PAUL JAFFARD

Anneaux d'Adèles

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 103, p. 23-33
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__23_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1954)

ANNEAUX D'ADÈLES D'APRÈS IWASAWA

par Paul JAFFARD

1. PF-corps, adèles et idèles.

On dit qu'un corps K est un PF-corps s'il est un corps algébrique de degré fini (cas algébrique) ou une extension algébrique du corps $k_0(t)$ des fonctions rationnelles à une variable à coefficients dans un corps (commutatif) k_0 (cas fonctionnel). Le PF-corps K sera dit spécial s'il est un corps algébrique ou si, dans le cas fonctionnel, k_0 est un corps fini.

K étant un PF-corps, nous aurons à considérer l'ensemble des valuations de K (qui, dans le cas fonctionnel induisent la valuation triviale sur le corps k_0). Nous écrirons ces valuations sous la forme multiplicative.

Soit v une telle valuation : on désigne par K_v le corps complété de K pour la topologie déduite de cette valuation et par $\overline{K}_v$ le corps résiduel correspondant dans le cas où v est une valuation non archimédienne.

Si v est une valuation archimédienne, il existe un isomorphisme σ de K_v sur le corps R des nombres réels ou le corps C des nombres complexes. Si à tout élément $x \in K$ on fait correspondre la valeur absolue $|\sigma(x)|$ dans le cas où K_v est isomorphe à R et le carré $|\sigma(x)|^2$ dans le cas où K_v est isomorphe à C , on voit que cette correspondance définit une valuation de K équivalente à v qui sera dite valuation normale.

Si v est une valuation non archimédienne, le corps résiduel $\overline{K}_v$ est un corps fini dans le cas arithmétique et une extension algébrique finie de k_0 dans le cas fonctionnel. On associe à la valuation v la valuation équivalente w ainsi définie :

1) Si K est un PF-corps spécial, on pose :

$$w(x) = (\text{nombre des éléments de } \overline{K}_v)^{-\mathrm{ord}_v x}$$

2) Si K est un PF-corps non spécial, on choisit une fois pour toutes un nombre $c > 1$ et on pose :

$$w(x) = \left[c^{[\overline{K}_v : k_c]} \right]^{-\mathrm{ord}_v x}$$

w sera encore dite valuation normale.

K étant un PF-corps, on considère l'ensemble $(v_\iota)_{\iota \in I}$ de toutes ses valuations normales et on pose $K_\iota = K_{v_\iota}$ et $\overline{K}_\iota = \overline{K}_{v_\iota}$.

On voit alors que si x est un élément de K , tous les nombres $v_\iota(x)$ $(\iota \in I)$ sont égaux à 1 sauf un nombre fini et que l'on a :

$$\prod_{\iota \in I} v_\iota(x) = 1$$

C'est la formule du produit d'Artin-Whaples [2] . ARTIN et WHAPLES ont montré en outre la réciproque de cette propriété. Plus précisément : Si on se donne un corps K et un ensemble $(v_\iota)_{\iota \in I}$ de valuations non équivalentes sur K tel que pour tout $x \in K$ les valeurs $v_\iota(x)$ soient égales à 1 sauf un nombre fini d'entre elles et que l'on ait $\prod_{\iota \in I} v_\iota(x) = 1$ alors K est un PF-corps et les valuations $(v_\iota)_{\iota \in I}$ (élevées s'il le faut à une puissance convenable) sont toutes les valuations normales du PF-corps K .

Soit une famille $(G_\iota)_{\iota \in I}$ de groupes topologiques séparés et pour chaque $\iota \in I$ un sous-groupe invariant ouvert H_ι de G_ι et G le groupe (non topologique) produit direct $\prod_{\iota \in I} G_\iota$. Soient G' et H les sous-groupes de G ainsi définis :

$x \in G' \rightleftarrows x_\iota \in H_\iota$ pour tous les $\iota \in I$ sauf un nombre fini.

$x \in H \rightleftarrows x_\iota \in H_\iota$ pour tous les $\iota \in I$.

