Séminaire N. Bourbaki

Jacques-Louis Lions

# Équations de Navier-Stokes

*Séminaire N. Bourbaki*, 1960, exp. nº 184, p. 223-238

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__223_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

par Jacques-Louis LIONS

## 1. - Le problème usuel.

On donne un ouvert $\Omega$ de $R^n$ ; $x \in \Omega$ ; $t$ désigne le temps ; on cherche un vecteur

$u(x,t)= (u_1(x,t) , \dots , u_n(x,t))$ , $x \in \Omega$ , $t \in [0,T]$ , $T$ fini ou infini, solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_k u_k D_k u = f - \rho^{-1} \operatorname{grad}_x p \quad , \tag{1.1}$$

$$\sum_i D_i u_i = 0 \quad , \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = a(x) = (a_k(x)) \text{ donné,} \tag{1.3}$$

$$u(x,t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma = \text{frontière de } \Omega \ . \tag{1.4}$$

Dans ces équations, on a posé :

$$D_i = \partial/\partial x_i \ ; \quad \Delta u = (\Delta u_k) \ ;$$

$u$ désigne le vecteur vitesse, $\nu > 0$ la viscosité, $\rho$ la masse spécifique, $f$ le champ de forces extérieures, $p$ la pression. Si $\Omega = R^n$ (problème de Cauchy) la condition (1.4) est remplacée par une condition de croissance à l'infini.

On veut démontrer que le problème ci-dessus, une fois posé de façon convenable, et avec des hypothèses convenables sur les données, admet une solution unique. On y arrivera dans une certaine mesure ...

Les mémoires fondamentaux sont ceux de LERAY [6] , [7] , [8] . Les contributions ultérieures les plus importantes sont celles de HOPF [2] , puis de KISELEV [3] , de KISELEV-LADYŽENSKAJA [4] et de LADYŽENSKAJA [5] .

Plan de l'exposé. - On introduit d'abord des espaces fonctionnels qui sont essentiels pour la résolution du problème. On introduit ensuite divers types de solutions faibles, dont on démontre, lorsque c'est possible, l'unicité, puis l'existence.

2. - Quelques espaces fonctionnels.

Toutes les fonctions utilisées sont réelles.

Sur un ouvert $\Omega$ quelconque de $R^n$, on désigne par $H^1(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions $u \in L^2(\Omega)$ avec $D_i u \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$ (dérivées distributions sur $\Omega$) ; muni de la norme

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u|^2 + \sum |D_i u|^2)\, dx\right)^{1/2}$$

c'est un espace de Hilbert.

On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ du sous-espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\Omega$. C'est le sous-espace de $H^1(\Omega)$ formé des fonctions "nulles au bord" (on peut donner un sens précis à cette phrase). Si $\Omega = R^n$ (plus généralement si $\complement \Omega$ est polaire)

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) .$$

Les deux lemmes qui suivent sont essentiels pour la suite. Ce sont des variantes des inégalités et des méthodes de SOBOLEV [10] et de GAGLIARDO [1]. Le lemme 2.1 est donné dans LADYŽENSKAJA [5], selon une idée de GELFAND (cas particulier de GAGLIARDO).

LEMME 2.1. - *On suppose* $n = 2$ ; *pour tout* $u \in \mathcal{D}(R^2)$, *on a* :

$$\int u^4\, dx \leq 2 \left(\int u^2\, dx\right)\left(\int (\text{grad } u)^2\, dx\right) . \tag{2.1}$$

DÉMONSTRATION. - Comme $u^2(x) = 2 \int_{-\infty}^{x_i} u\, D_i u\, dx_i$ on a

$$u^2(x) \leq 2\, v_1(x_2) \quad \text{où} \quad v_1(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|\, |D_1 u|\, dx_1 ,$$

et l'inégalité analogue en échangeant les indices 1 et 2. D'où :

$$\int u^4\, dx \leq 4\left(\int v_1(x_2)\, dx_2\right)\left(\int v_2(x_1)\, dx_1\right)$$

d'où (2.1) en appliquant Cauchy-Schwarz.

