FRANÇOIS BRUHAT

Travaux de Harish-Chandra

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. nº 143, p. 85-93
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__85_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1957)

TRAVAUX DE HARISH-CHANDRA ([8], [9], [10])

par François BRUHAT.

1. Les <u>notations</u> sont en général les mêmes que celles de [11], [2] et [6].

$\mathfrak{g}_0$ est une algèbre de Lie réelle <u>simple</u>, <u>non compacte</u>, $\mathfrak{g}$ sa complexifiée, $\mathfrak{G}$ le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{G}_0$ le sous-groupe engendré par $\mathfrak{g}_0$. Si $\mathfrak{b}_0$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_0$, automatiquement $\mathfrak{b}$ désignera sa complexifiée dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{B}_0$) le sous-groupe engendré par $\mathfrak{b}$ (resp. $\mathfrak{b}_0$).

$\mathfrak{g}_u$ = forme compacte de $\mathfrak{g}$ invariante par le semi-automorphisme θ de $\mathfrak{g}$ défini par $\mathfrak{g}_0$; $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_u$; $\mathfrak{p}_0 = \{iX ; X \in \mathfrak{g}_u , \theta(X) = -X$. On sait que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ (somme directe). On désignera par $\mathfrak{U}$ le sous-groupe engendré par $\mathfrak{g}_u$ (sous-groupe compact maximal de $\mathfrak{G}$).

On suppose que le <u>centre</u> $\mathfrak{c}_0$ de $\mathfrak{k}_0$ est de <u>dimension</u> $\neq 0$. On sait [3] que ceci entraîne que $\mathfrak{c}_0$ est de dimension 1 et que $\mathfrak{k}_0$ et $\mathfrak{g}_0$ sont de même <u>rang</u> r. Par suite une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{h}_0$ de $\mathfrak{k}_0$ est aussi une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. Remarquons que $\mathfrak{K}_0$ et $\mathfrak{G}_0$ ne sont pas simplement connexes.

Σ = système des racines positives de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$ (pour un certain ordre). Pour $\alpha \in \Sigma$, on a les éléments H_α, X_α, $X_{-\alpha}$ de $\mathfrak{g}$, satisfaisant aux relations classiques : $[H , X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$ pour $H \in \mathfrak{h}$, $[X_\alpha , X_{-\alpha}] = H_\alpha$, $\alpha(H_\alpha) = 2$, $[X_\beta , X_\gamma] = X_{\beta,\gamma} X_{\beta+\gamma}$.

Comme $[\mathfrak{k} , \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$ et $[\mathfrak{k} , \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ et que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$, les X_α appartiennent soit à $\mathfrak{k}$, soit à $\mathfrak{p}$: on dira dans le premier cas que α est <u>compacte</u> et on désigne par Σ_+ l'ensemble des racines positives non compactes.

$\mathfrak{n}_+$ (resp. $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{p}_+$, $\mathfrak{p}_-$) désigne la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par les X_α pour $\alpha \in \Sigma$ (resp. $\alpha \in -\Sigma$, $\alpha \in \Sigma_+$, $\alpha \in -\Sigma_+$)

Soient $\alpha_1 , \dots , \alpha_s$ les racines simples compactes ; comme $\mathfrak{g}_0 \neq \mathfrak{k}_0$, on a $s < r$, mais comme $\mathfrak{k} = \mathfrak{c} + [\mathfrak{k} , \mathfrak{k}]$ et $\dim \mathfrak{c} = 1$, on a $s = r - 1$ et il y a une seule racine simple non compacte, soit α_0, qui n'est pas nulle sur $\mathfrak{c}$. Si β et $\gamma \in \Sigma_+$, $\beta + \gamma$ n'est pas racine : comme $[\mathfrak{p} , \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$, $\beta + \gamma$ serait compacte donc nulle sur $\mathfrak{c}$. Or $\beta = m_0 \alpha_0 + \sum m_i \alpha_i$ et $\gamma = m'_0 \alpha_0 + \sum m'_i \alpha_i$

