RENÉ THOM

Travaux de Milnor sur le cobordisme

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. nº 180, p. 169-177
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__169_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1959)

TRAVAUX DE MILNOR SUR LE COBORDISME

par René THOM

L'article de J. MILNOR [3] (à paraître) apporte sur la structure de l'anneau de cobordisme Ω de nouveaux renseignements importants ; de plus, MILNOR généralise la théorie du cobordisme aux variétés presque-complexes, ce qui conduit à une connaissance plus complète des propriétés de divisibilité des nombres caractéristiques de Chern des variétés presque-complexes (a fortiori des variétés complexes et algébriques). La démonstration fait appel à un nouvel instrument en théorie de l'homotopie : la suite spectrale de F. Adams dont on rappellera ici les principales propriétés. Elle met en oeuvre également, de façon essentielle, la structure algébrique de l'algèbre de Steenrod, élucidée pour une large part dans un article antérieur de MILNOR [2] .

1. Rappel sur l'anneau de cobordisme Ω .

Deux variétés différentiables (C^{∞}) , V^n , V'^n , de même dimension n , compactes, orientées, sont dites "cobordantes", s'il existe une variété à bord M^{n+1} , compacte, orientée, telle que le bord ∂M^{n+1} soit formé de V' et de $-V$, $-V$ désignant la variété V pourvue de l'orientation opposée à l'orientation donnée. Ceci définit, dans l'ensemble des variétés différentiables orientées compactes, une relation d'équivalence, dont les classes forment, par réunion des variétés représentantes, un groupe abélien Ω^n . De plus le produit topologique fait de la somme directe $\Omega = \sum_n \Omega^n$ un anneau à multiplication anticommutative, noté Ω .

Soit $A(SO(n))$, le fibré universel en n-boules associé à $SO(n)$, dont la base est la grassmannienne des n-plans dans un espace euclidien de grande dimension ; $A(SO(n))$ est une variété à bord compacte ; si l'on identifie son bord en un point, on obtient un espace noté $M(SO(n))$; la même construction peut s'effectuer à partir d'un sous-groupe fermé G de $SO(n)$; elle conduit à construire un espace $M(G)$, et l'injection $G \subset SO(n)$ induit une application canonique de $M(G)$ dans $M(SO(n))$. En particulier, si l'on considère $SO(n)$ comme sous-groupe de $SO(n + 1)$, on en déduit une injection de $M(SO(n))$ dans $M(SO(n + 1))$; il est aisé de voir que cette injection possède la propriété homotopique essentielle d'une suspension, à savoir qu'elle induit un isomorphisme des groupes d'homotopie

$$\pi_{n+k}(M(SO(n))) \to \pi_{n+k+1}(M(SO(n+1)))$$

pour $k < n$; on désignera par la notation $\pi_k(MSO)$ ces groupes stables. Cette construction est justifiée par le résultat suivant (Cf. THOM [4]) : Le groupe de cobordisme Ω^k est isomorphe au groupe stable $\pi_k(MSO)$.

2. Les résultats de Milnor.

Désignons par T l'idéal de Ω formé des éléments d'ordre fini. On a les résultats suivants :

THÉORÈME 1. - L'idéal T n'a pas d'élément d'ordre impair.

THÉORÈME 2. - Le quotient Ω/T est un anneau de polynômes (sur Z), $S(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k, \ldots)$ admettant un générateur Y_K de dimension 4k.

Ces générateurs Y_k sont réalisés par des variétés qu'on sait construire (au moins théoriquement).

3. La suite spectrale de F. Adams.

Soient X un complexe fini, $S^m(X)$ la m-ième suspension de X ; les groupes d'homotopie $\pi_{n+m}(S^m(X))$ sont indépendants de m dès que $m > n$; on les désignera par $\Sigma_n(X)$. Soient q un nombre premier, A l'algèbre de Steenrod relative à l'entier q (i.e. l'algèbre engendrée par les puissances de Steenrod $\mathcal{P}_q$, le produit étant défini par la composition de ces opérations). On désigne par $q^\infty \Sigma_n(X)$ le sous-groupe des éléments de $\Sigma_n(X)$ divisibles par toute puissance de q. On a alors le

THÉORÈME de F. Adams. - Il existe une suite spectrale $(E_r^{s,t}, d_r)$ associée à X, telle que :

