)). Le problème principal est alors de donner un sens précis au principe de Dirichlet.

Les résultats que l'on va donner peuvent (au moins en partie) être généralisés dans deux directions :

a. en opérant sur une variété convenable, au lieu d'un ouvert de R^n ;

b. en s'intéressant au cas Δ^m, $m > 1$, au lieu de Δ. On va seulement ici considérer le cas $\Omega \subset R^n$ et Δ.

1. Espaces $BL(\Omega)$. Premières propriétés.

Soit donc Ω ouvert connexe de R^n ; on désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur Ω, à valeurs complexes, muni de la topologie habituelle [17]. Son dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω. On désigne par $L^2(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur Ω.

DÉFINITION 1.1. - On appelle espace de Beppo-Levi sur Ω, et on désigne par $BL(\Omega)$, l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \qquad \text{pour tout } i = 1, \dots, n .$$

L'espace $BL(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(S\ ,\ T)_1 = \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\ ,\ \frac{\partial T}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)}\ , \qquad S\ ,\ T \in BL(\Omega)\ .$$

On pose :

$$\|S\|_1 = \sqrt{(S,S)_1}\ .$$

Comme Ω est connexe, $\|S\|_1 = 0$ équivaut à S = constante. L'espace séparé associé à $BL(\Omega)$ est donc

$$BL^o(\Omega) = BL(\Omega)/C\ , \qquad C = \text{corps des constantes complexes.}$$

Du théorème de de Rham résulte aussitôt :

THÉORÈME 1.1. - L'espace $BL^o(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Propriétés locales des distributions de $BL(\Omega)$.

Pour l'étude locale des $T \in BL(\Omega)$ on utilise le procédé de la paramétrix de SCHWARTZ ([17], tome II, p. 39). Soit P une paramétrix de

$$\Delta P = \xi + \delta\ , \qquad \xi \in \mathcal{D}(R^n)\ , \qquad \delta = \text{masse de Dirac,}$$
$$P = A/|x|^{n-2} \quad (n \geqslant 3) \qquad \text{avec } A \in \mathcal{D}(R^n) = \text{constante}$$

convenable au voisinage de 0 . L'étude locale de T se ramène à l'étude locale de produits de compositions du type :

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} * f\ , \qquad f \in L^2(R^n) \qquad \text{à support compact.}$$

(Si $n = 2$, $\log|x|$ au lieu de $|x|^{2-n}$). Un résultat de SOBOLEV [19] donne alors

THÉORÈME 1.2. - Si $T \in BL(\Omega)$, alors T est presque partout égale à une fonction localement de puissance q-ième sommable sur Ω , avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ si $n \geqslant 3$; si $n = 2$, fonction localement L^r , pour tout r fini.

REMARQUE 1.1. - Le produit de composition $\frac{\partial P}{\partial x_i} * f$ a les mêmes propriétés locales que $\frac{1}{r^{n-1}} * f$. Or, au voisinage de 0 , $\frac{1}{r^{n-1}}$ est dans L^λ , pour tout λ tel que $\lambda < \frac{n}{n-1}$, donc $\frac{1}{r^{n-1}} * f$ est localement dans L^{q_1} avec $\frac{1}{q_1} > \frac{1}{q}$ $(n \geqslant 3)$.

Le point qui n'est pas trivial du tout est que l'on peut prendre $q_1 = q$.

Voici le raccord avec la définition initiale de Beppo-Levi :

THÉORÈME 1.3. (NIKODYM pour l'essentiel). - Pour que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ soit dans $BL(\Omega)$, il faut et il suffit que ce soit une fonction presque partout égale à une fonction absolument continue sur presque toutes les parallèles à chacun des axes de coordonnées et que ses dérivées (usuelles) soient dans $L^2(\Omega)$.

On peut maintenant revenir au principe de Dirichlet. On donne φ sur Ω^* supposons qu'il existe $\Phi \in BL(\Omega)$, "égale" dans un sens à préciser à φ sur Ω^*. Une généralisation du principe de Dirichlet pourrait être : Parmi les $f \in BL(\Omega)$ telles que $f - \Phi$ soit "nul" sur Ω^*, il existe une fonction h unique rendant $||f||_1$ minimum ; cette fonction est harmonique.