d'où $\beta + \gamma = (m_0 + m_0') \alpha_0$ sur $\mathfrak{C}$, avec m_0 et m_0' entiers > 0. Donc

$$[X_\beta, X_\gamma] = 0$$

et toute racine $\beta \in \Sigma_+$ est de la forme $\alpha_0 + \Sigma m_i \alpha_i$ et si α est une racine compacte, $\beta \pm \alpha$ est encore de cette forme, donc appartient à Σ_+ si c'est une racine. D'où le :

LEMME 1. - $\mathfrak{p}_+$ et $\mathfrak{p}_-$ sont des sous-algèbres abéliennes invariantes par $\mathfrak{k}$. Toute racine appartenant à Σ_+ est égale à α_0 sur $\mathfrak{C}$.

LEMME 2. - L'application $(q, k, p) \to qkp$ est un isomorphisme de la variété analytique complexe $\mathfrak{P}_- \times \mathfrak{K} \times \mathfrak{P}_+$ sur un ouvert de $\mathfrak{G}$.

DÉMONSTRATION. - Comme $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}_+$ et $\mathfrak{p}_-$ et que

$$\mathfrak{K}\mathfrak{P}_- = \mathfrak{P}_-\mathfrak{K}$$

est un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, il suffit de démontrer que cette application est injective. Or soit $x \in \mathfrak{P}_-\mathfrak{K} \cap \mathfrak{P}_+$: comme $\mathfrak{P}_+$ est abélienne, il existe un

$$X = \Sigma \lambda_\gamma X_\gamma \quad (\gamma \in \Sigma_+)$$

tel que $x = \exp X$. Soit γ_0 la plus petite racine telle que $\lambda_{\gamma_0} \neq 0$. On a $[X, X_{-\gamma_0}] = \lambda_{\gamma_0} H_{\gamma_0}$ modulo $\mathfrak{n}_+$, d'où $\operatorname{ad} x.X_{-\gamma_0} = X_{-\gamma_0} + \lambda_{\gamma_0} H_{\gamma_0}$ modulo $\mathfrak{n}_+$ et $\operatorname{ad} x.X_{-\gamma_0} \notin \mathfrak{p}_-$, ce qui est impossible puisque $[\mathfrak{k} + \mathfrak{p}_-, \mathfrak{p}_-] \subset \mathfrak{p}_-$ et que $x \in \mathfrak{P}_-\mathfrak{K}$. Donc $X = 0$, $x = e$, C.Q.F.D.

LEMME 3. - $\mathfrak{G}_0$ est contenu dans $\mathfrak{P}_-\mathfrak{K}\mathfrak{P}_+$, $\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{P}_-\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0$ et $\mathfrak{P}_-\mathfrak{K}\mathfrak{G}_0$ est ouvert dans $\mathfrak{G}$.

DÉMONSTRATION. - Soit $X \in \mathfrak{p}_0$, $p = \exp \frac{X}{2} = uan$ avec $u \in \mathfrak{U}$, $a \in \mathfrak{H}_+ = \exp(i\mathfrak{h}_0^0)$ et $n \in \mathfrak{N}_+$ et soit σ l'automorphisme de $\mathfrak{G}$ déterminé par le sous-groupe compact maximal $\mathfrak{U}$. On a $p = \sigma(p)^{-1} = \sigma(n)^{-1} au^{-1}$. D'où

$$p^2 = \exp X = \sigma(n)^{-1} a^2 n \in \mathfrak{N}_- \mathfrak{H}_+ \mathfrak{N}_+ .$$

Or $\mathfrak{N}_- \mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{P}_-\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{N}_+ \subset \mathfrak{K}\mathfrak{P}_+$, d'où $\exp \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{P}_-\mathfrak{K}\mathfrak{P}_+$ et comme

$$\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{K}_0 \exp \mathfrak{p}_0 , \quad \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{P}_-\mathfrak{K}\mathfrak{P}_+ .$$