COROLLAIRE 2.1. - *$\Omega$ étant un ouvert quelconque de* $R^2$, *on a* : $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ *algébriquement et topologiquement.*

COROLLAIRE 2.2. - *L'inégalité* (2.1) *est vraie pour tout* $u \in H_0^1(\Omega)$,

$\Omega$ <u>quelconque dans</u> $R^2$ .

LEMME 2.2. - <u>Pour tout</u> $u \in \mathcal{D}(R^3)$ , $n = 3$ , <u>on a</u> :

$$\int u^4\,dx \leqslant k_1\left(\int u^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int (\mathrm{grad}\ u)^2\,dx\right)^{3/2} \tag{2.2}$$

<u>où l'on peut prendre</u> $k_1 = 2^9\,3^{-3-1/2}$ . (Remarque : il ne serait pas sans intérêt d'obtenir <u>la meilleure constante</u> possible dans (2.2)) .

DÉMONSTRATION. - Soit $\varphi$ dans $\mathcal{D}(R^3)$ , $w_1(x) = \sup_{x_1} |\varphi(x)|$ ; on a :

$$\int w_1(x)^2\,dx_2\,dx_3 \leqslant 2\int|\varphi|\,|D_1\varphi|\,dx \leqslant 2\left(\int|\varphi|^3\,dx\right)^{1/3}\left(\int|D_1\varphi|^{3/2}\,dx\right)^{2/3} ;$$

alors

$$\int|\varphi|^3\,dx \leqslant \int w_1\,w_2\,w_3\,dx \leqslant (\text{cf. GAGLIARDO [1]}) \prod_i\left(\int w_i^2\,dx_j\,dx_k\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_i 2^{1/2}\left(\int|\varphi|^3\,dx\right)^{1/6}\left(\int|D_i\varphi|^{3/2}\,dx\right)^{2/6} =$$

$$= 2^{3/2}\left(\int|\varphi|^3\,dx\right)^{1/2}\prod_i\left(\int|D_i\varphi|^{3/2}\,dx\right)^{1/3}$$

d'où

$$\int|\varphi|^3\,dx \leqslant 2^3\prod_i \|D_i\varphi\|_{L^{3/2}}$$

On applique cette inégalité avec $\varphi = |u|^{4/3}$ (ce qui est loisible) et un calcul facile donne le résultat.

On déduit d'abord de ce lemme que $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ ; mais il n'est pas difficile par la même méthode de démontrer que $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ . Ensuite

COROLLAIRE 2.3. - <u>L'inégalité</u> (2.2) <u>est vraie pour tout</u> $u \in H_0^1(\Omega)$ , $\Omega$ <u>ouvert quelconque de</u> $R^3$ .

Des inégalités (2.1) et (2.2) on déduit immédiatement le

LEMME 2.3. - <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$ , <u>il existe une constante</u> $c(\varepsilon)$ (indépendante de $\Omega$) <u>telle que</u>

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leqslant \varepsilon\left(\int_\Omega (\mathrm{grad}\ u)^2\,dx\right)^{1/2} + c(\varepsilon)\,\|u\|_{L^2(\Omega)} , \tag{2.3}$$

pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ ; la dimension $n$ est 2 ou 3 .

(Il n'est évidemment pas difficile de préciser $c(\varepsilon)$) .

COMPLÉMENTS. - Les inégalités (2.1) et (2.2) conduisent naturellement au problème suivant : si $\Omega$ est un ouvert de $R^n$ , est-il possible de trouver $\alpha$ et $\beta > 0$ , $\alpha + \beta = 2$ , avec

$$(2.4) \qquad \int_\Omega u^4\, dx \leq c\left(\int_\Omega u^2\, dx\right)^\alpha \left(\int_\Omega (\text{grad } u)^2\, dx\right)^\beta , \quad \text{pour tout } u \in H_0^1(\Omega) .$$

Si une telle inégalité est vraie, alors l'inégalité analogue est vraie en remplaçant $\Omega$ par une boule contenue dans $\Omega$ ; la propriété étant invariante par translation, on voit donc que (2.4) aura lieu pour $\Omega$ = boule de centre 0 , de rayon $a$ . Considérons alors

$$u_t(x) = \exp(-\,t|x|) - \exp(-\,ta) , \quad t > 0 ;$$

les fonctions $u_t$ sont dans $H_0^1(\Omega)$ et on vérifie facilement ceci :

$$\int_\Omega u_t^4\, dx = 0(t^{-n}) , \quad \int_\Omega u_t^2\, dx = 0(t^{-n}) , \quad \int_\Omega (\text{grad } u_t)^2\, dx = 0(t^{-n+2}) \quad t \longrightarrow \infty ;$$

de sorte que (2.4) n'est possible que si $n \leq 2\beta$ .