G' sera dit produit direct local [4] des G_ι relativement aux H_ι s'il est muni de la topologie suivante (compatible avec sa structure de groupe) :

On munit $H = \prod_{\iota \in I} H_\iota$ de la topologie du produit direct et on prend comme système fondamental de voisinages de l'élément neutre dans G' un système fondamental de voisinages de l'élément neutre dans H . On définit de même le produit direct local des anneaux topologiques $(A_\iota)_{\iota \in I}$ relativement à des sous-anneaux ouverts $B_\iota \subset A_\iota$.

K étant un PF-corps et $(v_\iota)_{\iota \in I}$ l'ensemble de ses valuations normales, on désigne par O_ι l'anneau des entiers de K_ι si v_ι est non archimédienne et on pose $O_\iota = K_\iota$ si v_ι est archimédienne. On appelle alors anneau des adèles de K le produit direct local des anneaux K_ι relativement aux sous-anneaux O_ι . Les éléments de cet anneau A sont appelés adèles. Si $a \in A$ on pose pour tout $\iota \in I$: $v_\iota(a) = v_\iota(a_\iota)$.

On appelle idèles les éléments inversibles de l'anneau A . Nous désignerons par J le groupe multiplicatif des idèles qui sera muni de la topologie suivante :

J peut être considéré comme un groupe d'automorphismes de A si on associe à tout $a \in J$ l'automorphisme $x \to ax$ de A. Par suite J est un groupe topologique s'il est muni de la topologie de Birkhoff [4]. Un système fondamental de voisinages de 1 dans J est constitué par les sous-ensembles $W(C, U)$ tels que :

$$a \in W(C, U) \rightleftarrows \left\{x - ax , x - a^{-1}x \in U ; \forall x \in C\right\}$$

C parcourant les parties compactes de A et U les voisinages de 0 dans A. On peut voir que cette topologie est celle définie par WEIL [9] :

Soit U_ι le groupe des unités du corps K_ι si v_ι est archimédienne, U_ι = le groupe multiplicatif $K^*_\iota = C^*$ (des éléments non nuls de K_ι) si v_ι est archimédienne complexe et U_ι = le groupe des nombres réels positifs si v_ι est archimédienne réelle. Alors J est le produit direct local des groupes K^*_ι relativement aux sous-groupes U_ι.

Cette topologie n'est pas celle introduite par CHEVALLEY ([5]). Les propriétés arithmétiques du PF-corps K sont liées profondément aux propriétés topologiques de A et de J, en particulier lorsque K est un PF-corps spécial, c'est-à-dire tel que la théorie du corps de classe lui soit applicable.

Le but d'IWASAWA est de déduire les propriétés topologiques de A et de J de quelques propriétés facilement vérifiables de A (qui le caractérisemt) et d'obtenir à partir de là des résultats arithmétiques sur K.

2. V-anneaux.

On dit qu'un anneau topologique A est un V-anneau s'il vérifie les conditions suivantes :

1) A est un anneau commutatif, semi-simple, possédant un élément unité 1.
2) A est localement compact, mais n'est ni compact, ni discret.
3) A a un sous-corps K contenant 1, tel que K soit discret dans A et que l'espace quotient A/K soit compact.

K est alors appelé corps de base de l'anneau A.

IWASAWA montre l'identité des V-anneaux et des anneaux d'adèles des PF-corps spéciaux (le corps de base du V-anneau étant le PF-corps correspondant).

G étant un groupe localement compact et σ un automorphisme de G, on appelle norme de σ [4] la constante positive ainsi définie :

μ étant une mesure de Haar sur G, et μ' la mesure de Haar définie par $\mu'(E) = \mu(\sigma(E))$, on a $\mu' = k\mu$. Cette norme k ne dépend pas de μ. On la désigne par $N(\sigma, G)$.

Si H est un sous-groupe fermé de G tel que $\sigma(H) = H$, on a :

$$N(\sigma, G) = N(\sigma, G/H)\, N(\sigma, H),$$

A étant un anneau localement compact qui contient 1 et ξ un élément inversible de A, on note $N(\xi, A)$ la norme $N(\sigma, A)$ de l'automorphisme $\sigma : a \to \xi a$. Comme cet automorphisme laisse invariant chaque idéal à gauche fermé $\mathfrak{a}$ de A, on définit sans peine $N(\xi, \mathfrak{a})$ et $N(\xi, A/\mathfrak{a})$.