Si $\exp X \in \mathfrak{P}_-\mathfrak{K}$, $an \in \mathfrak{P}_-\mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}\mathfrak{P}_+ = \mathfrak{K}$ et $\exp X \in \mathfrak{K}_0 \cap \exp \mathfrak{p}_0 = \{e\}$ d'où $\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{P}_-\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0$. Enfin un petit compte de dimensions montre que $\mathfrak{P}_-\mathfrak{K}\mathfrak{G}_0$ est ouvert dans $\mathfrak{G}$.

2. Le lemme 3 montre que l'espace homogène $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{K}_0$ s'identifie à un ouvert de la base de $\mathfrak{P}_-\mathfrak{K}\mathfrak{P}_+$ fibré par $\mathfrak{P}_-\mathfrak{K}$, base qui s'identifie elle-même à la variété analytique complexe $\mathfrak{P}_+$. De plus, comme $\mathrm{ad}\, X$ est nilpotent pour $X \in \mathfrak{P}_+$, l'application exponentielle est un isomorphisme de $\mathfrak{p}_+$ sur $\mathfrak{P}_+$ et on déduit de cette cascade d'isomorphismes un isomorphisme φ (analytique réel) de $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{K}_0$ sur un ouvert de $\mathfrak{p}_+$ et une structure analytique complexe sur $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{K}_0$..

THÉORÈME 1. - $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{K}_0$ <u>muni de cette structure complexe, est équivalent à un domaine borné.</u>

(théorème obtenu par des calculs explicites par E. CARTAN [4], au moins dans le cas classique)

Pour démontrer le théorème 1, on va montrer que $\varphi(x)$ reste borné pour une norme $\| \ \|$ sur $\mathfrak{p}_+$ (on désigne encore par φ le composé de φ et de l'application canonique de $\mathfrak{G}_0$ sur $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{K}_0$).

LEMME 4. - <u>On peut trouver des racines</u> $\gamma_i \in \Sigma_+$ $(1 \leq i \leq s)$ <u>telles que</u>

$$\gamma_i \pm \gamma_j$$

<u>ne soit pas racine pour</u> $i \neq j$ <u>et que le sous-espace réel</u> $\mathfrak{a}_0$ <u>engendré par les</u> $X_{\gamma_i} + X_{-\gamma_i}$ <u>soit une sous-algèbre abélienne maximale de</u> $\mathfrak{p}_0$.

Démonstration assez technique mais sans difficultés ([10], p. 582).

LEMME 5. - <u>Soit</u> $X = \Sigma t_i(X_i + X_{-i})$ $(t_i \in R)$. <u>Alors</u> $\exp X = \exp Y \exp H \exp Z$ <u>avec</u> $Y = \Sigma(\mathrm{th}\ t_i)X_{-i}$, $Z = \Sigma(\mathrm{th}\ t_i)X_{-i}$ <u>et</u> $H = \Sigma \log(\mathrm{ch}\, t_i)H_i$ (on a posé $X_{\gamma_i} = X_i$, $X_{-\gamma_i} = X_{-i}$ et $H_{\gamma_i} = H_i$). Ceci se démontre par un calcul explicite et trivial dans le groupe $SL(2, C)$ dont l'algèbre de Lie est isomorphe à l'algèbre engendrée par les X_i, X_{-i} et H_i.