L'inégalité (2.4) est d'autant plus avantageuse que $\beta$ est petit, d'où les conclusions :

si $n = 2$ , (resp. $n = 3$) , la meilleure inégalité possible est (2.1), (resp. (2.2)) , (ce qui ne signifie pas que les constantes y sont les meilleures possibles) ; si $n > 4$ , il n'y a aucune inégalité du type (2.4) ; enfin si $n = 4$ , le raisonnement ci-dessus montre que s'il y a une inégalité du type (2.4) ce ne peut être qu'avec $\beta = 2$ ; l'inégalité correspondante est vraie : c'est le lemme de Sobolev.

On introduit maintenant les espaces fonctionnels utiles dans le problème de Navier-Stokes.

Espace H. - $H = (L^2(\Omega))^n$ .

Si $f = (f_i)$ , $g = (g_i)$ , on pose :

$$(f,g) = \sum_{i=1}^{n} (f_i, g_i)_{L^2(\Omega)} , \quad |f| = (f,f)^{1/2} ;$$

évidemment, H est un espace de Hilbert.

Espace V. – C'est l'adhérence dans $(H_0^1(\Omega))^n$ du sous-espace des $u=(u_i)$, tels que :

$$(2.5)\begin{cases} u_i \text{ est deux fois continument différentiable dans } \bar{\Omega}\text{, à support compact} \\ \text{dans } \Omega\text{, nulle au bord ;}\end{cases}$$

$$\sum D_i\, u_i = 0\,. \tag{2.6}$$

Muni de la norme $||u||_V$ induite par la norme sur $(H_0^1(\Omega))^n$, c'est un espace de Hilbert.

Pour $u,v$ dans $V$ nous poserons :

$$((u,v)) = \sum_i \int_\Omega \sum_j D_j u_i\, D_j v_i\, dx \quad , \qquad ||u|| = ((u,u))^{1/2}\,. \tag{2.7}$$

Attention : $||u||$ n'est donc pas la norme dans $V$ ; c'est une norme, équivalente ou non à $||u||_V$, selon $\Omega$ (voir plus loin).

REMARQUES.

1) $V$ n'est pas dense dans $H$ (à cause de (2.6)).

2) $V$ est un sous-espace de l'espace des $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ tels que $\sum D_i\, u_i = 0$ ; on peut voir dans de nombreux cas que $V$ coïncide avec cet espace, mais je ne sais pas si cela est vrai avec $\Omega$ quelconque.

3. – Solutions faibles.

Toutes les fonctions intervenant dans le problème sont désormais considérées comme des fonctions de $t$ à valeurs dans des espaces variés (en $x$).

Si $u$ est solution du problème (1.1) ... (1.4) et si $\Phi$ est une fonction "régulière" de $x$ et de $t$, vérifiant :

$$\sum D_i\, \phi_i = 0 \quad , \quad \phi(x,t) = 0 \ \text{ si } \ x \in \Gamma \quad , \tag{3.1}$$

on aura

$$(3.2) \qquad \int_0^T \Big\{ (u'(t)\,,\phi(t)) + \nu\,((u(t)\,,\,\phi(t)))\Big\}\, dt \, +$$

$$+\int_{\Omega\times(0,T)} \sum u_k(D_k\, u_i)\, \phi_i \;\, dx\, dt = \int_0^T (f(t)\,,\,\phi(t))\, dt$$

(avec les notations du n° 2 ; par ailleurs $u' = D_t\, u$), sans oublier les conditions

(1.2) , (1.3) , (1.4) .

On tiendra compte de (1.2) et (1.4) , dans un sens généralisé, si l'on impose à $u$ d'être à valeurs dans $V$ , et de la même façon on tient compte de (3.1) si l'on impose à $\Phi$ d'être à valeurs dans $V$ .