On a alors le :

LEMME 1. - Supposons que A ait un ensemble d'idéaux bilatères maximaux fermés $(M_\iota)_{\iota \in I}$ tel que $\bigcap_{\iota \in I} M_\iota = \{0\}$. Si ξ est un élément inversible de A, $N(\xi, A/M_\iota)$ est égale à 1 presque partout (sauf sur un sous-ensemble fini de I) et on a

$$N(\xi, A) = \prod_{\iota \in I} N(\xi, A/M_\iota).$$

On en déduit immédiatement le :

LEMME 2. - Si, dans les mêmes conditions que le lemme 1, $\exists\, \alpha \in I$ avec

$$N(\xi, A/M_\alpha) \neq 1,$$

alors $\exists$ un idéal bilatère fermé L de A tel que $A = M_\alpha \dot{+} L$.

Dans le cas où A est un anneau commutatif, A/M est un corps commutatif localement compact K et si $\xi \in K$, $(\xi \neq 0)$ $v(\xi) = N(\xi, K)$ est la valuation normale qui induit la topologie de K.

Soit A un V-anneau. Il résulte d'un travail de KAPLANSKY que la semi-simplicité de A implique que l'intersection de tous ses idéaux maximaux fermés se réduit à $\{0\}$.

A partir des hypothèses 2) et 3) on peut facilement montrer que A n'est pas un corps. On peut également voir que $\{0\}$ est le seul idéal compact de A et que A est le seul idéal ouvert de A.

Soit M un idéal maximal fermé de A. Puisque M n'est pas ouvert, A/M est un corps localement compact non discret. D'autre part l'image de K dans l'homomorphisme $A \to A/M$ est dense dans A/M. Par suite K contient un élément $\xi \neq 0$ tel que $N(\xi, A/M) \neq 1$ et, d'après le lemme 2, A est la somme directe de M et d'un idéal fermé K_M qui est un corps localement compact. On désigne par v_M la valuation normale correspondante de K_M. Si φ_M désigne la projection de A sur K_M et si $a \in A$, on pose encore $v_M(a) = v_M(\varphi_M(a))$. On voit que si a est un élément inversible de A , on a $v_M(a) = N(a\ ,\ A/M)$ et que v_M induit sur K une valuation. On peut voir que si M' est un autre idéal maximal fermé de A , les deux valuations v_M et $v_{M'}$ sont inéquivalentes.

Si $x \in K$, on a $N(x\ ,\ A) = N(x\ ,\ A/K)\ N(x\ ,\ K)$. Comme A/K est compact,

$$N(x\ ,\ A/K) = 1$$

et comme K est discret $N(x\ ,\ K) = 1$. Par suite $N(x\ ,\ A) = 1$. Si $(M_\iota)_{\iota \in I}$ désigne l'ensemble des idéaux maximaux fermés de A , il correspond à cet ensemble un ensemble $(v_\iota)_{\iota \in I}$ de valuations non triviales inéquivalentes de K , tel que, pour tout $x \in K$, on ait $v_\iota(x) = 1$ pour tout indice $\iota \in I$, sauf pour un nombre fini et tel que $\prod_{\iota \in I} v_\iota(x) = 1$.

Les résultats d'ARTIN et WHAPLES montrent alors que K est un PF-corps et que $(v_\iota)_{\iota \in I}$ est l'ensemble de toutes les valuations normales de K dans le cas arithmétique et l'ensemble de toutes les valuations de K triviales sur le corps des constantes dans le cas fonctionnel. Mais si ici on choisit un indice spécial $\alpha \in I$, puisque K_{v_α} est localement compact, le corps résiduel (s'il existe) est fini et, comme dans le cas fonctionnel, il doit comprendre le corps des constantes, on voit que K est un PF-corps spécial et que $(v_\iota)_{\iota \in I}$ désigne l'ensemble de toutes les valuations normales de K .

Pour montrer que A est l'anneau des adèles de K , il reste donc à montrer que A est le produit direct local des anneaux K_ι relativement aux sous-anneaux O_ι définis au paragraphe 1 . Nous laissons tomber ici cette partie de la démonstration.

Tout V-anneau est donc l'anneau des adèles d'un PF-corps spécial.