Or on sait que $\mathfrak{p}_0 = \bigcup_{k \in \mathfrak{K}_0} \mathrm{ad}\, k . \mathfrak{a}_0$, d'où $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{K}_0 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{K}_0$ et si $x = kak'$, $\varphi(x) = \mathrm{ad}\, k' . \varphi(a)$. Comme $\mathfrak{K}_0$ est compact, il suffit, pour montrer que $\varphi(\mathfrak{G}_0)$ est borné, de montrer que $\varphi(\mathfrak{A}_0)$ l'est. Or si $a = \exp \Sigma t_i(X_i + X_{-i})$, on a d'après le lemme 5 $\varphi(a) = \Sigma(\mathrm{th}\ t_i)X_i$, d'où $\|\varphi(a)\| \leq \Sigma \|X_i\|$.

Remarquons que, d'après le lemme 1, on a $[Z, X] = \alpha_0(Z)X$ pour tout $X \in \mathfrak{P}_+$ et $Z \in \mathfrak{c}_0$ d'où $\mathrm{ad}\, z.X = \chi(z)X$ pour $z = \exp Z \in \mathfrak{C}_0$ $(\chi(z) = \exp \alpha_0(Z))$. Comme $\alpha_0 \neq 0$ sur $\mathfrak{c}_0$, on voit que $\mathfrak{C}_0$ opère sur le domaine borné $\Omega = \varphi(\mathfrak{G}_0)$ par les transformations $X \to e^{i\theta}X$: on retrouve le fait démontré a priori par E. CARTAN que tout domaine borné symétrique est <u>cerclé</u>. Par suite, toute fonction f holomorphe sur Ω y est développable en série normalement convergente sur tout compact de polynômes homogènes f_n et l'on a :

$$f_n(X) = \int_{\mathfrak{C}_o} \chi(z)^{-n} f(\operatorname{ad} s.X)\, dz \tag{1}$$

3. Construction de représentations de $\mathfrak{G}_o$.

Soit E un espace hilbertien de dimension finie d et L une représentation irréductible analytique complexe de $\mathfrak{K}$ dans E , dont la restriction à $\mathfrak{K}_o$ soit unitaire. Soit λ le poids dominant de L (par rapport à $\mathfrak{h}$ et à l'ordre donné sur $\mathfrak{h}$) et soit v un élément de norme 1 de E , appartenant à ce poids dominant. On sait que $\lambda(H_{\alpha_i})$ est un entier $\geqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$ et $L_z = \lambda(z)I$ pour $z \in \mathfrak{C}$.

Considérons l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions f sur $W = \mathfrak{P}_- \mathfrak{K} \mathfrak{G}_o$, à valeurs dans E , holomorphes et satisfaisant à :

(i) $f(pkw) = L_k f(w)$ pour $p \in \mathfrak{P}_-$, $k \in \mathfrak{K}$ et $w \in W$;

(ii) $\int_{\mathfrak{G}_o} \| f(x) \|^2 dx < +\infty$ (dx , mesure de Haar sur $\mathfrak{G}_o$)

On vérifie facilement que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert pour la norme (ii) et les translations à droite par les éléments de $\mathfrak{G}_o$ définissent une représentation unitaire U de $\mathfrak{G}_o$ dans $\mathcal{H}$, qui est une sorte de représentation "holomorphe induite".

Comme $\exp \Omega$ est une section analytique complexe de W fibré par $\mathfrak{P}_-\mathfrak{K}$, l'application qui à $f \in \mathcal{H}$ fait correspondre la fonction sur Ω , $\tilde{f}(X) = f(\exp X)$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur un espace de fonctions $\tilde{\mathcal{H}}$ holomorphes sur Ω, à valeurs dans E . On a alors, en transportant U à $\mathcal{H}$:

$$U_k \tilde{f}(X) = L_k \tilde{f}(\operatorname{ad} k^{-1}.X) \qquad \text{pour } k \in \mathfrak{K}_o \tag{2}$$

d'où

$$U_z \tilde{f}(X) = \lambda(z) \tilde{f}(\operatorname{ad} s^{-1} X) \qquad \text{pour } z \in \mathfrak{C}_o \tag{3}$$