Par ailleurs le terme non linéaire dans (3.2) conduit à l'introduction de la forme trilinéaire :

$$b(u,v,w) = \sum_{i,k} \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) w_i \, dx \; ; \tag{3.3}$$

pour simplifier le langage et l'écriture, on posera :

$$L^4 = (L^4(\Omega))^n \; ; \tag{3.4}$$

la forme (3.3) est continue sur $L^4 \times V \times L^4$ , et par conséquent, d'après les remarques du n° 2 , la forme (3.3) est continue sur $V \times V \times V$ , si $n \leqslant 4$ .

LEMME 3.1. - Pour $u,v,w \in V$ , $n \leqslant 4$ , on a :

$$b(u,v,w) + b(u,w,v) = 0 , \tag{3.5}$$

donc

$$b(u,v,v) = 0 . \tag{3.6}$$

Immédiat par intégration par partie (loisible) et (2.6).
De l'inégalité de Holder (à trois facteurs) et de (3.5) on déduit :

$$\begin{cases} |b(u,v,w)| \leqslant k_2 \; |u|_{L^4} \; ||v|| \; |w|_{L^4} \; , \\ \qquad\qquad\quad \leqslant k_2 \; |u|_{L^4} \; |v|_{L^4} \; ||w|| \; . \end{cases} \tag{3.7}$$

Le terme non linéaire dans (3.2) peut s'écrire, en utilisant (3.5) :

$- \int_0^T b(u(t) \, , \, \phi(t) \, , \, u(t)) \, dt$ , d'où le problème suivant :

Problème faible associé au problème usuel. - On cherche $u \in L^2(0,T;V)$ [1] , avec $u' \in L^2(0,T;H)$ , tel que

---

[1] espaces des fonctions de carré sommable sur $(0,T)$ à valeurs dans $V$ .

$$(3.8)\quad \int_0^T \left\{ (u'(t)\,,\,\phi(t)) + \nu((u(t)\,,\phi(t))) - b(u(t)\,,\phi(t),\,u(t)) \right\} dt = \\ = \int_0^T (f(t)\,,\,\phi(t))\,dt\,,$$

pour tout $\phi \in L^2(0,T;V)$ , f étant donnée dans $L^2(0,T;H)$ , avec

$$(3.9)\qquad u(0) = a \quad \text{donné dans } V\,,$$

avec la condition supplémentaire (KISELEV-LADYŽENSKAJA) :

$$(3.10)\qquad u \in L^\infty(0,T;L^4) \quad (\text{sur tout compact si } T = \infty)\,,$$

(pour des remarques sur cette condition, voir Compléments du n°4) .

Naturellement il faut vérifier que ce que l'on a écrit a un sens, donc deux choses :

a) $\int_{\Omega\times(0,T)} u_k(D_k\phi_1)\,u_i\,dx\,dt$ a un sens, en dimension $n \leq 3$ ,

avec les hypothèses faites sur $u$ et $\phi$ , grâce à SOBOLEV ; donc si $n \geqslant 4$ , le problème ci-dessus n'a pas de sens ; il faut changer d'espaces.

b) (3.9) a un sens, ce qui est vrai : $u$ est continue à valeurs dans $H$ .

Un problème plus faible. - On intègre par parties en $t$ dans le premier terme de (3.8) ; on est ainsi conduit à chercher $u$ dans $L^2(0,T;V)$ , avec

$$(3.11)\quad \int_0^T \left\{ - (u(t)\,,\phi'(t)) + \nu((u(t)\,,\,\phi(t))) - b(u(t)\,,\,\phi(t),\,u(t)) \right\} dt = \\ = \int_0^T (f(t)\,,\,\phi(t))\,dt - (a,\,\phi(0))\,,$$

pour tout $\phi$ continue à valeurs dans $V$ , $\phi(T) = 0$ (ou $\phi$ à support compact en $t$ , si $T=\infty$ ) , $\phi'$ étant dans $L^2(0,T;H)$ .

Les solutions de (3.11) sont essentiellement les solutions turbulentes de Leray.

On peut montrer l'existence d'une solution de ce problème, en dimension $n \leq 4$ . L'unicité n'est pas résolue. Moyennant des conditions supplémentaires, l'unicité est démontrée par PRODI [9] , mais alors on ne sait plus si l'existence est vraie ...

