ALBRECHT DOLD

Les foncteurs dérivés d'un foncteur non-additif

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 170, p. 19-25
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__19_0>

LES FONCTEURS DÉRIVÉS D'UN FONCTEUR NON-ADDITIF

par Albrecht DOLD

Soient $\mathcal{C}$ resp. $\mathcal{C}'$ la catégorie des Λ- resp. Λ'-modules (à gauche) et $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur (covariant). Si T est additif, CARTAN-EILENBERG [1] définissent les foncteurs dérivés (gauches) $L_q T$ de T en utilisant les faits suivants :

I. Chaque $A \in \mathcal{C}$ possède des résolutions projectives et deux telles résolutions ont même type d'homotopie.

II. Le prolongement de T à la catégorie des complexes (de chaînes) dans $\mathcal{C}$ resp. $\mathcal{C}'$ conserve la relation d'homotopie.

La propriété (II) n'est plus vraie pour les foncteurs non-additifs quoique le prolongement soit toujours possible si T vérifie seulement $T(0) = 0$. Par contre, il est facile de voir que le prolongement d'un T arbitraire aux FD-complexes conserve la relation de FD-homotopie. L'analogue de (I) pour la FD-catégorie est aussi vrai et résulte d'une équivalence entre "complexes" et "FD-complexes", qu'on expliquera ci-dessous (paragraphe 3). Ceci permet de définir les foncteurs dérivés d'un T arbitraire ([3]). Par exemple, les groupes $H(\pi, n)$ d'EILENBERG-MACLANE [4], ou les groupes d'homologie des produits symétriques, cycliques etc. (des polyèdres, voir [2]) s'expriment ainsi comme foncteurs dérivés de certains foncteurs non-additifs.

Les définitions et résultats se généralisent aux catégories abéliennes ([6]).

1. FD-complexes et FD-homomorphismes.

Un FD-complexe K dans $\mathcal{C}$ est une suite de modules $K_q \in \mathcal{C}$ munie des opérateurs de face et de dégénérescence

$$\partial_i : K_q \to K_{q-1} \text{ , et } s_i : K_q \to K_{q+1} \text{ , } \quad i = 0, 1, \ldots, q \text{ ,}$$

satisfaisant aux identités usuelles (les FD-identités ; [4]). Par exemple, les chaînes d'un complexe semi-simplicial forment un FD-complexe.

Un FD-homomorphisme $F : K^1 \to K^2$ est une suite $F_q : K_q^1 \to K_q^2$ d'homomorphismes, compatibles avec les ∂_i et s_i.

Les modules d'homologie $H_*(K) = \sum_{q=0}^{\infty} H_q(K)$ de K se définissent avec l'opérateur bord $\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \dots$.

Soit $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur covariant. Alors TK sera le FD-complexe (dans $\mathcal{C}'$) dont les opérateurs de face et de dégénérescence sont $T(\partial_i)$ et $T(s_i)$; en particulier, $(TK)_q = T(K_q)$. Définition analogue pour les FD-homomorphismes : $(TF)_q = T(F_q)$. On dit qu'on a prolongé T à la FD-catégorie. On notera que l'opérateur bord dans TK est $\sum(-1)^i\, T(\partial_i)$ et non, en général, $T(\partial) = T\,(\sum (-1)^i\, \partial_i)$.

2. FD-homotopie ([2]).

Soit I le FD-complexe, sur les entiers Z , du segment, qu'on considère comme complexe semi-simplicial. Le Z-module I_q est libre et possède comme base les q-simplexes du segment (ils sont tous dégénérés si $q > 1$). En particulier, les sommets e_0 , e_1 forment une base de I_0 . Pour chaque FD-complexe K dans $\mathcal{C}$ le produit cartésien $I \times K$ est un FD-complexe dans $\mathcal{C}$. On a $(I \times K)_q = I_q \otimes_Z K_q$, et les opérateurs de face et de dégénérescence de $I \times K$ sont $\partial_i \otimes \partial_i$ et $s_j \otimes s_j$.

2.1 Définition. - Une FD-homotopie est un FD-homomorphisme $\Theta : I \times K \to K'$. Deux FD-homomorphismes F^0 , F^1 : $K \to K'$ sont (FD)-homotopes, $F^0 \simeq F^1$, s'il existe une FD-homotopie Θ telle que $\Theta(s_0^q(e_i) \otimes a_q) = F^i(a_q)$ pour tout $a_q \in K_q$ et $i = 0$, 1 . Définition usuelle de l'homotopie-équivalence $K \underset{F'}{\overset{F}{\rightleftarrows}} K'$.