D'autre part, on déduit de U une représentation $Y \to U_Y$ de $\mathfrak{g}_o$, donc de $\mathfrak{g}$, dans le sous-espace des vecteurs différentiables de $\mathcal{H}$: il est clair que $\mathfrak{g}$ opère par les dérivations invariantes à gauche. En particulier, on a,,si

$$X = \Sigma t_\beta X_\beta \in \Omega \quad \text{et } Y = X_\gamma \quad (\gamma \in \Sigma_+) :$$

$$U_{X_\gamma} \tilde{f}(X) = \frac{\partial}{\partial t_\gamma} \tilde{f}(X) \tag{4}$$

THÉORÈME 2. – La représentation U de $\mathfrak{G}_0$ dans $\mathcal{K}$ est irréductible.

DÉMONSTRATION. – Soit J un sous-espace fermé invariant de $\widetilde{\mathcal{H}}$, $\neq \{0\}$, et soit $\tilde{f} \in J$, $\tilde{f}(0) \neq 0$. D'après (1) et (3) :

$$\tilde{f}(0) = \int_{\mathfrak{C}_0} \tilde{f}(\mathrm{ad}\ z.X)\ dz = \int_{\mathfrak{C}_0} \lambda(z)\ (U_z \tilde{f})\ (X)\ dz$$

ce qui montre que la constante non nulle $\tilde{f}(0)$ appartient à J. La formule (2) montre alors que J contient toutes les constantes, donc que deux sous-espaces invariants $\neq \{0\}$ ont une intersection $\neq \{0\}$. Comme U est unitaire, ceci entraîne le théorème 2..

Reste à montrer que la théorie n'est pas vide, c'est-à-dire que $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Pour cela, il est clair d'après ce qui précède, qu'il faut et il suffit que la constante v appartienne à $\widetilde{\mathcal{H}}$. Si $v \in \widetilde{\mathcal{H}}$, soit $\psi \in \mathcal{H}$, telle que $\tilde{\psi} = v$. On a vu que $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{K}_0 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{K}_0$: si $x = kak'$, avec k, k' dans $\mathfrak{K}_0$ et

$$a = \exp(\Sigma\, t_i\ (X_i + X_{-i}) \in \mathfrak{A}_0\ , \quad a \in \mathfrak{P}_-\ \bar{a}\ \mathfrak{P}_+$$

avec $\bar{a} = \exp \Sigma \log\ (\mathrm{ch}\ t_i)\ H_i \in \mathfrak{K}$ d'où $x \in \mathfrak{P}_- k\bar{a}k'\ \mathfrak{P}_-$ et $\psi(x) = L_{k\bar{a}k'}\ v$.

Pour calculer $\int \|\psi(x)\|^2\ dx$, on utilise la formule d'intégration suivante. Soit $D(a)$ le produit des $\lambda_i(a) - \lambda_i(a)^{-1}$, où λ_i décrit l'ensemble des caractères $\neq 1$ intervenant dans la décomposition de la représentation adjointe de $\mathfrak{G}_0$ restreinte à $\mathfrak{A}_0$, on a :

LEMME 6. – $\displaystyle\int_{\mathfrak{G}_0} g(x)\ dx = \int_{\mathfrak{A}_0} |D(a)|^{1/2}\ da \int_{\mathfrak{K}_0 \times \mathfrak{K}_0} g(kak')\ dk\ dk'$

(dx , dk , da mesures de Haar convenablement normalisées).