Des solutions plus faibles ont été considérées par HOPF, [2] .

## 4. - Unicité de la solution faible.

THÉORÈME 4.1. (KISELEV-LADYŽENSKAJA [4] ). - En dimension $n = 2$ ou $3$ , $\Omega$ étant un ouvert quelconque, le problème faible admet au plus une solution.

DÉMONSTRATION. - Soient $u$ et $v$ deux solutions du problème faible ; posons $w = u - v$ ; alors

$$(4.1) \qquad \int_0^T \Big\{ (w'(t), \phi(t)) + \nu ((w(t), \phi(t))) + b(v(t), \phi(t), v(t)) - b(u(t), \phi(t), u(t)) \Big\} dt = 0 ,$$

avec

$$(4.2) \qquad w(0) = 0 .$$

On choisit, ce qui est loisible, $\phi(t) = w(t)$ si $t < s$, $\phi(t) = 0$ si $t > s$ ; on déduit de (4.1) :

$$(4.3) \qquad \frac{1}{2} |w(s)|^2 + \nu \int_0^s ||w(t)||^2 dt = \int_0^s b(w(t), w(t), u(t)) dt$$

d'où en utilisant (3.7) :

$$(4.4) \quad \frac{1}{2} |w(s)|^2 + \nu \int_0^s ||w(t)||^2 dt \leq k_2 \int_0^s |w(t)|_{L^4} ||w(t)|| \, |u(t)|_{L^4} dt .$$

Mais $|u(t)|_{L^4}$ est borné par hypothèse ((3.10)). Donc (les $c_i$ désignant des constantes) :

$$(4.5) \qquad |w(s)|^2 + \int_0^s ||w(t)||^2 dt \leq c_1 \int_0^s |w(t)|_{L^4} ||w(t)|| dt ..$$

On utilise maintenant le lemme 2.3 : le deuxième membre est majoré par

$$\varepsilon \int_0^s ||w(t)||^2 dt + c_2(\varepsilon) \int_0^s |w(t)| \, ||w(t)|| dt ,$$

d'où aussitôt :

$$|w(s)|^2 + \int_0^s ||w(t)||^2 dt \leq c_3 \int_0^s |w(t)|^2 dt ,$$

ce qui implique $w = 0$.

C. Q. F. D.

Compléments.

THÉORÈME 4.2. - En dimension 2, il y a unicité des solutions faibles même ne vérifiant pas (3.10) ($\Omega$ quelconque).

DÉMONSTRATION. - Pas de changement jusqu'en (4.3) ; on en tire :

$$(4.6) \quad \frac{1}{2}\,|w(s)|^2 + \nu\int_0^s ||w(t)||^2\,dt \leq k_2\int_0^s |w(t)|^2_{L^4}\,||u(t)||\,dt$$

d'où, avec (2.1) :

$$|w(s)|^2 + \int_0^s ||w(t)||^2\,dt \leq c_4\int_0^s |w(t)|\,||w(t)||\,||u(t)||\,dt \leq$$

$$\leq (1/2)\int_0^s ||w(t)||^2\,dt + c_5\int_0^s |w(t)|^2\,||u(t)||^2\,dt$$

d'où en particulier

$$|w(s)|^2 \leq c_5\int_0^s |w(t)|^2\,||u(t)||^2\,dt\,,$$

ce qui, $||u(t)||^2$ étant sommable, implique $w = 0$ .

Cas de la dimension 3. - On déduit cette fois de (4.4) , en utilisant (2.2) :

$$(4.7) \quad |w(s)|^2 + \int_0^s ||w(t)||^2\,dt \leq c_6\int_0^s |w(t)|^{1/4}\,|u(t)|_{L^4}\,||w(t)||^{7/4}\,dt\,.$$

On va en déduire :

THÉORÈME 4.3. - En dimension $n = 3$ , il y a unicité des solutions faibles où l'on remplace (3.10) par la condition moins restrictive :

$$(4.8) \qquad u \in L^8(0,T;L^4) \qquad (\Omega \text{ quelconque})\,.$$

(Ce théorème (et des variantes de ce résultat) est dû à G. PRODI [9] , par une méthode différente).