Pour montrer que, réciproquement, tout anneau d'adèles d'un PF-corps spécial K est un V-anneau, on commence par le montrer dans le cas où K est soit le corps Q des rationnels, soit le corps $k_o(t)$ des fonctions rationnelles sur un corps fini k_o :

Si $K = Q$, on voit immédiatement que l'anneau A des adèles est localement compact, commutatif, a un élément unité et tel que l'intersection de tous ses idéaux maximaux fermés soit égale à $\{0\}$, ce qui implique la semi-simplicité de A . Reste à montrer que K est un sous-corps discret de A et que A/K est compact.

Soit V l'ensemble de tous les adèles a tels que $a_\iota \in O_\iota$ si v_ι est une valuation non archimédienne et $v_\iota(a) \leq 1/2$ si v_ι est archimédienne. V est un voisinage compact de 0 dans A tel que $V \cap K = \{0\}$. Par suite K est discret dans A .

Pour montrer que A/K est compact, on montre que $A = K \dot{+} V$; soit $a \in A$. Si

v_ι est une valuation non archimédienne, a_ι est un nombre p-adique

$$a_\iota = \sum_{n\leqslant m<\infty} \alpha_{\iota,m}\, p^m$$

$\alpha_{\iota,m}$ étant l'un des nombres $0, 1, \dots, p-1$.
On appelle partie principale de a_ι le nombre :

$$a'_\iota = \sum_{n\leqslant m\leqslant -1} \alpha_{\iota,m}\, p^m \qquad \text{si } n<0$$

$$a'_\iota = 0 \qquad \text{si } n\geqslant 0$$

a'_ι est un nombre rationnel qui est égal à 0 sauf pour un nombre fini de coefficients ι. $\alpha' = \sum_{\iota\in I_0} a'_\iota$ (où I_0 indique l'ensemble des indices non archimédiens) est un nombre rationnel. Si on pose $\alpha = \alpha' + [\,|a| - \alpha' + 1/2\,]$ où $|a|$ désigne la valeur absolue de la composante archimédienne de a et $[t]$ le plus grand entier $\leqslant t$, on voit que $\alpha \in K$ et $a - \alpha \in V$.

L'anneau des adèles de Q est donc bien un V-anneau. On montrerait de la même manière que l'anneau des adèles de $k_0(t)$ (k_0 fini) est aussi un V-anneau.

Pour montrer que tout anneau des adèles d'un PF-corps spécial est un V-anneau il suffit maintenant de montrer que si A est un anneau de corps de base K et si K' est une extension algébrique de degré fini de K, le produit tensoriel sur K : $A' = A \otimes K'$ est un V-anneau ayant pour corps de base K' s'il est muni de la topologie suivante : $\omega_1, \dots, \omega_n$ étant une base de K' sur K, est encore une base de A' sur A. Elle détermine une correspondance biunivoque de A' sur A^n. On prend comme topologie sur A' l'image de la topologie habituelle de A^n. On voit facilement que A' vérifie les critères d'un V-anneau ayant pour corps de base K'. Seule la semi-simplicité demande une étude un peu approfondie.

3. Propriétés des V-anneaux.

Nous allons étudier maintenant certaines propriétés des V-anneaux, c'est-à-dire des anneaux d'adèles de PF-corps spéciaux.

K désigne un PF-corps spécial, A l'anneau d'adèles correspondant et $(v_\iota)_{\iota\in I}$ l'ensemble de toutes ses valuations normales. Si K a pour caractéristique 0 (cas arithmétique), on appelle valuations à l'infini de K ses valuations archimédiennes. Si K a une caractéristique non nulle (cas fonctionnel), on choisit un élément t de K transcendant sur le corps des constantes k_0 et on appelle valuations à l'infini de K celles pour lesquelles t a une valeur strictement supérieure à 1. On voit que dans les deux cas K a un nombre fini non nul r de valuations à l'infini. On note A_∞ le sous-anneau formé par tous les éléments de A dont les composantes finies sont nulles et par A_o le sous-anneau formé par tous les éléments dont les composantes infinies sont nulles. On a :

$$A = A_o \dot{+} A_\infty$$

Soit χ un caractère non nul du groupe additif A qui s'annule sur K. A tout élément a de A, on fait correspondre le caractère $\chi_a = \Psi(a)$ ainsi défini : $\chi_a(x) = \chi(ax)$.