Or les relations d'orthogonalité de Schur pour les groupes compacts entraînent immédiatement, en désignant par ξ le caractère de L :

$$\int_{\mathfrak{K}_0 \times \mathfrak{K}_0} \|L_{kak'}\ v\|^2\ dk\ dk' = 1/d\ \xi(a^2)$$

et on est ramené à l'étude (pas commode) de l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}_0} |D(a)|^{1/2}\ \xi(\bar{a}^2)\ da$. On démontre alors (en désignant par ρ la demi-somme des racines positives de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$) :

THÉORÈME 3. Pour que $\mathcal{H} \neq \{0\}$, il faut et il suffit que $\lambda(H_\gamma) + \rho(H_\gamma) < 0$ pour toute racine γ positive non compacte. On peut normaliser (une fois pour toutes) la mesure de Haar sur $\mathfrak{G}_0$ de telle sorte que l'on ait (quand $\mathcal{H} \neq \{0\}$)

$$\|\psi\|^2 = d \left| \prod_{\alpha \in \Sigma} \frac{\lambda(H_\alpha) + \rho(H_\alpha)}{\rho(H_\alpha)} \right|^{-1}$$

REMARQUE 1. - Il est facile de voir que quand $\mathcal{H} \neq \{0\}$, $\tilde{\mathcal{H}}$ contient tous les polynômes sur Ω à valeurs dans E et que l'espace des polynômes est exactement la somme directe des sous-espaces de dimension finie invariants par $\mathfrak{K}_0$, c'est-à-dire l'espace des vecteurs "well-behaved".

REMARQUE 2. - On a vu que $\mathfrak{G}_0$ n'est pas simplement connexe. Si B est une variété, désignons par $\hat{B}$ son revêtement universel. $\hat{W} \approx \hat{\mathfrak{N}}_- \times \hat{\mathfrak{K}} \times \Omega$ est une variété analytique complexe, sur laquelle opèrent à gauche le groupe $\hat{\mathfrak{N}}_- \hat{\mathfrak{K}}$ et à droite $\hat{\mathfrak{G}}_0$. Tout ce qui a été dit se transpose, en remplaçant tous les groupes par leur revêtement universel.

REMARQUE.3. - On peut montrer que la représentation L est équivalente à la représentation définie par les translations à droite par $\mathfrak{K}$ dans l'espace des fonctions holomorphes scalaires sur $\mathfrak{K}$ satisfaisant à $f(nhk) = \lambda(h)\, f(k)$ pour

$$n \in \mathfrak{N}_- \cap \mathfrak{K}, \quad h \in \mathfrak{H} \quad \text{et} \quad k \in \mathfrak{K}.$$

U est donc équivalente à la représentation par les translations à droite dans l'espace des fonctions f holomorphes scalaires sur W , satisfaisant à

$$f(nhw) = \lambda(h)\, f(w) \quad \text{pour} \quad n \in \mathfrak{N}_- \quad \text{et} \quad h \in \mathfrak{H}$$

et de carré sommable sur $\mathfrak{G}_0$. On voit ainsi l'analogie avec les représentations de dimension finie.

D'autre part, même si $\mathcal{H} = \{0\}$, on peut considérer l'espace des fonctions holomorphes sur W satisfaisant à (i) (qui est isomorphe à l'espace des fonctions holomorphes à valeurs dans E sur Ω) , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Les translations à droite y définissent une représentation de $\mathfrak{G}_0$, qui est "en général" irréductible et en tous cas indécomposable. Cependant si λ est le poids dominant d'une représentation M irréductible de $\mathfrak{G}$ (i.e. si $\lambda(H_{\alpha_0})$ entier ≥ 0) , alors la représentation en question n'est pas irréductible et se réduit sur le sous-espace engendré par ψ à la représentation M .

REMARQUE 4. - On déduit immédiatement de (2) et (4) que :

$$U_{X_\alpha} \psi = 0 \quad \text{et} \quad U_{H_\alpha} \psi = \lambda(H_\alpha)\, \psi \quad \text{pour toute racine } \alpha \in \Sigma .$$

Autrement dit, U possède un "vecteur extrémal" , à savoir ψ , de poids λ . Réciproquement, les représentations ici construites (en y ajoutant celles de la remarque 3) donnent toutes les représentations admettant un vecteur extrémal.

