A. KOLMOGOROV

Dimension linéaire des espaces vectoriels topologiques

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 165, p. 393

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__393_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1958)

DIMENSION LINÉAIRE DES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

par A. KOLMOGOROV

On considère des fonction $d(E)$, où E est un espace vectoriel topologique et $d = d(E)$ est un élément d'un ensemble $\mathfrak{O}$ semi-ordonné. Pour avoir quelque analogie avec la dimension ordinaire, il est naturel de supposer que les deux conditions suivantes sont remplies :

(α) $d(E_1) \leq d(E)$, si E est isomorphe à un sous-espace linéaire fermé de E ;

(β) $d(E_1) \leq d(E)$, s'il existe un opérateur linéaire continu T ,

$$TE = E_1 \quad .$$

Dans la théorie de dimension linéaire de Banach, on admet seulement la condition (α) . La théorie devient plus simple et plus logique, si l'on admet aussi la condition (β) . Comme dans le cas de Banach, il existe une fonction dimensionnelle $\delta(E)$ la plus forte dans le sens où pour chaque autre fonction $d(E)$ de

$$d(E') < d(E) \ .$$

il s'ensuit

$$\delta(E') < \delta(E) \quad .$$

L'étude directe de la fonction $\delta(E)$ ne semble pas être toujours assez simple. Quelquefois, la fonction dimensionnelle suivante peut être utile :

$d_a(E)$ est la classe de fonctions $\varphi(\varepsilon)$ définies pour $\varepsilon > 0$, telles que pour chaque compact $K \subseteq E$ et chaque voisinage $\mathcal{U}$ du zéro dans E , il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que, quel que soit $\varepsilon < \varepsilon_0$, on peut trouver n points

$$x_1 , x_2 , \dots , x_n \quad (n \leq \varphi(\varepsilon))$$

dans E avec la propriété

$$K \subseteq \bigcup_{1 \leq m \leq n} (\varepsilon \mathcal{U} + x_m) \ .$$

L'ordre dans $\mathfrak{O}_a = \{d_a\}$ est inverse de l'inclusion :

$$d_a \leq d'_a \ , \text{ si } \ d'_a \subseteq d_a \ .$$