Pour donner un sens à " $f - \Phi$ nul sur Ω^* ", on est conduit à ceci : on considère $\mathcal{D}(\Omega)$, et sur $\mathcal{D}(\Omega)$ la structure $(\varphi, \psi)_1$ induite par $BL(\Omega)$, on munit ainsi $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une structure pré-hilbertienne séparée ; il est naturel d'introduire le complété :

DÉFINITION 1.2. - On désigne par $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ l'espace de Hilbert complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la structure $(\varphi, \psi)_1$.

On va étudier cet espace.

2. Espace $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$.

Il y a deux cas assez différents, selon que $n \geqslant 3$ ou $n = 2$.

Si $n \geqslant 3$, on désigne par $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ l'espace des $u \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, tels que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, espace muni de sa topologie naturelle d'espace de Banach. Alors :

THÉORÈME 2.1. - Si $n \geqslant 3$, $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ coïncide avec l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ (en particulier, $\hat{\mathcal{D}}^1(R^n) = \mathcal{E}^1_{q,2}(R^n)$).

En effet, grâce au résultat cité de SOBOLEV, il existe une constante S telle que

$$||\varphi||_{L^q} \leq S\, ||\varphi||_1 \text{ , pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ ,}$$

d'où le théorème.

Si $n = 2$, la situation est moins simple car $\hat{\mathcal{D}}^1(R^2)$ ne peut être identifié à un sous-espace de $\mathcal{D}'(R^2)$. Il s'agit alors de voir pour quels ouverts Ω, on peut identifier $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Pour cela, il faut utiliser la notion d'*ensemble polaire* (ou de capacité extérieure nulle).

Voici *une* définition des ensembles polaires, valable avec n quelconque. On désigne par $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ l'espace des $u \in L^2(\Omega)$ tels que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, muni de sa topologie naturelle d'espace de Hilbert ; par $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$; par $\mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$ le dual de $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$:

$$T \in \mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega) \Leftrightarrow T = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i \,, \qquad f_0 \,,\, f_i \in L^2(\Omega) \,.$$

Ceci posé, un ensemble *fermé* F *de* R^n *est polaire si la seule distribution* $T \in \mathcal{D}'^1_{L^2}(R^n)$, *de support* $\subset F$, est $T = 0$. On voit assez facilement que cette notion coïncide avec la notion usuelle. Ceci posé, on peut montrer le

THÉORÈME 2.2. - *Si* $n = 2$, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ *puisse être identifié à un sous-espace de* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *est que* $\complement\Omega$ *soit non polaire*.

(Ω = ouvert greenien dans la terminologie de BRELOT-CHOQUET [5] ; la démonstration du théorème précédent peut être faite sans utilisation de la fonction de Green).

3. *Principe et problème de Dirichlet*.

On désigne par $\hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega)$ le dual de $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ (lorsque $n = 2$ et que l'on parle de $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$, on suppose *toujours* que $\complement\Omega$ est non polaire) ;

$$T \in \hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega) \Leftrightarrow T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i \,, \qquad f_i \in L^2(\Omega) \,.$$

Le résultat suivant est immédiat :

THÉORÈME 3.1. - *L'opérateur* Δ *définit un isomorphisme de* $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ *sur* $\hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega)$.

On désigne par $G(\Omega) = G$ l'opérateur inverse de $-\Delta$:

$G \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega) \,;\, \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega))$;

G *est l'opérateur de Green* de l'ouvert Ω. Grâce au théorème des noyaux de Schwartz, cet opérateur est défini par *une distribution* $G(x\,,\,y)$ sur $\Omega_x \times \Omega_y$; *c'est le noyau de Green*. Comme toute distribution T est indéfiniment différentiable là où ΔT est indéfiniment différentiable, $G(x\,,\,y)$ *est indéfiniment différentiable pour* $x \neq y$; elle est symétrique. L'opérateur G peut être prolongé par continuité en un opérateur, encore noté G , avec

$$G \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega) + \mathcal{E}'(\Omega) \; ; \; \hat{\mathcal{D}}^{1}(\Omega) + \mathcal{E}'(\Omega)) \; .$$