On montre que Ψ définit un isomorphisme de groupe topologique du groupe A et de son dual $\hat{A}$.

Cette auto-dualité de A peut être mise en évidence en posant pour tout couple d'éléments $a, b \in A$: $\langle a, b \rangle = \chi(ab)$. L'annihilateur H' du sous-groupe fermé H de A est le groupe des caractères de A/H' et $(H')' = H$.

$\chi(K) = 0$ implique $K \subset K'$ et $KK' \subset K'$. La compacité de A/K montre que K' est discret et que K'/K est compact. Donc K'/K est fini et comme K' est un K-module, on a $K' = K$.

TATE a montré que l'<u>auto-dualité de</u> A <u>et</u> $K' = K$ jouent un rôle essentiel dans la théta-formule du corps K.

$\mathfrak{a}$ étant un idéal fermé de A, son annihilateur $\mathfrak{a}'$ est un autre idéal fermé tel que $A = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{a}'$. En particulier :

$$M' = K_M \qquad K_M' = M \qquad ; \qquad A_o' = A_\infty \qquad A_\infty' = A_o .$$

Nous allons maintenant montrer l'existence d'un élément ξ de K vérifiant certaines relations particulières :

soit U_1 le voisinage compact de 0 défini par :

$$a \in U_1 \rightleftarrows \left\{ v_\iota(a) \leqslant 1 \quad \forall \iota \in I \right\}$$

Soit un voisinage compact V de 0 tel que $V - V \subset U_1$ et supposons que a soit un élément inversible de A tel que $aU_1 \cap K = \{0\}$. Alors, quel que soit $b \in A$, l'ensemble $(aV) \cap (b + K)$ contient au plus un élément. Si μ, μ' et μ'' désignent les mesures de Haar respectives sur A, A/K et K, si f désigne la fonction caractéristique de aV dans A et $\bar{f}(P)$ la fonction caractéristique de l'image de aV dans A/K, on a :

$$\mu(aV) = \int_A f(x)\, dx = \int_{A/K} dP \int_K f(b + \xi)\, d\xi = \int_{A/K} \bar{f}(P)\, dP \leqslant \int_{A/K} dP = \mu'(A/K)$$

par conséquent :

$$N(a\ ,\ A)\,\mu(V) \leqslant \mu'(A/K) \qquad \text{ou} \qquad N(a\ ,\ A) \leqslant$$

$\delta = \mu'(A/K)/\mu(V)$ étant une constante positive indépendante de a. Par suite :

LEMME 3. - Si la norme $N(a\ ,\ A)$ de l'adèle inversible a est supérieure à une certaine constante $\delta > 0$, il existe un élément ξ non nul de K tel que

$$v_\iota(\xi) \leqslant v_\iota(a) \qquad \forall \iota \in I .$$

Ceci est l'équivalent du <u>théorème de Riemann</u> sur les fonctions algébriques.

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal fermé de A, $\mathfrak{b}$ l'idéal fermé $\mathfrak{a}'$ tel que $A = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. On pose $1 = e' + e''$ $(e' \in \mathfrak{a}\ ,\ e'' \in \mathfrak{b})$ et $\mathfrak{a}^* = J(\mathfrak{a}) + e''$ si $J(\mathfrak{a})$ désigne l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathfrak{a}$ (on a $J = J(A)$).

$\mathfrak{a}^*$ est un sous-groupe fermé de J qui est isomorphe à $J(\mathfrak{a})$ considéré comme groupe d'automosphismes du groupe additif $\mathfrak{a}$.

On définit de même $\mathfrak{b}^*$ et on voit que $J = \mathfrak{a}^* \times \mathfrak{b}^*$ (produit direct). En particulier si M est un idéal maximal fermé de A : $J = M^* \times K_M^*$ où K_M^* est le groupe multiplicatif du corps K_M. Sur K_M^* les deux topologies coïncident. On a aussi $J = J_o \times J_\infty$ avec $J_o = A_o^*$ et $J_\infty = A_\infty^* = K_1^* \times \dots \times K_r^*$. L'application $a \to N(a\ ,\ A)$ du groupe localement compact J dans le groupe multiplicatif des nombres réels > 0 est un homomorphisme de J sur R_+^* dans le cas arithmétique et un homomorphisme de J sur un sous-groupe discret de R_+^* dans le cas fonctionnel. Par suite si J_1 est le noyau de cet homomorphisme, J/J_1 est isomorphe suivant les cas au groupe additif des réels ou au groupe additif des entiers.