4. Représentations de carré sommable.

Soit V une représentation unitaire irréductible d'un groupe unimodulaire Γ dans un Hilbert $\mathfrak{H}$. R. GODEMENT a montré [5] que, s'il existe des éléments a et b de $\mathfrak{H}$ tels que $\langle V_x a , b \rangle$ soit de carré sommable sur Γ, alors V est équivalente à une composante discrète de la représentation régulière de Γ dans $L^2(\Gamma)$ (et réciproquement) et on a les relations d'orthogonalité :

$$\int \langle V_x a , b \rangle \langle \overline{V_x a' , b'} \rangle \, dx = \mu \langle a , a' \rangle \overline{\langle b , b' \rangle} \quad (\mu \text{ constante})$$

$$\int \langle V_x a , b \rangle \langle \overline{V'_x a' , b'} \rangle \, dx = 0$$

si V et V' sont deux telles représentations (dites de carré sommable) inéquivalentes.

Les démonstrations de R. GODEMENT se généralisent au cas où $| \langle V_x a , b \rangle |$ est seulement de carré sommable sur le quotient de Γ par son centre, ce que fait HARISH-CHANDRA dans le cas semi-simple en utilisant des propriétés non triviales des représentations des groupes semi-simples.

On va montrer que la représentation U construite au paragraphe 3 est de carré sommable. On a vu que pour toute $f \in \mathfrak{H}$, on a, quel que soit $\omega \in \exp \Omega$, $f(e) = \int_{\mathfrak{C}_0} f(z^{-1} \omega z) \, dz$. Soit $\mathfrak{H}'_0 = [\mathfrak{k} , \mathfrak{k}] \cap \mathfrak{h}_0$ et $H'_0 = \exp \mathfrak{H}'_0$. L'opérateur $\int_{\mathfrak{H}'_0} \lambda(h')^{-1} L_{h'} \, dh'$ dans E est la projection orthogonale sur v. Par suite :

$$\begin{aligned} \langle f(e) , v \rangle v &= \int_{\mathfrak{H}'_0} \lambda(h')^{-1} \, dh' \, L_{h'} \int_{\mathfrak{C}_0} f(z^{-1} h'^{-1} \omega h' z) \, dz \\ &= \int_{\mathfrak{H}_0} \lambda(h)^{-1} \, U_h f(\omega) \, dh \end{aligned}$$

D'où en prenant $f = U_x \psi$ et en posant $y = pk\omega$ ($y \in \mathfrak{G}_0$, $p \in \mathfrak{P}_-$, $k \in \mathfrak{K}$, $\omega \in \exp \Omega$)

$$\begin{aligned} \langle \psi(x) , v \rangle \psi(y) &= L_k(\langle \psi(x) , v \rangle v) = L_k \int \lambda(h)^{-1} \, U_h \psi(\omega x) \, dh \\ &= \int_{\mathfrak{H}_0} \psi(yhx) \, \lambda(h)^{-1} \, dh \\ \langle \psi(x) , v \rangle \|\psi\|^2 &= \int_{\mathfrak{G}_0 \times \mathfrak{H}_0} \langle \lambda(h)^{-1} \psi(yhx) , \psi(y) \rangle \, dy \, dh \\ &= \int \langle \psi(yx) , \lambda(h) \, \psi(yh^{-1}) \rangle \, dy \, dh \end{aligned}$$

Or,

$$\psi(yh^{-1}) = \psi(pkh^{-1}\, h\omega h^{-1}) = L_k\, L_h^{-1}\, v = \lambda(h)^{-1}\, L_k\, v = \lambda(h)^{-1}\, \psi(y) ,$$

d'où

$$< \psi(x)\ , v > \|\psi\|^2 = < U_x\, \psi , \psi >$$

et en utilisant le lemme 6 :

$$\int | < U_x\, \psi , \psi > |^2\, dx = \|\psi\|^4 \int_{\mathfrak{A}_0} |D(a)|^{1/2}\, da \int_{\mathfrak{K}_0 \times \mathfrak{K}_0} | < L_{kak'}\ v , v > |^2 dk\, dk'$$