($\mathcal{E}(\Omega)$ = fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support quelconque, topologie habituelle ; $\mathcal{E}'(\Omega)$ = dual de $\mathcal{E}(\Omega)$ = distributions à support compact sur Ω ; $\hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega) + \mathcal{E}'(\Omega)$ = dual de $\hat{\mathcal{D}}^{1}(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$ muni de la topologie borne supérieure, etc.). On a :

$$G(x\, ,\, y) = G(\delta_x(y))\, , \qquad \delta_x(y) = \text{masse 1 au point } y \; ;$$

$$-\Delta_x G(x\, ,\, y) = \delta_x(y)\; .$$

On voit donc que <u>tout ouvert Ω de</u> R^n , $n \geqslant 3$, possède une fonction de Green. Si $n = 2$, les ouverts de complémentaire non polaire ont seuls une fonction de Green.

Ceci posé, considérons l'opérateur (évidemment dépendant de Ω)

$$P = G \circ (-\Delta) \tag{1}$$

sur l'espace $BL(\Omega)$; comme $\Delta \in \mathcal{L}(BL(\Omega)\; ;\; \hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega))$, on a :

$$P \in \mathcal{L}(BL(\Omega)\; ;\; \hat{\mathcal{D}}^{1}(\Omega))$$

et P est un <u>projecteur</u> de $BL(\Omega)$ sur $\hat{\mathcal{D}}^{1}(\Omega)$:

Tout élément Φ de $BL(\Omega)$ peut s'écrire :

$$\Phi = P\Phi + (1 - P)\Phi \; .$$

La fonction $P\Phi = u$ est dans $\hat{\mathcal{D}}^{1}(\Omega)$; si $(1 - P)\Phi = h$, on a $Ph = 0$, i.e. $G(-\Delta h) = 0$, donc $\Delta h = 0$; <u>Désignons par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace des $T \in BL(\Omega)$ qui sont harmoniques</u>. On a obtenu :

$$\Phi = u + h\, , \qquad u \in \hat{\mathcal{D}}^{1}(\Omega)\, , \qquad h \in \mathcal{H}(\Omega)\; . \tag{2}$$

Comme $\hat{\mathcal{D}}^{1}(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega) = \{0\}$, la décomposition (2) est unique et donc

THÉORÈME 3.2. – <u>Toute distribution $\Phi \in BL(\Omega)$ admet une décomposition unique de la forme</u> (2). <u>On a</u> $(u\, ,\, h)_1 = 0$.

<u>Principe de Dirichlet</u>. – C'est ceci : Parmi les $f \in BL(\Omega)$ telles que $f - \Phi \in \hat{\mathcal{D}}^{1}(\Omega)$, il existe une fonction h unique rendant $\|h\|_1$ minimum. Cette fonction est harmonique. La fonction h vaut $(1 - P)\Phi$.

Il nous reste maintenant à interpréter la condition " $f - \Phi \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ " ce que l'on fera par trois méthodes. Les deux premières utilisent des résultats de théorie du potentiel newtonien. La troisième utilise des propriétés de croissance globale des $f \in BL(\Omega)$.

REMARQUE 3.1. - Le problème de Dirichlet (variante de [12], [18]) est par définition le suivant : trouver U dans $BL(\Omega)$, solution de

(3) $$-\Delta U = T , \qquad T \text{ donné dans } \hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega) ,$$

avec

(4) $$h - U \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega) , \quad h \text{ donné dans } BL(\Omega) \quad (\text{mod } \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega))$$

(comme toujours, $\complement\Omega$ est non polaire si $n = 2$). Ce problème admet une solution unique.

$$U = (1 - P)h + GT$$

(Plus généralement, on peut chercher U dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ avec (3) et (4) h donné dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $\Delta h \in \hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega)$; il y a encore une solution unique).

REMARQUE 3.2. - On peut évidemment remplacer $(u , v)_1$ par tout autre produit scalaire équivalent, d'où aussitôt la résolution du problème de Dirichlet pour d'autres opérateurs différentiels elliptiques que $-\Delta$.

REMARQUE 3.3. - On a une décomposition voisine, plus élémentaire, et valable même si $\complement\Omega$ est polaire, $n = 2$, en remplaçant $-\Delta$ par $-\Delta + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, cf. SPENCER [20].