D'après la formule d'Artin-Whaples K^* est un sous-groupe discret de J_1 (la topologie des idèles étant plus fine que celle induite par les adèles).

THÉORÈME. - J_1/K^* <u>est compact</u>.

Soit $a_o \in J$ tel que $N(a_o\ ,\ A) > \delta$ (où δ a la signification donnée plus haut). Pour tout $a \in J_1$ on a $N(a^{-1}a_o\ ,\ A) > \delta$, donc $\exists\, \xi \in K^*$ tel que

$$v_\iota(\xi) \leqslant v_\iota(a^{-1}a_o)$$

pour tout $\iota \in I$, c'est-à-dire

$$a\xi \in a_o\, U_1$$

(U_1 étant toujours le sous-ensemble de A défini par : $a \in U_1 \rightleftarrows v_\iota(a) \leqslant 1$ pour tout $\iota \in I$).

On a donc $\xi \in a^{-1}a_o U_1 \cap K$.

$(a\xi)^{-1} \in J_1$ entraîne également l'existence de $\xi' \in K^*$ tel que $(a\xi)^{-1}\xi' \in a_o\, U_1$.

Donc $\xi' \in a_o^2\, U_1^{\iota}$. Mais $a_o^2\, U_1^2$ étant compact, K fermé et discret dans A , l'ensemble $a_o^2\, U_1^2 \cap K$ n'a qu'un nombre fini d'éléments $\xi_1 , \ldots , \xi_n$. Par suite $(a\xi)^{-1}$ est contenu dans l'un des ensembles $\xi_i^{-1} a_o U_1$. Donc si C est la réunion de $a_o U_1$ et des ensembles $\xi_i^{-1} a_o U_1$, on voit que $(a\xi)$, $(a\xi)^{-1} \in G$. Par suite si nous désignons par C' l'ensemble des éléments b de J_1 tels que b et $b^{-1} \in C$, nous avons $J_1 = K^* C'$.

C étant compact ,on peut montrer que C' est compact. Il en résulte alors le théorème.

Soit E le groupe des idèles dont toutes les composantes ont pour norme 1 ,

$$a \in E \rightleftarrows \{ v_{\iota}(a) = 1 \quad \forall \iota \in I \}$$

E est un sous-groupe compact de J_1 . Si on pose $E_o = E \cap J_o$ et $E_\infty = E \cap J_\infty$, on a $E = E_o \times E_\infty$.

E_o est un sous-groupe ouvert et compact de J_o . Posons en outre :

$$J_{\infty,1} = J_\infty \cap J_1 \quad \text{et} \quad H = (E_o \times J_\infty) \cap J_1 = E_o \times J_{\infty,1}$$

et considérons la suite de groupes :

$$J_1 \supset HK^* \supset EK^* \supset K^*$$

E étant compact et K^* fermé, EK^* est fermé dans J_1 . Comme $E_o \times J_\infty$ est ouvert dans J , H et HK^* sont des sous-groupes ouverts de J_1 . La compacité de J_i/K^* entraîne celles de J_1/HK^* et de HK^*/EK^* ; mais HK^* étant ouvert dans J_1 , le groupe J_1/HK^* est discret, donc fini.

$$J_1/HK^* = J_1/K^* \; [\, (E_o \times J_\infty) \cap J_1 \,]$$

est isomorphe à

$$J_1(E_o \times J_\infty)/K^*(E_o \times J_\infty) = J/K^*(E_o \times J_\infty)$$

qui est lui-même isomorphe au groupe des classes d'idéaux de K .

Par suite dans un PF-corps spécial, les classes d idéaux sont en nombre fini.

Supposons maintenant que K soit un corps de nombres. Alors $J_\infty \cong R^{*^{r_1}} \times C^{*^{r_2}}$. L'isomorphisme $H/E \cong J_{\infty,1}/E_\infty$ montre que H/E est isomorphe à l'espace vectoriel R^{r-1} avec $r = r_1 + r_2$.