DÉMONSTRATION. - On utilise dans (4.7) l'inégalité

$$|w(t)|^{1/4}\,|u(t)|_{L^4}\,||w(t)||^{7/4} \leq \varepsilon||w(t)||^2 + c(\varepsilon)\,|w(t)|^2\,|u(t)|^8_{L^4}$$

d'où l'on déduit, par un choix convenable de $\varepsilon$ :

$$(4.9) \qquad |w(s)|^2 \leq c_7\int_0^s |w(t)|^2\,|u(t)|^8_{L^4}\,dt\,,$$

ce qui avec (4.8) implique $w = 0$ .

REMARQUE 4.1. - On ne sait pas si en dimension 3 on peut supprimer toute hypothèse du genre (4.8) .

## 5. - Majorations a priori.

On donne maintenant une fonction $u$ ayant les propriétés suivantes :

(5.1) u est deux fois continûment différentiable dans $[0,T]$ à valeurs dans $V$ ;

$$(5.2)\begin{cases}\text{pour tout } v \in V\,,\ t \in [0,T]\,, \text{ on a}\\ (u'(t),v) + \nu((u(t),v)) - b(u(t),v,u(t)) = (f(t),v)\end{cases},$$

où $f$ est une fois continûment différentiable à valeurs dans $H$, avec

$$(5.3)\qquad u(0) = a \in V\,.$$

<u>Majorations du premier type</u>. - On fait $v = u(t)$ dans (5.2), ce qui est loisible, et d'après (3.6) <u>élimine les termes non linéaires</u>. Il vient

$$(5.4)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu\,||u(t)||^2 = (f(t),u(t))\,.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = |u(t)|\,\frac{d}{dt}|u(t)| \leq |f(t)|\,|u(t)|$$

d'où

$$|u(t)| \leq |a| + \int_0^t |f(\sigma)|\,d\sigma\,.$$

Intégrant ensuite (5.4) de $0$ à $t$, on en tire le lemme suivant :

LEMME 5.1. - <u>Si</u> $u$ <u>vérifie</u> (5.1), (5.2), (5.3), <u>on a</u> :

$$\int_0^T \left\{|u(t)|^2 + ||u(t)||^2\right\} dt \leq c\left(|a|\,, \int_0^T |f(\sigma)|^2\,d\sigma\right), \quad T \text{ fini},$$

(où $c(\alpha,\beta,\ldots)$ désigne une quantité ne dépendant que de $\alpha,\beta,\ldots$).

<u>Majorations du deuxième type</u>. - On dérive (5.2) en $t$, et on prend $v = u'(t)$ dans le résultat ; il vient :

$$(5.5)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'(t)|^2 + \nu\,||u'(t)||^2 = b(u'(t),u'(t),u(t)) + (f'(t),u'(t))$$

d'où

$$(5.6)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'(t)|^2 + \nu\,||u'(t)||^2 \leq k_2\,|u'(t)|^2_{L^4}\cdot||u(t)|| + |f'(t)|\,|u'(t)|\,.$$

<u>Cas de la dimension</u> 2 (LADYŽENSKAJA [5]). - Utilisant (2.1) dans (5.6) et intégrant de $0$ à $t$, il vient

$$|u'(t)|^2 - |u'(0)|^2 + 2\nu\int_0^t ||u'(\sigma)||^2\,d\sigma \leq$$

$$\leq 4\,k_2\int_0^t |u'(\sigma)|\,||u'(\sigma)||\,||u(\sigma)||\,d\sigma + 2\int_0^t |f'(\sigma)|\,|u'(\sigma)|\,d\sigma \leq$$

$$\leq \nu\int_0^t ||u'(\sigma)||^2\,d\sigma + k_3\int_0^t |u'(\sigma)|^2\,||u(\sigma)||^2\,d\sigma + 2\int_0^t |f'(\sigma)|\,|u'(\sigma)|\,d\sigma$$

d'où

$$(5.7)\quad \begin{cases} |u'(t)|^2 - |u'(0)|^2 + \nu \displaystyle\int_0^t ||u'(\sigma)||^2 \, d\sigma \leq \\ \leq k_4 \displaystyle\int_0^t (||u(\sigma)||^2 + 1) \, |u'(\sigma)|^2 \, d\sigma + k_4 \displaystyle\int_0^t |f'(\sigma)|^2 \, d\sigma \quad . \end{cases}$$