4. Méthode de prolongement de Deny.

Une fonction $f \in BL(\Omega)$ est dite BLD (D = DENY) (ou BL précisée) si

a. f est définie quasi-partout dans Ω (i.e. partout sauf sur un ensemble-polaire) ;

b. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe ω ouvert de capacité $< \varepsilon$ tel que la restriction de f à $\Omega - \omega$ soit continue (si $n = 2$, ceci est à vérifier sur tout $\Omega_1 \subset \Omega$, avec diamètre $\Omega_1 \leq 1$).

On rappelle que si K est un compact de R^n , sa capacité est $\sup K = \sup \mu(1)$, μ mesure ≥ 0 de support dans K , avec $(\frac{1}{r^{n-2}} \star \mu)(x) \leq 1$, $n \geq 3$.

THÉORÈME 4.1. - Toute $f \in BL(\Omega)$ est presque partout égale à une fonction f^* BLD dans Ω (cf. [8] et [11]).

Par le théorème 3.2 :

$f = u + h$, $u \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$, $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Donc h est dans $\mathcal{E}(\Omega)$. Il suffit donc de montrer le théorème pour $u \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$; mais $u = \lim \varphi_k$, $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$, dans $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ et on peut extraire de φ_k une suite convergeant quasi partout vers f^* du type BLD ; ce point résulte du lemme fondamental que voici :

LEMME 4.1. - Si $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, on a :

$$\operatorname{cap} E\left\{x \,\big|\, \|\varphi(x)\| \geq \alpha\right\} \leq c\,\frac{\|\varphi\|_1^2}{\alpha^2}\,, \qquad c = \text{Cte}\,.$$

Comme $u^* = u$ presque partout, on en déduit le théorème.

REMARQUE 4.1. - On peut montrer [9] et [11] que l'intégrale

$$\int \overrightarrow{\text{grad}}\, G(x\,,\,y).\overrightarrow{\text{grad}}\, u(y)\, dy$$

converge quasi partout dans Ω, définit une fonction $u^{**} \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ presque partout égale à u (formellement : $u = G(-\Delta u)$,

$$u(x) = \int_\Omega G(x\,,\,y)(-\Delta u(y))\, dy = \int_\Omega \overrightarrow{\text{grad}}\, G(x\,,\,y).\overrightarrow{\text{grad}}\, u(y)\, dy).$$

Topologie fine sur R^n (CARTAN [6]). - C'est la topologie la moins fine qui rende continues les fonctions sous harmoniques.

Un ensemble e est effilé en x_0 ($x_0 \in e$ ou non) s'il existe un voisinage fin V de x_0 tel que $V \cap e = \{x_0\}$ ou ϕ.

Un ensemble effilé en x_0 est très rare au point de vue métrique au voisinage de x_0 (cf. DENY, [10]). Une fonction F définie quasi partout au voisinage de x_0 admet en x_0 la pseudo limite $\ell < \infty$ s'il existe e effilé en x_0 tel que $\lim F(x) = \ell$, $x \to x_0$, $x \notin e$ (la fonction F est alors finement continue en x_0).

On peut alors montrer ceci :

THÉORÈME 4.2. - Soit $F \in BLD(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$ (de complémentaire non polaire si $n = 2$). Pour que F soit dans $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$, il faut et il suffit qu'elle admette la pseudo-limite 0 quasi partout à la frontière (et à l'infini si $n \geq 3$).

CONSÉQUENCE. – " $f - \Phi \in \hat{\mathcal{O}}^{1}(\Omega)$ " équivaut à : " $f^* - \Phi^*$ quasi partout pseudo-nulle à la frontière, f^* BLD presque partout égale à f, Φ^* idem ".

