FRIEDRICH I. MAUTNER

Théorie des idéaux dans certaines algèbres d'un groupe

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 179, p. 163-168

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__163_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1959)

THÉORIE DES IDÉAUX DANS CERTAINES ALGÈBRES D'UN GROUPE ([1])

par Friedrich I. MAUTNER

Soit G le groupe des transformations conformes du cercle $|z| < 1$, donc $G \cong SL(2, R)/(\pm I)$. Soit E l'espace des fonctions C^∞ sur G à valeurs complexes avec la topologie de Schwartz, D le sous-espace des fonctions de support compact, D' et E' sont leurs duals. Avec la "convolution" comme produit, D et E' sont des algèbres associatives topologiques. E' est une algèbre du groupe d'une grande importance, par exemple elle contient les fonctions intégrables de support compact et aussi l'algèbre $\mathfrak{G}$ associative engendrée par l'algèbre de Lie de G ("universal enveloping algebra" de HARISH-CHANDRA).

Pour $g \in G$, $g\,z$ est bien défini par

$$g\,z = \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}} \ , \quad a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \ , \tag{1}$$

donc $|z| = 1 \Longleftrightarrow |g\,z| = 1$.

Pour $|z| = 1$, on met $z = e^{2\pi i \theta}$ et $g\,z = e^{2\pi i\, g\theta}$, donc $g\,\theta$ est bien défini pour $g \in G$. Si $\Psi(\theta) \in L^2(0 \leq \theta \leq 1 ; d\theta)$, on définit pour chaque nombre complexe s un opérateur $U(g, s)$ par

$$[U(g, s)\Psi](\theta) = \left[\frac{dg\,\theta}{d\theta}\right]^s \Psi(g\,\theta) \ . \tag{2}$$

Pour chaque g et s, c'est un opérateur linéaire borné de $L^2(0 \leq \theta \leq 1 ; d\theta)$ l'application $g \to U(g, s)$ est un homomorphisme de G pour chaque s ; c'est une représentation unitaire si et seulement si $\sigma = Rs = 1/2$. (C'est la série principale de Bargmann ; les autres représentations unitaires irréductibles de G sont obtenues selon Bargmann par introduction des espaces de Hilbert différents sur le cercle $|z| = 1$). On pose

$$U_{mn}(g, s) = \langle U(g, s)\, e^{2\pi i m g\theta} , e^{2\pi i n\theta}\rangle = \int_0^1 \left[\frac{dg\,\theta}{d\theta}\right]^s e^{2\pi i m g\theta}\, e^{-2\pi i n\theta}\, d\theta , \tag{3}$$

et pour $f(g)$ une fonction à valeurs complexes sur G, on définit $F_{mn}(s)$ par

$$F_{mn}(s) = \int_G f(g)\, U_{mn}(g, s)\, dg , \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ . \tag{4}$$

([1]) Contenu dans [4].

Si, par exemple $f(g) \in L^1(G)$, l'intégrale (4) existe pour $0 \leq Rs \leq 1$ et $F_{mn}(s)$ est holomorphe dans $0 < Rs < 1$, continue dans $0 \leq Rs \leq 1$; si $f(g) \in D$ (4) existe pour chaque nombre complexe s et $F_{mn}(s)$ est une fonction entière du type exponentiel, rapidement décroissante sur $Rs = 1/2$.

Notre résultat principal sur les idéaux de D est le suivant : tout idéal bilatère fermé J de D est déterminé par son spectre. Pour définir le spectre de J , on définit $|J|^r_{mn}$ comme l'ensemble des nombres complexes s où

$$F^{(j)}_{mn}(s) = 0 \quad \text{pour tout} \quad f(g) \in J \quad \text{et} \quad j \leq r$$