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_A^{s,t}(H^*(X ; Z_q) ; Z_q)$$

et

$$E_\infty^{s,t} = B^{s,t}/B^{s+1,t+1} ,$$

où les groupes $B^{i,n+i}$ définissent une filtration du groupe stable.

$$\Sigma_n(X) : \Sigma_n(X) = B^{0,n} \supset B^{1,n+1} \supset \ldots \supset B^{s,n+s}$$

telle que :

$$\cup_s B^{s,n+s} = q^{\infty} \sum_n(X)$$

Le foncteur $\mathrm{Ext}_A^{s,t}$ est défini comme suit : soient M , N deux A-modules à gauche, gradués ; désignons par $\mathrm{Hom}_A^t(M , N)$ le groupe des A-homomorphismes de degré $-t$ de M dans N . Etant donnée une résolution de M par des A-modules projectifs :

$$\to P_s \to P_{s-1} \to \dots \to P_2 \to P_1 \to P_o \to M \to 0$$

on forme le complexe défini par :

$$\to \mathrm{Hom}_A^t(P_{s-1} , N) \to \mathrm{Hom}_A^t(P_s , N) \to \mathrm{Hom}_A^t(P_{s+1} , N) \to \quad ;$$

son homologie est alors donnée par les groupes $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M , N)$. Le principe de la démonstration consiste à définir une suite d'espaces

$$S^m(X) = Y_o \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots \supset Y_s \supset Y_{s+1} \supset \dots$$

telle que la suite de A-homomorphismes :

$$0 \leftarrow H^*(Y_o ; Z_q) \leftarrow H^*(Y_1 , Y_o ; Z_q) \leftarrow H^*(Y_2 , Y_1 ; Z_q) \leftarrow$$

donne une résolution de $H^*(Y_o ; Z_q)$ par des modules libres sur l'algèbre de Steenrod A . De plus, l'image de $H_{m+n}(Y_s ; Z)$ dans $H_*(Y_o ; Z)$ se compose d'éléments divisibles par q^s , ce qui permet d'interpréter, dans une certaine mesure, la filtration de $\sum_n(X)$ par les $B^{s,n+s}$.

4. La cohomologie de M(SO) en tant que A-module.

Désignons par (Q_o) l'opérateur de Bockstein $1/q$; si q est impair, la cohomologie de $M(SO)$ n'a pas de torsion d'ordre impair (car, en vertu d'un résultat de BOREL, la cohomologie de la grassmannienne n'a pas de torsion d'ordre impair). Il en résulte que le Bockstein Q_o opère trivialement dans la cohomologie $H^*(MSO)$; il est donc raisonnable de considérer d'abord $H(MSO)$ comme un $A/(Q_o)$-module, où $A/(Q_o)$ est le quotient de A par l'idéal bilatère engendré par (Q_o) . On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 1. - La cohomologie $H(MSO)$ est un $A/(Q_o)$-module libre.

Il est assez facile de donner une base de $A/(Q_o)$: à toute suite d'entiers $r_1 , r_2 , \dots , r_k , \dots$ tous nuls sauf un nombre fini, on associe une opération

$\mathcal{P}^{(r)}$ de A , de degré :

$$2r_1(q-1) + 2r_2(q^2-1) + \ldots + 2r_i(q^i-1) + \ldots$$

et ces opérations forment une base de $A/(Q_o)$. Par exemple, sur une classe t de dimension 2, on a :

$$\mathcal{P}^1 t = t^q , \quad \mathcal{P}^{01} t = t^{q^2} \ldots \mathcal{P}^{0 \ldots 1} = t^{q^s}$$

et

$$\mathcal{P}^{(r)} t = 0 \quad \text{si} \quad r_1 + r_2 + \ldots + r_s > 1$$

En définissant de manière évidente la somme de deux suites (r) , on a la formule de produit :

$$\mathcal{P}^{(r)}(X.Y) = \sum_{(s)+(t)=(r)} \mathcal{P}^{(s)}(X) \cdot \mathcal{P}^{(t)}(Y)$$

De là résulte sur un produit de n classes t_i de degré 2 :

$$\mathcal{P}^{(r)}(t_1 t_2 \ldots t_n) = \sum (t_1)^q (t_2)^q (t_{r_1})^q (t_{r_1+1})^{q^2} \ldots (t_{r_2+1})^{q^3} \ldots t_n$$

où l'exposant q apparait r_1 fois, l'exposant q^2 r_2 fois, etc. et l'exposant 1 $n - (r_1 + r_2 + \ldots + r_s + \ldots)$ fois.