2.2. Proposition. - Soit $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur covariant. Si F^0 , F^1: $K \to K'$ sont des FD-homomorphismes homotopes, alors, TF^0 , TF^1 : $TK \to TK'$ sont homotopes. En particulier, si K , K' sont homotopie-équivalents, TK , TK' le sont aussi.

DÉMONSTRATION. - Pour chaque simplexe $\sigma \in I_q$ on a un homomorphisme canonique

$$[\sigma] : K_q \to I_q \otimes K_q \ , \quad [\sigma]\, c = \sigma \otimes c \ , \quad c \in K_q \ ,$$

d'où un homomorphisme

$$\tau_q : I_q \otimes T(K_q) \to T(I_q \otimes K_q) , \qquad \tau_q(\sigma \otimes a) = T[\sigma]a ,$$

σ un q-simplexe de I , $a \in T(K_q)$. On vérifie que les τ_q forment un FD-homomorphisme $\tau : I \times (TK) \to T(I \times K)$; de plus, si $\Theta : I \times K \to K'$ est une homotopie $F^0 \simeq F^1$, l'homomorphisme composé

$$I \times TK \xrightarrow{\tau} T(I \times K) \xrightarrow{T\Theta} TK'$$

est une homotopie $TF^0 \simeq TF^1$.

3. <u>Equivalence entre FD-complexes et complexes de chaînes</u> ([5], [2]).

3.1 <u>Définition</u>. - Soit K un FD-complexe. Les modules $(NK)_q = \bigcap_{i>0}$ noyau $(\partial_i : K_q \to K_{q-1})$ forment un sous-complexe <u>de chaînes</u> NK (pas un sous-FD-complexe) de K , qui s'appelle le <u>complexe normal</u> de K . L'opérateur-bord dans NK est réduit à ∂_0 .

A chaque FD-homomorphisme $F : K \to K'$ on associe, par restriction de F , un homomorphisme de chaînes $NF : NK \to NK'$.

N est un foncteur additif. On va voir que K est complètement déterminé par son complexe normal.

Soit $J = (j_1 , j_2 , \dots j_n)$ une suite d'entiers ≥ 0 , de longueur $\ell(J) = n < \infty$, $n > 0$. Si pour tout i , $j_i \leq q - i$, elle définit un homomorphisme

$$s_J = s_{j_1} \circ s_{j_2} \circ \dots \circ s_{j_n} : K_{q-n} \to K_q \quad ;$$

c'est un monomorphisme, parce que chaque s_j l'est ($\partial_j s_j$ = identité) ; donc $s_J K_{q-n} \cong K_{q-n}$. La suite J est q-<u>admissible</u> si pour tout i , $j_i \leq q - i$ et $j_i > j_{i+1}$ (les suites q-admissibles de longueur n correspondent biunivoquement aux applications monotones surjectives $[q] \to [q - n]$; [4], I, chapitre I, 3). Ceci dit, on a

3.2 <u>Proposition</u>. - $K_q = (NK)_q + \sum_J s_J(NK)_{q-\ell(J)}$ (<u>somme directe</u>) ; <u>la somme s'étend sur toutes les suites</u> q-<u>admissibles</u>.

DÉMONSTRATION par récurrence sur q . - A K on associe un nouveau FD-complexe $\overline{K}$ avec $\overline{K}_{q-1}$ = noyau $(\partial_q : K_q \to K_{q-1})$; les opérateurs de face et de dégénérescence de $\overline{K}$ sont les restrictions de ceux de K. La relation $\partial_q s_{q-1}$ = identité implique

$$K_q = \text{noyau}\ (\partial_q) + \text{image}(s_{q-1}) = \overline{K}_{q-1} + s_{q-1}(K_{q-1}) \quad .$$

A $\overline{K}_{q-1}$ et K_{q-1} on peut appliquer l'hypothèse de récurrence ; en utilisant $(N\overline{K})_{i-1} = (NK)_i$ pour $i > 0$, ceci donne la proposition.

De la proposition 3.2 résulte bien que le FD-complexe K est déterminé par la complexe de chaînes NK (on déduit des FD-identités comment les s_i, ∂_i se comportent vis-à-vis des s_J). De plus, elle montre comment on peut associer à un complexe de chaînes C arbitraire (positif) un FD-complexe $K = LC$ tel que $NK \cong C$; on n'a qu'à définir K par les formules 3.2. Plus généralement, la proposition 3.2 indique comment on peut construire un foncteur L réciproque à N, c'est-à-dire tel que L et N forment une équivalence ([6]) entre les catégories des FD-complexes et des complexes de chaînes. En particulier,

3.3 N : FD-Hom$(K, K') \cong$ CH-Hom(NK, NK') .

(Groupe des FD-homomorphismes, resp. des homomorphismes de chaînes) ; ceci peut aussi se déduire immédiatement de 3.2 .