5. Méthode des radiales de BRELOT.

Soit toujours Ω, de complémentaire non polaire si $n = 2$. Soit $x_0 \in \Omega$ fixé, $G(x, x_0)$ la fonction de Green de pôle x_0. On appelle ([5], [2]) lignes de Green les intégrales de $\vec{dx} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, G = 0$ $(G = G(x, x_0))$. On montre qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que : par tout $y \in V$ passe une ligne de Green unique ; dans le sens des G croissants, cette ligne admet x_0 pour point limite, et une demi-tangente en x_0 ; réciproquement si ξ est un vecteur unitaire en x_0, il existe une ligne de Green unique admettant ξ comme demi-tangente en x_0. Donc : si $\mathcal{L}$ = ensemble des lignes de Green, il y a correspondance biunivoque entre $\xi \in S_{n-1}$ $(|\xi| = 1$ dans $\mathbb{R}^n)$ et $\ell(\xi)$ = ligne de Green de demi-tangente ξ en x_0. On munit $\mathcal{L}$ de la topologie telle que $\xi \to \ell(\xi)$ soit un homéomorphisme de S_{n-1} sur $\mathcal{L}$; on désigne par dg la mesure image de la mesure superficielle sur S_{n-1}, dg est la mesure de Green sur l'espace de Green $\mathcal{L}$. Désignons par Σ_λ la surface $G(x, x_0) = \lambda$; soit $\mathcal{L}_\lambda \subset \mathcal{L}$ l'ensemble des $\ell \in \mathcal{L}$ tels que ℓ rencontre Σ_λ ; on montre que $\mathcal{L}_\lambda$ est ouvert dans $\mathcal{L}$, de complémentaire de dg, mesure nulle.

Soit $u \in \mathcal{E}(\Omega) \cap BL(\Omega)$; on définit $R_\lambda(u)$, dg-presque partout sur $\mathcal{L}$, par $R_\lambda(u)(\ell) = u(\ell \cap \Sigma_\lambda)$, $\ell \in \mathcal{L}_\lambda$. La fonction $R_\lambda(u)$ est dans $L^1(\mathcal{L}\, ; dg) = L^1(\mathcal{L})$. Si $\lambda' > \lambda$, $R_{\lambda'}(u) \in L^1(\mathcal{L})$ et l'on a :

$$\text{(1)} \qquad \|R_\lambda(u) - R_{\lambda'}(u)\|_{L^1(\mathcal{L})} \leq c_1 \|u\|_1 \, \|G\|_{1,\lambda'}$$

où

$$\|f\|^2_{1,\lambda'} = \int_{G(x,x_0)<\lambda'} |\overrightarrow{\text{grad}}\, f|^2 \, dx$$

(La majoration (1) est le point fondamental ; on considère l'ensemble $E \subset \mathcal{L}$ des ℓ avec $R_\lambda(u) - R_{\lambda'}(u) > 0$. Si e_λ = ensemble des points de Σ_λ qui sont sur les lignes de Green qui appartiennent à E (définition analogue pour $e_{\lambda'}$), on a :

$$\int_E (R_\lambda(u) - R_{\lambda'}(u)\, dg = \int_{e_\lambda} u \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma - \int_{e_{\lambda'}} u \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma \;;$$

on transforme ensuite les intégrales superficielles en intégrales de volume). Il résulte de (1) que lorsque $\lambda \to 0$, $R_{\lambda}(u) \to R(u)$ dans $L^1(\mathcal{L})$.

DÉFINITION 5.1. - La fonction $R(u)$ est la radiale de $u \in \mathcal{E}(\Omega) \cap BL(\Omega)$. Si $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $R(u) = 0$. On ne change donc pas $E(u)$, $u \in \mathcal{E}(\Omega) \cap BL(\Omega)$, en remplaçant u par 0 au voisinage de x_0 ; de cette remarque et de (1) résulte :

$$(2) \quad \begin{cases} \|R(u)\|_{L^1(\mathcal{L})} \leq c_2 \|u\|_1 + c_3 \|u\|_{L^2(K)}, & u \in \mathcal{E}(\Omega) \cap BL(\Omega), \\ c_2, c_3 = \text{constantes}, & K = \text{compact fixe} \subset \Omega. \end{cases}$$

Mais de façon générale, si S, $T \in BL(\Omega)$, posons

$$(3) \qquad ((S, T)) = (S, T)_1 + (S, T)_{L^2(K)} .$$

Pour cette structure, $BL(\Omega)$ est un espace de Hilbert et l'espace $\mathcal{E}(\Omega) \cap BL(\Omega)$ est dense. Donc

THÉORÈME 5.1. - L'application $u \to R(u)$ de $\mathcal{E}(\Omega) \cap BL(\Omega) \to L^1(\mathcal{L})$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée $u \to R(u)$, de $BL(\Omega)$ muni de la structure (3) dans $L^1(\mathcal{L})$.