Or, la cohomologie $H^{4j}(MSO)$ peut s'identifier, suivant le procédé connu dû à BOREL-SERRE, aux fonctions symétriques en n variables t_i de degré 2, de la forme :

$$X_\omega = \sum t_1^{1+2i_1} \ldots t_s^{1+2i_s} \ldots t_n , \quad i_1 + i_2 + \ldots + i_s = j$$

On peut alors définir sur les partitions ω de j un ordre, par lequel on démontre que toutes les classes de la forme $\mathcal{P}^{(r)} X_\omega$, $\deg(r) < n$, sont des éléments linéairement indépendants de $H^*(MSO)$, dès que la partition ω ne contient aucun entier de la forme $1/2(q^i - 1)$

Il en résulte que $H^*(MSO)$ est un module libre sur $A/(Q_o)$; on obtient une base de $H^{4j}(MSO)$ en tant que A-module en formant toutes les fonctions symétriques X_w telles que la partition w $(\deg w = j)$ ne contienne aucun entier de la forme $1/2(q^i - 1)$.

Pour passer de $A/(Q_0)$ à A elle-même, MILNOR construit explicitement une résolution de $H(MSO)$:

$$0 \leftarrow H(MSO; Z_q) \leftarrow F_0 \leftarrow F_1 \leftarrow \dots \leftarrow F_r \leftarrow \dots$$

où les F_r sont des A-modules libres.

A l'usage des spécialistes, précisons les détails suivants : soit Q_0 l'opérateur de Bockstein ; on pose par récurrence :

$$Q_{i+1} = P^{q^i} Q_i - Q_i P^{q^i} \quad ;$$

le degré de Q^i est $2q^i - 1$; les Q_i anticommutent et engendrent dans A une algèbre extérieure. On obtient une base de A en formant tous les produits :

$$P^{(r)} Q_{j_1} \cdot Q_{j_2} \dots Q_{j_a} \quad , \text{ où } a \geqslant 0 \ , \quad 0 \leq j_1 \leq j_2 \dots \leq j_a \quad .$$

Cela étant, on donnera pour base au groupe F_s les symboles $y(w, i_1, i_2, \dots, i_s)$ où w est une partition ne contenant aucun entier de la forme $1/2(q^j - 1)$, où $i_1, i_2, i, \dots, i_s$ est une suite non décroissante d'entiers positifs, et où le degré du symbole $y(w, i_1, \dots, i_s)$ est égal à

$$\dim X_w + 2(q^{i_1} - 1) + 2(q^{i_2} - 1) + \dots + 2(q^{i_s} - 1) + s$$

On définit l'opérateur bord : $F_s \xrightarrow{d} F_{s-1}$ par la formule :

$$d : y(w, i_1, i_2, \dots, i_s) = \sum_i Q_i \, y(w, i_1, \dots, \check{i}, \dots, i_s)$$

où la sommation s'étend à tous les indices i apparaissant dans la suite $i_1, i_2, \dots, i_s$. On vérifie alors $dd = 0$; pour montrer qu'on a affaire à une suite exacte, on construit ensuite un opérateur d'homotopie
$D : F_s \to F_{s+1}$ tel que $dD + Dd =$ identité.

Il en résulte que les éléments des groupes F_s de la résolution sont tous de dimension $4k + s$; par suite, les différentielles de Leray d_r de la suite spectrale d'Adams sont toutes nulles. Il en résulte immédiatement que les seuls groupes de cobordisme Ω^k qui peuvent présenter de la torsion d'ordre impair sont les groupes de dimension divisible par 4.

Pour démontrer que cette torsion n'existe pas, même en dimension $\equiv 0 \bmod 4$, MILNOR exhibe un sous-groupe Ω_0^k libre, de Ω^k. Ce sous-groupe est engendré par les produits de certaines variétés Y_j de dimension $4j$. Ces variétés apparaissent en quelque sorte comme les "plus simples" de toutes les variétés de dimension $4j$. Rappelons que le nombre de Pontrjagin s_j défini en fonction symétrique par $\sum t^j$ possède la propriété suivante : s_j s'annule sur toutes les variétés M^{4j} qui sont "décomposables" au sens du cobordisme (M^{4j} équivalente à une somme de produits de variétés de dimension $<4j$) ; seules peuvent être prises comme générateurs dans $\Omega \otimes Q$ les variétés M^{4j} telles que $s_j(M^{4j}) \neq 0$. Mais pour obtenir un vrai générateur, il est très important de savoir déterminer la plus petite valeur possible de ce nombre s_j . A l'aide de propriétés de divisibilité de coefficients binomiaux (trop longues pour être rapportées ici), MILNOR démontre :

THÉORÈME 3. - <u>Il existe une variété</u> Y_j <u>de dimension</u> $4j$, <u>telle que</u> :
$s_j(Y_j) = q$ <u>si</u> $2j+1$ <u>est de la forme</u> q^s

$s_j(Y_j) = 1$ <u>si</u> $2j+1$ <u>n'est pas une puissance de nombre premier</u>.