L'isomorphisme 3.3 conserve les homotopies, i.e.

3.4. Proposition. - Deux FD-homomorphismes F^0, F^1 : $K \to K'$ sont homotopes si et seulement si NF^0, NF^1 : $NK \to NK'$ sont (chaîne-) homotopes.

DÉMONSTRATION. - On considère les homomorphismes de chaînes

$$(NI) \otimes (NK) \xrightarrow{\nabla} N(I \times K) \xrightarrow{f} (NI) \otimes (NK)$$

qui figurent dans la démonstration du théorème d'Eilenberg-Zilber ([4], II, chapitre I, 2).

Si maintenant Θ : $I \times K \to K'$ est une FD-homotopie $F^0 \simeq F^1$, le composé $(N\Theta) \circ \nabla$: $(NI) \otimes (NK) \to NK'$ est une homotopie $NF^0 \simeq NF^1$. Réciproquement, d'une homotopie D : $(NI) \otimes (NK) \to NK'$ entre NF^0 et NF^1 on obtient une homotopie $F^0 \simeq F^1$ par $N^{-1}(D \circ f)$: $I \times K \to K'$.

3.5 Corollaire. - Les homomorphismes F^0_*, F^1_* : $H_*(K) \to H_*(K')$ induits par des FD-homomorphismes homotopes F^0, F^1 sont égaux.

DÉMONSTRATION. - D'après 3.2, NK est canoniquement isomorphe au complexe normalisé de K (quotient de K par les éléments dégénérés ; voir [4], I) ; on peut donc identifier $H_*(K) = H_*(NK)$ et $F^i_* = (NF^i)_*$, d'où le corollaire.

4. Foncteurs dérivés des foncteurs $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ arbitraires ([3]).

Soient $G \in \mathcal{C}$ un module et $n \geq 0$ un entier. Une FD-résolution projective de (G, n) est un FD-complexe P dans $\mathcal{C}$ tel que

i. $P_q = 0$ pour $q < n$;

ii. $H_n(P) = G$, $H_q(P) = 0$ pour $q \neq n$;

iii. tous les P_q sont projectifs.

Pour tout (G, n) il existe une FD-résolution projective P. Si $f : G \to G'$ est un homomorphisme et P' une FD-résolution projective de (G', n), il y a un FD-homomorphisme $F : P \to P'$, et un seul à une homotopie près, tel que $F_* : H_n(P) \to H_n(P')$ est égal à f. En particulier, deux FD-résolutions projectives de (G, n) sont toujours homotopiquement équivalentes Tout ça résulte des propriétés analogues des résolutions ordinaires et de l'équivalence établie au paragraphe 3.

Soit maintenant $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur covariant. Le type d'homotopie de TP, resp. de TF, ne dépend que de (G, n), resp. de (f, n) (voir paragraphe 2) ; en particulier, $H_*(TP)$ et $(TF)_* : H_*(TP) \to H_*(TP')$ ne dépendent que de (G, n) et (f, n). On appelle q-ième foncteur dérivé (à gauche) de T le foncteur $L_q T$ qui est défini par $L_q T(G, n) = H_q(TP)$, $L_q T(f, n) = (TF)_{*_q} : H_q(TP) \to H_q(TP')$.

Si T est additif les foncteurs $G \to L_{k+t} T(G, t)$, pour $t = 0, 1 \ldots$, sont tous équivalents et coïncident avec l'usuel k-ième foncteur dérivé de T. Pour un T arbitraire il y a toujours un homomorphisme naturel $\sigma : L_q T(G, n) \to L_{q+1} T(G, n+1)$, la suspension (paragraphe 5), mais si T n'est pas additif, σ n'est plus un isomorphisme, en général.

GÉNÉRALISATION. - Soit $G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n$ un module gradué, $G_n \in \mathcal{C}$. Si P^n est une FD-résolution projective de (G_n, n), la somme directe $P = \sum_{n=0}^{\infty} P^n$ est par définition une FD-résolution projective de G, et l'on pose $L_q T(G_0, G_1, \ldots) = H_q(TP)$. Définition analogue pour $L_q T(f)$, où $f : G \to G'$ est un homomorphisme gradué.

EXEMPLES.

1° Soit G un groupe abélien (Z-module), soit TG son anneau de groupe, $T'G$ l'algèbre symétrique de G (sur Z). Alors $L_q T(G, n)$ et $L_q T'(G, n)$, $n > 0$, coïncident avec les groupes $H_q(G, n ; Z)$ d'Eilenberg-MacLane.