Les isomorphismes :

$$HK^*/EK^* \cong H/E(H \cap K^*) \quad \text{et} \quad E(H \cap K^*)/E \cong H \cap K^*/E \cap K^*$$

montrent que $H/E(H \cap K^*)$ est compact, et $E(H \cap K^*)/E$ est discret. Dånc, dans la suite :

$$H \supset E(H \cap K^*) \supset E$$

le groupe $H/E(H \cap K^*)$ est compact, $E(H \cap K^*)/E$ est discret et H/E est isomorphe à R^{r-1}. Il s'ensuit que $E(H \cap K^*)/E$ est un groupe abélien libre à $r - 1$ générateurs ([3], chapître 7). Il en est donc de même de $H \cap K^*/E \cap K^*$. Mais $H \cap K^*$ est le groupe multiplicatif des unités du corps K et $E \cap K^*$ est le groupe des racines de l'unité contenues dans le corps K. Par suite nous obtenons le :

THÉORÈME de Dirichlet : K étant un corps algébrique fini, le groupe des unités du corps K est le produit direct du groupe des racines de l'unité du corps K et d'un groupe abélien libre à $r_1 + r_2 - 1$ générateurs.

Un raisonnement analogue pourrait être fait dans le cas fonctionnel..

TATE s'est servi de la compacité de J_1/K^* pour démontrer la première inégalité du corps de classes.

4. V'-anneaux.

On peut généraliser certaines de ces propriétés à des anneaux d'adèles ayant pour corps de base un PF-corps non spécial en remplaçant la notion de compacité par celle de compacité linéaire d'un espace vectoriel [8]. Pour tout automorphisme d'un espace linéairement compact S sur un corps F, IWASAWA définit une norme qui a des propriétés analogues à celles de la norme d'un automorphisme d'un groupe localement compact. Un V'-anneau est un anneau topologique A satisfaisant aux conditions suivantes :

1') A est un anneau compact, semi-simple, possédant un élément unité 1.

2') A est un espace vectoriel sur un sous-corps F, il est localement linéairement compact, mais n'est ni linéairement compact ni discret.

3') A a un sous-corps K contenant F tel que K soit discret dans A et que l'espace quotient A/K soit linéairement compact.

K est encore appelé corps de base de A.

IWASAWA montre l'identité des V'-anneaux et des anneaux d'adèles d'un PF-corps fonctionnel. Le corps de base K du V'-anneau est le PF-corps et le sous-corps F le corps des constantes.

L'anneau des adèles d'un PF-corps spécial de caractéristique 0 est donc à la fois un V-anneau et un V'-anneau.

Un V'-anneau est encore auto-dual à condition de considérer uniquement ses caractères linéaires (prenant leurs valeurs dans F). Quant au lemme 3, il est précisé par le théorème de Riemann-Roch que l'on peut déduire des propriétés topologiques du V'-anneau.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions, I. - Princeton University, New-York University, 1950-1951.

[2] ARTIN (E.) and WHAPLES (G.). - Axiomatic characterisation of fields by the product formula for valuations, Bull. Amer. math. Soc., t. 51, 1945, p. 469-492.

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Livre III : Topologie générale, Chapîtres 5 à 8. - Paris, Hermann, 1947 (Actualités scient. et ind. n° 1029 ; Eléments de Mathématique 5).

[4] BRACONNIER (Jean). - Sur les groupes topologiques localement compacts, J. Math. pures et appl., t. 27, 1948, p. 1-85.

[5] CHEVALLEY (Claude). - La théorie du corps de classes, Annals of Math., Series 2, t. 41, 1940, p. 394-418.

[6] CHEVALLEY (Claude). - Class field theory. - Nagoya, Nagoya University, 1953-1954.

[7] IWASAWA (Kenkichi). - On the ring of valuation vectors, Annals of Math., Series 2, t. 57, 1953, p. 331-356.

[8] LEFSCHETZ (Solomon). - Algebraic topology. - New-York, American mathematical Society, 1942 (Amer. math. Soc. Colloquium Publications, n° 27).

[9] WEIL (André). - Sur la théorie du corps de classes, J. math. Soc. Japan, t. 3, 1951, p. 1-35.

[10] WEIL (André). - Conférences faites à l'Ecole Normale Supérieure (Hiver 1953).