Les espaces projectifs complexes (de dimension paire) ne suffisent pas pour construire ces variétés ; il est nécessaire d'utiliser des variétés qui sont des hypersurfaces de degré (1,1) dans un produit d'espaces projectifs $PC(m) \times PC(n)$; on se sert alors du fait que le nombre s_j d'une telle hypersurface est égal à $-\binom{m}{n}$.

On peut alors calculer l'indice de l'image $\varphi : \Omega_0^k$ dans le groupe d'homologie $H_{4k}(MSO)$ (modulo la 2-torsion) : il suffit dans ce but de calculer le déterminant $s_\omega(Y_{j_1} \times \dots \times Y_{j_s})$, où ω et $(j_1 \dots j_s)$ parcourent indépendamment toutes les permutations de k . En usant de la formule du produit pour s_ω , on peut mettre cette matrice sous forme triangulaire, et calculer ainsi son déterminant. En comparant ensuite avec l'indice de l'image φ, B_s , dans $H(MSO)/2$ torsion ,qu'on sait calculer, puisqu'on connait une forme explicite de B_s , on montre, en comparant les indices, qu'il n'y a plus de place dans Ω^k pour de la torsion impaire dans Ω^k/Ω_0^k . Ceci montre que le groupe Ω^k est somme directe du groupe libre Ω_0^k et d'un groupe de 2-torsion.

Ceci démontre les théorèmes 1 et 2, et montre de plus que les valeurs pour $s_j(Y_j)$ trouvées au théorème 3 sont les plus petites possibles. Parmi les autres conclusions qu'en tire MILNOR, citons la suivante : désignons par $\pi(k , u , q)$ le nombre des partitions de l'entier k qui contiennent au plus u entiers de la forme $1/2(q^i - 1)$, par $\pi(k)$ le nombre global de toutes les partitions de k . Soit dès lors un ensemble de $\pi(k)$ entiers. Pour que ces nombres soient les nombres de Pontrjagin d'une variété M^{4k} , il faut que ces nombres vérifient un certain nombre de congruences : le nombre de ces congruences modulo q^u qui sont linéairement indépendantes est égal à $\pi(k, u, q)$.

5. Généralisation "complexe" du cobordisme.

Deux variétés presque-complexes V^n , V'^n , de même dimension complexe n , sont dites C-équivalentes, si leurs nombres caractéristiques de Chern sont égaux :

$$c_{i_1} . c_{i_2} \dots c_{i_k}(V^n) = c_{i_1} . c_{i_2} \dots c_{i_k}(V'_n) \quad .$$

L'ensemble des classes de C-équivalence forme un monoïde abélien Γ^k , l'addition étant définie par la réunion des variétés représentantes ; le produit topologique permet de définir une multiplication commutative : $\Gamma^k \times \Gamma^{k'} \to \Gamma^{k+k'}$ On montre d'abord que le monoïde Γ^k est en fait un groupe abélien ; il suffit pour cela de montrer que toute variété a un opposé ; ceci se démontre par récurrence sur les dimensions ; c'est vrai pour $n = 1$, car la sphère de Gauss a pour opposée la courbe algébrique de genre deux. On établit alors la propriété par récurrence sur k . Par ailleurs le rang de Γ^k est égal à $\pi(k)$, nombre des partitions de k . Il est facile, en effet, de montrer que les $\pi(k)$ produits d'espaces projectifs complexes

$$PC(i_1) \times PC(i_2) \times \dots \times PC(i_r) \quad , \qquad i_1 + i_2 + \dots + i_r = k$$

sont linéairement indépendants au point de vue de la C-équivalence. Soit M_k une variété presque-complexe de dimension k ; si $s_k(M_k) = 0$, alors un multiple positif a M_k est C-équivalent à une combinaison linéaire de produits d'espaces projectifs complexes de dimension inférieure ; par induction sur k , a M_k a un opposé, donc aussi M_k (car a $M_k = M_k + (a-1) M_k$) . Si $s_k(M_k) \neq 0$, on peut trouver une variété M'_k (par exemple $PC(k)$ ou une hypersurface régulière, suivant le signe de $s_k(M_k)$) , telle qu'il existe une combinaison à coefficients entiers positifs a , b pour lesquels $s_k(a\, M_k + b\, M'_k) = 0$. On est alors ramené au cas précédent.