2° Soit $\Gamma \subset S_n$ un sous-groupe du groupe symétrique de degré n. Pour chaque module G (sur un anneau commutatif Λ) soit $TG = G^{\Gamma}$ le quotient de la n-ième puissance tensorielle $G \otimes G \otimes \ldots \otimes G$ par l'opération du groupe Γ. Les dérivés de T donnent l'homologie du Γ-produit X^{Γ} (analogue à G^{Γ}) d'un polyèdre X en fonction de $H_*(X)$: on a $H_q(X^{\Gamma}, \Lambda) = L_q T(H_0(X, \Lambda), H_1(X, \Lambda), \ldots)$, au moins si Λ est héréditaire.

5. La suspension.

Comme en géométrie, on peut définir le cône CK et la suspension SK d'un FD-complexe K. Le cône CK est contractile, i.e. homotopiquement équivalent à 0, et l'on a un isomorphisme naturel du complexe normal NSK sur NK, qui abaisse les degrés d'une unité. En particulier, si P est une FD-résolution projective pour (G, n), la suspension SP en est une pour $(G, n+1)$. On a aussi une suite exacte $0 \to K \xrightarrow{i} CK \xrightarrow{p} SK \to 0$, qui est triviale en tant que suite exacte de modules, i.e. $(CK)_q = K_q + (SK)_q$, $q \geqslant 0$.

Soit maintenant $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur tel que $T(0) = 0$. Alors $(Tp) \circ (Ti) = T(pi) = 0$, d'où un homomorphisme $(Ti)_* : H_q(TK) \to H_q$ (noyau de Tp). D'autre part $TSK \cong TCK/\text{noyau}\,(Tp)$ (Tp est un épimorphisme parce que $(CK)_q = K_q + (SK)_q$), et TCK est homotopiquement équivalent à 0 (paragraphe 2), donc l'homomorphisme-bord $\partial_* : H_{q+1}(TSK) \to H_q$ (noyau de Tp) est un isomorphisme. La suspension est l'homomorphisme composé

$$\sigma = \partial_*^{-1} \circ (Ti)_* : H_q(TK) \to H_{q+1}(TSK) \;;$$

en particulier, si $K = P$ est une FD-résolution projective de (G, n)

$$\sigma : L_q T(G, n) \to L_{q+1} T(G, n+1) \;.$$

On a la proposition ci-après

5.1 Proposition. - $\sigma : L_q T(G, n) \cong L_{q+1} T(G, n+1)$ pour $q < 2n$.

Pour des résultats plus précis on étudie "la déviation de l'additivité" de T (les "cross-effects") ; on suppose toujours $T(0) = 0$.

Pour A , $B \in \mathcal{C}$ on a $T(A + B) = TA + TB + T(A|B)$, où $T(A|B)$ est un foncteur de deux variables. En égalant les variables on obtient un foncteur $T_{[2]} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, $T_{[2]}A = T(A|A)$.

En appliquant T à "l'addition" $A + A \to A$ et à "la diagonale" $A \to A + A$ on construit des homomorphismes naturels

$$\alpha : T_{[2]}A \to TA \quad \text{et} \quad \beta : TA \to T_{[2]}A$$

d'où

$$\alpha_* : L_q T_{[2]}(G , n) \to L_q T(G , n) \quad \text{et} \quad \beta_* : L_q T(G , n) \to L_q T_{[2]}(G , n) .$$

5.2 <u>Proposition</u>.

1° $L_q T_{[2]}(G , n) = 0$ <u>pour</u> $q < 2n$.

2° <u>Dans la suite</u>

$$(5.3) \quad L_q T_{[2]}(G , n) \xrightarrow{\alpha_*} L_q T(G , n) \xrightarrow{S} L_{q+1} T(G , n + 1) \xrightarrow{\beta_*} L_{q+1} T_{[2]}(G , n + 1)$$

<u>le composé de deux homomorphismes consécutifs est</u> 0 ("la suspension tue les éléments décomposables et a comme image des éléments primitifs").

3° <u>La suite</u> 5.3 <u>est exacte pour</u> $q \leq 3n$.

Ces résultats et d'autres découlent d'une espèce de "bar-construction" qu'on peut définir dans ce cadre ([3]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[2] DOLD (Albrecht). - Homology of symmetric products and other functors of complexes, Annals of Math., Series 2, t. 68, 1958, p. 54-80.

[3] DOLD (A.) and PUPPE (D.). - Non-additive functors, their derived functors and the suspension homomorphism, Proc. nat. Acad. U. S. A. (à paraître).

[4] EILENBERG (S.) and MACLANE (S.). - On the group $H(\pi , n)$, I., Annals of Math., t. 58, 1953, p. 55-106 ; II., Annals of Math., t. 60, 1954, p. 49-139.

[5] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., Series 2, t. 9, 1957, p. 119-221.

[6] KAN (Daniel M.). - Functors involving c.s.s. complexes, Trans. Amer. math. Soc., t. 87, 1958, p. 330-346.