La fonction $R(u)$ s'appelle la radiale de u. On montre

THÉORÈME 5.2. - Le noyau de R est $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$.

CONSÉQUENCE. - " $f - \Phi \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ " $\Leftrightarrow$ " $R(f) = R(\Phi)$ "

REMARQUE 5.1. - On a : $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(\Omega) ; L^1(\mathcal{L}))$, $\mathcal{H}(\Omega)$ muni de (3), donc espace de Hilbert. L'application R est biunivoque, elle ne peut donc être sur. Il serait intéressant de caractériser $R(\mathcal{H}(\Omega)) = R(BL(\Omega))$.

6. Prolongement en moyenne.

La troisième méthode de prolongement utilise des résultats sur la croisssance globale des fonctions $BL(\Omega)$. On ne considère ici que l'aspect le plus simple de cette question (on laisse tomber les ouverts de SOBOLEV, cf. [11]).

Les distributions $T \in BL(\Omega)$ sont, rappelons-le, localement L^2, quel que soit n. Supposons pour simplifier Ω borné.

DÉFINITION 6.1. - L'ouvert Ω connexe borné est dit <u>ouvert de Nikodym</u> si toute distribution $T \in BL(\Omega)$ est dans $L^2(\Omega)$. On montre que tout ouvert limite par un nombre fini de surfaces à courbure bornée est un ouvert de Nikodym.

Si Ω est un ouvert de Nikodym, tout $T \in BL(\Omega)$ est dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$; le prolongement sur Ω^* des $T \in BL(\Omega)$ revient donc à celui des fonctions de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$. Pour le prolongement des $f \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, on a :

THÉORÈME 6.1. - <u>Soit</u> Ω <u>ouvert borné de frontière</u> Ω^* <u>variété une fois continûment différentiable de dimension</u> $n-1$. <u>Il existe une application linéaire continue et une seule,</u> $f \to \omega^*(f)$, <u>de</u> $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ <u>dans</u> $L^2(\Omega^*)$ (espace des fonctions de carré sommable sur Ω^* pour la mesure superficielle), <u>telle que</u> $\omega^*(f)$ <u>coïncide</u> (presque partout) <u>avec la restriction de</u> f <u>à</u> Ω^* <u>si</u> f <u>est continue dans</u> $\overline{\Omega}$.

On se ramène, par carte locale, à la propriété analogue pour une face d'un cube ; cela résulte alors de majorations élémentaires.

On montre en outre que, sous les conditions du théorème 6.1, si $f \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ avec $\omega^*(f) = 0$, alors $f \in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega) = \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ (Ω borné).

REMARQUE 6.1. - L'application ω^* n'applique pas $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ sur $L^2(\Omega^*)$. On ne connait pas, semble-t-il, de caractérisation convenable de l'image de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ (cf. toutefois NIKOL'SKIJ [15] et [16], LIONS [13]).

A l'aide du théorème 6.1, on définit, dans Ω non borné, de frontière une fois continûment différentiable de dimension $n-1$, le prolongement $\omega^*(T)$ ($T \in BL(\Omega)$), $\omega^*(T)$ étant localement de carré sommable sur Ω^*. La condition " $\Phi - f \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ " s'interprète : " $\omega^*(\Phi) = \omega^*(f)$ ".

Donnons pour terminer deux remarques liées à la notion d'ouvert de Nikodym (cf. pour détails DENY-LIONS [11]).

a. <u>Ouvert de Nikodym et inégalité de Poincaré</u>. - Soit Ω un ouvert connexe borné. Pour $f \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, posons

$$|||f|||^2 = ||f||^2_{L^2} + ||f||^2_1 \;;$$

comme Ω est borné, $C \subset \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$; posons

$$\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)^0 = \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)/C$$

et munissons $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)^0$ de la norme quotient :

$$\begin{cases} |||f^0|||^2 = \inf\limits_{c \in C} |||f + c|||^2 = ||f||_1^2 + \int_\Omega |f|^2 \, dx - \frac{1}{m(\Omega)} \left| \int_\Omega f \, dx \right|^2 \\ f^0 \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)^0 \ , \quad f \in f^0 \ , \quad m(\Omega) = \text{mesure de } \Omega \ . \end{cases}$$