On remarquera que l'opposée de toute variété presque-complexe peut être réalisée par une variété algébrique sans singularité. De même, si on se donne "a priori" un ensemble de $\pi(k)$ entiers $m_{i_1 \dots i_r}$, il existe une variété algébrique M^k telle que

$$c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_r}(M_k) = p\, n_{i_1 \ldots i_r} \quad ,$$

p entier positif.

On peut alors construire, comme dans le cas réel, pour chaque k, une variété algébrique Y'_k telle que $s_k(Y'_k) = q$, si $k+1$ est de la forme q^s, ou $s_k(Y'_k)=1$ dans tout autre cas. Le théorème central est :

THÉORÈME 4. - <u>L'anneau</u> $\Gamma = \sum \Gamma^k$ <u>est un anneau de polynômes sur</u> Z <u>engendré par les</u> Y'_j .

Donnons, avant la démonstration, quelques conséquences : comme les Y'_j sont des variétés algébriques, toute propriété de divisibilité démontrée pour les variétés algébriques s'étend "ipso facto" aux variétés presque-complexes. En particulier, ce qui répond à une question posée par HIRZEBRUCH [1], <u>le genre de Todd d'une variété presque-complexe est toujours un entier.</u>

La démonstration du théorème 4 peut s'interpréter comme suit : disons qu'une variété X^n compacte orientée, (éventuellement avec bord) est <u>faiblement presque-complexe,</u> si elle peut être plongée dans un espace euclidien R^{n+2k} de telle façon que le fibré des vecteurs normaux à X^n admette une structure unitaire ; deux variétés X , X' faiblement presque-complexes seront "faiblement" équivalentes si elles constituent le bord (algébrique) d'une variété à bord M^{n+1} , elle-même faiblement presque-complexe, de telle façon que la structure unitaire d'un plongement de M induise sur le bord les structures unitaires déjà données sur X et X' . Alors la construction générale de la théorie du cobordisme s'applique, et permet de définir sur l'ensemble des classes d'équivalence une structure de groupe ; ces groupes sont alors isomorphes aux groupes stables $\pi_n(M(U))$. Il n'est pas difficile de montrer qu'une variété presque-complexe est "faiblement-presque-complexe", à condition de la plonger dans un espace euclidien de dimension assez grande. De là résulte que les groupes Γ_k de Milnor s'identifient aux groupes d'homotopie stables $\pi_{2k}(M(U))$. Or ces groupes peuvent se calculer, comme ceux de MSO , en usant de la suite spectrale de F. Adams, qui cette fois peut s'appliquer <u>pour tout nombre premier, y compris</u> 2. On obtient :

Les groupes stables $\pi_j(M(U))$ <u>sont nuls pour</u> j <u>impair</u> ; <u>pour</u> $j = 2k$, <u>le groupe</u> $\pi_j(M(U))$ <u>est isomorphe à la somme directe de</u> $\pi(k)$ <u>groupes</u> Z .

La structure multiplicative de l'anneau Γ peut alors se déterminer aisément ; elle admet les Y'_j pour générateurs.

Signalons, pour terminer, une conséquence purement topologique de ce résultat : si une variété X^n peut être plongée dans l'espace euclidien de telle façon que le fibré des vecteurs normaux soit trivial, alors X^n est une variété-bord.

Les complexes $M(U(k))$ semblent d'ailleurs présenter un réel intérêt pour l'étude des propriétés topologiques des variétés algébriques, notamment dans les questions de désingularisation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HIRZEBRUCH (Friedrich). - Some problems on differentiable and complex manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 60, 1954, p. 213-236.

[2] MILNOR (John). - The Steenrod algebra and its dual, Annals of Math., Series 2, t. 67, 1958, p. 150-171.

[3] MILNOR (John). - On the cobordism ring, and a complex analogue (à paraître).

[4] THOM (René). - Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. math. Helvet., t. 28, 1954, p. 17-86.