Etudions $|u'(0)|$ ; on déduit de (5.2) et (5.3) que

$$(u'(0),v) = (f(0),v) - \nu((a,v)) + b(a,v,a) \quad .$$

DÉFINITION 5.1. – On désigne par $\mathcal{Q}$ le complété de l'espace des fonctions $u = (u_1 , \dots , u_n)$ vérifiant (2.5) et (2.6) pour la norme

$$(5.8)\quad |||u||| = ||u||_v + \sum_{j,k,\ell} \left( \int_\Omega \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \, \partial x_\ell} u_j(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \quad .$$

Si maintenant $a \in \mathcal{Q}$ , on voit facilement que

$$(u'(0),v) = (f(0) + g,v)$$

où

$$g = \nu \Delta a - \sum_k D_k(a_k \, a) \in H \quad ; \text{ donc}$$

$$(5.9)\qquad |u'(0)| \leq |f(0) + g| \quad .$$

(L'hypothèse $a \in \mathcal{Q}$ n'est pas faite dans LADYŽENSKAJA [5] ; il me semble qu'il s'agit d'un oubli).

On déduit alors de (5.7) :

$$|u'(t)|^2 \leq h(t) + \int_0^t \phi(\sigma) |u'(\sigma)|^2 \, d\sigma$$

où

$$h(t) = |f(0) + g|^2 + k_4 \int_0^t |f'(\sigma)|^2 \, d\sigma \quad ,$$

$$\phi(t) = ||u(t)||^2 + 1 \quad , \quad \in L^1(0,T) \quad .$$

Il en résulte :

$$|u'(t)|^2 \leq h(t) \exp\left( \int_0^t \phi(\sigma) \, d\sigma \right) \quad ,$$

d'où

$$|u'(t)|^2 \leq c(|||a|||, \int_0^T (|f(\sigma)|^2 + |f'(\sigma)|^2) d\sigma)\ , \quad t \leq T \text{ fini.}$$

De cette inégalité, de (5.7), et du lemme 5.1 , on déduit :

PROPOSITION 5.1. - <u>On suppose que</u> u <u>vérifie</u> (5.1) , (5.2) , (5.3) ; $\Omega$ <u>est un ouvert quelconque de</u> $R^2$ ; $a \in \mathcal{a}$ , $f$ , $f' \in L^2(0,T;H)$ . <u>Alors</u>

$$\int_0^T \left\{ |u(t)|^2 + ||u(t)||^2 + |u'(t)|^2 + ||u'(t)||^2 \right\} dt \leq c(|||a|||, \int_0^T (|f(\sigma)|^2 + |f'(\sigma)|^2) d\sigma)$$

<u>Cas de la dimension</u> 3. - Lorsque $n = 3$ , on n'a pas de résultat aussi satisfaisant que la proposition 5.1. Les résultats suivants sont dus à KICELEV-LADYŽENSKAJA [4] pour $\Omega$ borné (ces auteurs n'ont pas (2.2), mais l'utilisation de (2.2), si elle permet des démonstrations peut être un peu plus simples, ne semble pas (?) conduire à des améliorations de ces résultats ; les démonstrations, très techniques, ne sont pas données ici) :

PROPOSITION 5.2. - <u>On suppose que</u> u <u>vérifie</u> (5.1) , (5.2) , (5.3) ; $\Omega$ <u>est un ouvert quelconque de</u> $R^3$ , $a \in \mathcal{a}$ . <u>Il existe un nombre</u> $T_0 = T_0(a,f;\Omega,\nu)$ <u>tel que</u>

$$\int_0^{T_0} \left\{ |u(t)|^2 + ||u(t)||^2 + |u'(t)|^2 + ||u'(t)||^2 \right\} dt \leq c(|||a|||, \int_0^{T_0} (|f(t)|^2 + |f'(t)|^2) dt)$$

PROPOSITION 5.3. - <u>On suppose que</u> u <u>vérifie</u> (5.1) , (5.2) , (5.3) ; $\Omega$ <u>est un ouvert de</u> $R^3$ <u>sur lequel les normes</u> $||u||$ <u>et</u> $||u||_V$ <u>sont équivalentes ;</u> $a \in \mathcal{a}$ ; $f$ <u>est un gradient</u> ; $|u'(0)|$ <u>est assez petit</u> ; $T = \infty$ . <u>Dans ces conditions,</u>

$$\int_0^\infty \left\{ |u(t)|^2 + ||u(t)||^2 + |u'(t)|^2 + ||u'(t)||^2 \right\} dt \leq c(|||a|||) \quad .$$

REMARQUES.