[avec $F^{(r)} = \frac{d^rF}{ds^r}$] . On montre que $|J|^r_{mn}$ est "presque indépendant" de m et n : si $|J|^r_{mn}$ ne contient pas des entiers rationnels, on peut démontrer que $|J|^r_{mn} = |J|^r_{oo}$ pour tout m , n ; donc pour cette classe des idéaux bilatères de D (la "classe agréable") nous avons établi une correspondance biunivoque avec les idéaux (déjà connus) de la sous-algèbre commutative D_{oo} de D des fonctions sphériques (invariants à gauche et à droite par le sous-groupe K des rotations). Si $|J|^r_{mn}$ contient des entiers rationnels, $|J|^r_{mn}$ n'est plus indépendant de m , n en général, mais pour r donné, il peut prendre seulement un nombre fini (≤ 9) des valeurs. On arrive au résultat qu'il faut attacher à chaque nombre complexes $s \neq 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots$ un seul entier rationnel $r = r_s$ (= ordre de zéro) et à chaque entier ℓ un nombre fini (≤ 9) d'entiers r . De plus $r_s = 0$ pour s en dehors d'un ensemble discret. Avec cette modification de la notion du spectre nous avons démontré que J est déterminé par son spectre. La démonstration utilise la description complète de D comme algèbre matricielle (déjà publié dans [3]), et aussi l'existence de certains éléments de $\mathfrak{G}$, qui remplacent les "matrix units" e_{ij} d'une algèbre matricielle totale. Une des difficultés principales dans la démonstration est causée par le fait que l'image de D par (4) n'est pas une algèbre matricielle totale. (Voir [3], théorème 3.1). Si $\ell = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots$ la représentation $g \to U(g , \ell)$ n'est même pas semi-simple. On peut déduire de cela qu'il y a des idéaux bilatères fermés de D qui ne sont pas intersections d'idéaux primaires. Mais si le spectre de J ne contient pas d'entiers rationnels, le théorème d'intersection est encore vrai : J est l'intersection des idéaux primaires $\supseteq J$.

Tous les résultats ci-dessus sont valables aussi pour les idéaux de E' parce qu'il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux de D et de E' . On peut appliquer ces résultats au développement des fonctions moyenne-périodiques sur G obtenu dans [3], paragraphe 6. Si $f \in E$ est moyenne-périodique bilatère (i.e. $\overline{D * f * D} \neq E$), soit J l'idéal annihilateur bilatère de f ($J * f * J = (0)$) dans E' (ou D).

Si J est dans la classe agréable, le spectre de J coïncide avec le spectre $\{s_p, r_p\}$ qui entre dans le développement moyenne-périodique de [3], paragraphe 6 :

$$f(g) \sim \sum_{m,n} \sum_{p,r} a_{mnpr} \, U_{mn}^{(r)}(g, s_p) \quad .$$

Si J n'est pas agréable, il est possible que ces deux spectres soient différents sur les entiers rationnels. De toute façon, on déduit que l'ensemble des nombres s_p du développement moyenne-périodique $f(g) \sim \sum \sum$ est discret. Ce n'est pas une conséquence directe de la démonstration de l'existence du développement moyenne-périodique [3] (paragraphes 5 et 6) et je n'ai pas l'impression qu'on pourrait démontrer cela beaucoup plus directement.

La théorie des idéaux de $L^1(G)$ est beaucoup plus compliquée que celle de D ou E', et que celle de $L^1(-\infty, +\infty)$. Par exemple, un analogue du théorème de Wiener n'est pas vrai pour les idéaux bilatères fermés. C'est déjà faux pour la sous-algèbre commutative des fonctions sphériques. Si $f(g) \in L^1(G)$ toutes les fonctions $F_{mn}(s)$ définies par (4) sont holomorphes dans $0 < Rs < 1$ et continues dans $0 \leq Rs \leq 1$ et satisfont un analogue du lemme de Riemann-Lebesgue ($\lim_{Im\, s \to \infty} F(s) = 0$). Si l'ordre de zéro de $F(s)$ à ∞ est trop haut, l'idéal bilatère fermé engendré par $f(g)$ n'est pas $L^1(G)$, même si $F(s)$ n'a pas de zéros. Donc une description de tous les idéaux fermés bilatères de $L^1(G)$ est probablement extrêmement difficile : la difficulté "classique" de $L^1(-\infty, +\infty)$ qui entre en jeu ici à la frontière $Rs = 0$ ou 1 est combinée avec la difficulté des fonctions holomorphes en un point de la frontière où elles s'annulent. Nous avons seulement réussi à déterminer les idéaux maximaux fermés bilatères de $L^1(G)$, plus précisément les éléments maximaux de l'ensemble de tous les idéaux fermés bilatères. Ils correspondent aux points de la bande $0 \leq Rs \leq 1$ et aux représentations $\mathcal{D}_{\pm}^{\ell}$ de la série discrète. On ne sait pas s'il y a des idéaux maximaux denses dans $L^1(G)$. Aussi une description "utile" de l'image de la transformation de Fourier de $L^1(G)$ est sûrement essentiellement plus difficile que pour $L^1(-\infty, +\infty)$.