et les relations d'orthogonalité sur $\mathfrak{K}_0$ donnent :

$$\int_{\mathfrak{K}_0 \times \mathfrak{K}_0} | < L_{k\bar{a}k'}\ v , v > |^2\, dk\, dk' = 1/d^2\ \xi(\bar{a}^2)$$

et par suite :

$$\int | < U_x\, \psi , \psi > |^2\, dx = 1/d\ \|\psi\|^6$$

ce qui montre que U est de carré sommable, et de constante μ égale à

$$\prod_{\alpha \in \Sigma} \left| \frac{\lambda(H_\alpha) + \rho(H_\alpha)}{\rho(H_\alpha)} \right|^{-1}$$

Or la constante μ joue un grand rôle dans la formule de Plancherel : on sait (voir par exemple [7]) que pour toute représentation V unitaire irréductible de $\mathfrak{G}_0$, et pour toute fonction φ indéfiniment différentiable à support compact, l'opérateur $V_\varphi = \int V_x\, \varphi(x)\, dx$ est de Hilbert-Schmidt et qu'il existe sur l'ensemble des classes $\dot{V}$ de représentations unitaires irréductibles une mesure π unique telle que :

$$\int_{\mathfrak{G}_0} |\varphi(x)|^2\, dx = \int \mathrm{Tr}(V_\varphi^* V_\varphi)\, d\pi(\dot{V}) \tag{5}$$

Or pour que la classe $\dot{V}$ ne soit pas de mesure nulle, il faut et il suffit que V soit de carré sommable et alors $\pi(\dot{V}) = \mu^{-1}$.

Par suite la masse $\pi(\dot{U})$ de U dans la formule de Plancherel (5) est donnée par

$$\pi(\dot{U}) = \prod_{\alpha \in \Sigma} \left| \frac{\lambda(H_\alpha) + \rho(H_\alpha)}{\rho(H_\alpha)} \right| ,$$

c'est-à-dire par une formule semblable à celle d'H. Weyl donnant la dimension d'une représentation irréductible d'un groupe semi-simple compact en terme de poids dominant. Si on se rappelle que pour un groupe compact, la dimension d'une représentation est exactement sa masse dans la formule de Plancherel, l'analogie est parfaite.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOREL (Armand). - Sous-groupes compacts maximaux des groupes de Lie, Séminaire Bourbaki, t. 3, 1950/51.

[2] BRUHAT (François). - Structure des algèbres de Lie semi-simples, Séminaire Bourbaki, t. 7, 1954/55.

[3] CARTAN (Elie). - Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple, Ann. sc. Ec. Norm. Sup., t. 44, 1927, p. 345-467.

[4] CARTAN (Elie). - Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes, Abh. math. Sem. Hamburg, t. 11, 1935, p. 116-162.

[5] GODEMENT (Roger). - Sur les relations d'orthogonalité de V. Bargmann, I : Résultats préliminaires, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 225, 1947, p. 521-523 et II : Démonstration générale, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 225, 1947, p. 657-659.

[6] GODEMENT (Roger). Représentations induites des groupes semi-simples, Séminaire Bourbaki, t. 8, 1955/56.

[7] HARISH-CHANDRA. - Representations of semisimple Lie groups, III, Trans. Amer. math. Soc., t. 76, 1954, p. 234-253.

[8] HARISH-CHANDRA. - Representations of semisimple Lie groups, IV, Amer. J. of Math., t. 77, 1955, p. 743-777.

[9] HARISH-CHANDRA. - Representations of semisimple Lie groups, V, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 1-41.

[10] HARISH-CHANDRA. - Representations of semisimple Lie groups, VI, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 564-628.

[11] Séminaire Sophus LIE, t. 1 : Théorie des Algèbres de Lie, 1954/55.