Considérons l'application identique

(1) $$f^0 \to f^0$$

de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)^0 \to BL^0(\Omega)$; elle est évidemment biunivoque et continue. Alors " Ω ouvert de Nikodym" $\Leftrightarrow$ " application (1) sur

$$" \Leftrightarrow " \quad ||f^0||_1^2 \geq c_1 |||f^0|||^2 \ , \quad f \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega) \text{ "}, \quad \text{i.e.}$$

(2) $$\int_\Omega |f|^2 \, dx - \frac{1}{m(\Omega)} \left| \int_\Omega f \, dx \right|^2 \leq P(\Omega) \, ||f||_1^2 \ .$$

Donc

THÉORÈME 6.2. - <u>La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ouvert connexe borné soit un ouvert de Nikodym est qu'il existe une constante</u> $P(\Omega)$ <u>telle que</u> (2) <u>ait lieu pour tout</u> $f \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$.

L'inégalité (2) est <u>l'inégalité de Poincaré</u>.

b. <u>Ouvert de Nikodym et problème de Neumann.</u> - Soit encore Ω ouvert connexe borné ; par N l'espace des $u \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ tels que $\Delta u \in L^2$ et que

(3) $$(-\Delta u, v)_{L^2} = (u, v)_1 \quad \text{pour tout} \quad v \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega) \ ;$$

évidemment $\mathcal{D}(\Omega) \subset N$; l'espace N est un espace de Hilbert pour la norme dont le carré est $|||u|||_1^2 + ||\Delta u||^2_{L^2(\Omega)}$. Ce sera par définition l'espace des u de dérivée normale nulle sur Ω^* . Pour tout $u \in N$, on a

(4) $$\int_\Omega \Delta u \, dx = 0 \qquad (\text{faire } v = 1 \text{ dans } (3)).$$

Désignons par $L_0^2(\Omega)$ le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega)$ formé des f telles que

$$\int_\Omega f\,dx = 0\,. \tag{5}$$

On montre :

THÉORÈME 6.3. - <u>La condition nécessaire et suffisante pour que Δ applique</u> N <u>sur $L_0^2(\Omega)$ est que Ω soit un ouvert de Nikodym</u>.

L'espace N est introduit en vue de la résolution du problème de Neumann (cf. dans cette direction [14]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARONSZAJN (N.) and SMITH (K.T.). - Functional spaces and functional completion. - Lawrence, University of Kansas, 1954 (Technical Report 10).

[2] BRELOT (Marcel). - Etude et extensions du principe de Dirichlet, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 5, 1953-54, p. 371-419.

[3] BRELOT (Marcel). - Contributions to potential theory. - Lawrence, University of Kansas, 1955 (Technical Note 2).

[4] BRELOT (Marcel). - Sur l'allure des fonctions harmoniques et sous-harmoniques à la frontière, Math. Nachr., t. 4, 1951, p. 298-307.

[5] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). - Espaces et lignes de Green, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 3, 1951, p. 199-263.

[6] CARTAN (Henri). - Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiels, Bull. Soc. math. France, t. 73, 1945, p. 74-106.

[7] COURANT (R.). - Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces. - New York, Interscience, 1950 (Pure and applied Mathematics, vol. 3).

[8] DENY (Jacques). - Les potentiels d'énergie finie, Acta Math., t. 82, 1950, p. 107-183.

[9] DENY (Jacques). - Sur la convergence de certaines intégrales de la théorie du potentiel, Ark. der Math., t. 5, 1954, p. 367-370.

[10] DENY (Jacques). - Un théorème sur les ensembles effilés, Ann. Grenoble, t. 23, 1947-1948, p. 139-142.

[11] DENY (J.) et LIONS (J.-L.). - Les espaces de Beppo Levi, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 5, 1953-54, p. 304-370.

[12] GÅRDING (Lars). - Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. scand., t. 1, 1953, p. 55-72.

[13] LIONS (Jacques-Louis). - Sur les problèmes de dérivée oblique, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 2470-2472.

[14] LIONS (Jacques-Louis). - Sur certains problèmes aux limites, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 225-250.