Il est donc d'importance d'avoir des algèbres sur G avec une meilleure théorie des idéaux. On dit que $f(g)$ est sphérique de type m, n. Si

$$P_{mn} f = \chi_m * f * \chi_n = f$$

avec χ_n le caractère $e^{2\pi i n \theta}$ du sous-groupe K des rotations de G. Soit

$$\begin{pmatrix} e^{x/2} & 0 \\ 0 & e^{-x/2} \end{pmatrix} \in SL(2, R)$$

et g_x l'élément correspondant de G, i.e.

$$g_x z = \frac{z \cosh(x/2) + \sinh(x/2)}{z \sinh(x/2) + \cosh(x/2)} .$$

Evidemment $g \in G$ entraîne $g = k\, g_x \varkappa$ avec k et $\varkappa \in K$, Pour chaque nombre réel $p \geq 1$ et ≤ 2, soit S^p_{mn} l'espace des fonctions $f(g)$, C^∞ sur G, sphériques de type m, n fixes et telles que

(5) $$(\partial f)(k\, g_x \varkappa) = \mathcal{O}\left(\frac{e^{-x/p}}{1+|x|^j}\right)$$

pour tout entier $j \geq 0$ et chaque élément ∂ de l'algèbre associative enveloppante $\mathfrak{G}$ (considéré comme opérateur différentiel à gauche et à droite sur G).

On définit une topologie sur S^p_{mn} par les semi-normes

(6) $$\sup_{k,\varkappa,x} \left\{ 1 + |x|^j\, e^{x/p} |(\partial f)(k\, g_x\, K)| \right\}$$

pour chaque entier $j \geq 0$ et chaque ∂. Avec cette topologie $S^p_{m,n}$ est un espace vectoriel topologique complet, métrisable. C'est aussi un espace de Schwartz en sens de Grothendieck. On a aussi $S^p_{mn} \subseteq L^r(G)$ si $r \geq p$. Pour $m = n$ S^p_{mm} est une algèbre topologique.

Maintenant on définit pour chaque $p \geq 1$ et ≤ 2 fixe l'algèbre S^p:

$$f \in S^p \Longleftrightarrow P_{mn} f \in S^p_{mn} \text{ pour tous } m, n$$

(7)

$$P_{mn} f = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } m, n .$$

Soit $S^{p,M,N} = \sum^{\oplus}_{|m| \leq M, |n| \leq N} S^p_{m,n}$. Evidemment S^p est la limite $(M \to \infty, N \to \infty)$ de $S^{p,M,N}$ et on définit la topologie de S^p comme limite inductive au sens de Dieudonné et Schwartz des espaces $S^{p,M,N}$ (la topologie de

$S^{p,M,N}$ **étant la topologie du produit** cartésien des $S^p_{m,n}$). On montre que S^p est une algèbre topologique, localement convexe, métrisable et complété. Les projections P_{mn} sont continues.

Si $f(g) \in S^p$ les fonctions $F_{mn}(s)$ définies par (4) sont C^∞ et rapidement décroissantes dans $\frac{1}{q} \leq Rs \leq \frac{1}{p}$ (où $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$) et holomorphes dans $\frac{1}{q} < Rs < \frac{1}{p}$ (si $p = 2$, la bande devient la ligne $Rs = \frac{1}{2}$ et $F_{mn}(\frac{1}{2} + it)$ est une fonction C^∞ de la variable réelle t). On peut déterminer complètement l'image de $S^p_{m,n}$ et de S^p par la transformation de Fourier sur G. Par exemple pour $p = 2$, si f varie sur $S^p_{m,m}$ (m fixe), $F(\frac{1}{2} + it)$ varie sur toutes les fonctions paires de l'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz sur la ligne réelle. Donc S^2 est l'analogue de l'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz pour le groupe G.

Soit $C\,S^p$ l'ensemble des fonctions $f \in S^p$ qui sont orthogonales à toutes les représentations des séries discrètes $\mathfrak{G}^\ell_\pm$ de Bargmann, et $S^p_+(S^p_-)$ l'ensemble des fonctions $f \in S^p$ qui dépendent seulement de la série discrète $\mathfrak{G}^\ell_+$, $(\mathfrak{G}^\ell_-)$, $\ell = 1, 2, 3, \ldots$. On voit facilement que $C\,S^p$, S^p_+ et S^p_- sont des idéaux fermés bilatères de S^p tels que $S^p = C\,S^p \oplus S^p_+ \oplus S^p_-$. La théorie des idéaux de S^p_+ et S^p_- est très facile, parce que S^p_+ sont des sommes directes <u>discrètes</u> d'algèbres matricielles <u>totales</u>. Pour étudier $C\,S^p_\pm$, on montre que pour $1 < p \leq 2$ l'application $J \to J \cap C\,S^p_{oo}$ est biunivoque entre les idéaux fermés bilatères de $C\,S^p$ et les idéaux fermés de l'algèbre commutative $C\,S^p_{oo}$. Mais l'algèbre $C\,S^p_{oo}$ est topologiquement isomorphe avec une algèbre de fonctions holomorphes (dans la bande $\frac{1}{q} < Rs < \frac{1}{p}$, C^∞ dans $\frac{1}{q} \leq Rs \leq \frac{1}{p}$, rapidement décroissantes et telles que $F(1 - s) = F(s)$). Donc si $p < 2$ on a la même difficulté que pour L^1 : même l'analogue du théorème de Wiener n'est pas vrai. Mais pour $p = 2$ la bande devient la ligne $Rs = 1/2$ et $C\,S^2_{oo}$ est isomorphe à la sous-algèbre de toutes les fonctions paires de l'algèbre $\mathcal{S}$ de Schwartz sur la ligne $Rs = 1/2$. Les idéaux fermés de cette algèbre sont bien connus, ils sont complètement déterminés par leurs spectres et tout idéal est l'intersection des idéaux primaires (qui correspondent aux paires de points de la ligne $Rs = 1/2$). Utilisant cela on peut démontrer la même chose pour les idéaux fermés bilatères de $C\,S^2$. On arrive finalement à une description complète de tous les idéaux bilatères fermés J de l'algèbre S^2. Chaque J est intersection d'idéaux primaires. Les idéaux primaires de $C\,S^2$ correspondent aux paires de points $\frac{1}{2} \pm it$; les idéaux primaires de $S^p_\pm$ sont maximaux et correspondent biunivoquement aux représentations $\mathfrak{G}^\ell_\pm$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARGMANN (V.). - Irreductible unitary representations of the Lorentz group, Annals of Math., Series 2, t. 48, 1947, p. 568-640.

[2] DIEUDONNÉ (J.) et SCHWARTZ (L.). - La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{L}\mathcal{F})$, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 1, 1949, p. 61-101.

[3] EHRENPREIS (L.) and MAUTNER (F. I.). - Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups, Part 2, Trans. Amer. math. Soc., t. 84, 1957, p. 1-55.

[4] EHRENPREIS (L.) and MAUTNER (F. I.). - Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups, Part 3, Trans. Amer. math. Soc. (à paraître).