1) Si $BL(\Omega)$ désigne l'espace des distributions $T$ sur $\Omega$ telles que $D_i T \in L^2(\Omega)$ pour tout $i$ , alors l'espace des grad. $T$ , $T \in BL(\Omega)$ , est fermé dans $H$ ; soit grad. $BL(\Omega)$ cet espace ; dire que $f$ est un gradient signifie que $f$ est à valeurs dans grad. $BL(\Omega)$ . On a alors $(f(t),v) = 0$ pour tout $v \in V$ .

2) Les normes $||u||$ et $||u||_V$ sont équivalentes sur $V$ si par exemple la projection de $\Omega$ sur une droite $L$ convenable de $R^3$ est bornée.

## 6. - Théorèmes d'existence.

Il y a plusieurs méthodes possibles pour déduire les théorèmes d'existence des majorations du n°5 . La plus simple semble être celle de FAEDO-GALERKINE, que l'on va donner.

On considère une base $\psi^1 , \psi^2 , \ldots , \psi^j , \ldots$ de $V$ formée de fonctions ayant les propriétés (2.5) et (2.6).

On désigne par $u^n(t)$ :

$$u^n(t) = \sum g_{in}(t)\, \psi^i \tag{6.1}$$

une solution approchée du problème, caractérisée par le système différentiel ordinaire du premier ordre, non linéaire :

$$\begin{cases} (D_t\, u^n(t), \psi^j) + \nu((u^n(t), \psi^j)) - b(u^n(t), \psi^j , u^n(t)) = (f(t), \psi^j) \\ j = 1 , \ldots , n , \end{cases} \tag{6.2}$$

avec

$$g_{in}(0) = \alpha_{in} , \tag{6.3}$$

où les $\alpha_{in}$ vérifient

$$|||a - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} \psi^i||| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty . \tag{6.4}$$

Ceci définit les $g_{in}(t)$ une fois continûment différentiables dans un intervalle $[0,T_n]$ , $T_n \leq T$ , et a priori $T_n$ dépendant de $n$ .

Dans l'intervalle $[0,T_n]$ les majorations du n°5 sont valables (immédiat). Il résulte alors du lemme 5.1 que l'on peut prendre $T_n = T$ quel que soit $n$ .

On est en mesure maintenant de démontrer les théorèmes qui suivent :

THÉORÈME 6.1 (LADYŽENZKAJA [5] ). - On suppose que $n = 2$ ; $\Omega$ est quelconque ; on donne $a$ dans $G$, $f,f' \in L^2(0,T;H)$, $T$ fini ou non. Le problème faible admet une solution unique.

THÉORÈME 6.2 (KISELEV-LADYŽENSKAJA [4], avec $\Omega$ borné). - On suppose que $n = 3$ ; $\Omega$ est quelconque ; on donne $a$ dans $G$, $f,f' \in L^2(0,T;H)$ . Il existe $T_0 > 0$ tel que le problème faible admet une solution unique dans $(0,T_0)$ . (Problème : peut-on prendre $T_0 = T$ ?) .

THÉORÈME 6.3 (KISELEV-LADYŽENSKAJA [4] , avec $\Omega$ borné). - On suppose que $n = 3$; $\Omega$ est (par exemple) d'épaisseur bornée dans une direction ; on donne $a$ dans

$\mathcal{A}$ ; f <u>est un gradient,</u> $T = \infty$ . <u>On suppose enfin que</u> $|u'(0)|$ <u>est assez petit</u> (ceci est une condition sur a ) . <u>Le problème faible admet une solution unique</u>.

<u>Complément</u> : la démonstration montre que u et u' sont dans ce cas dans $L^2(0, \infty; V)$ ce qui implique : $||u(t)||_V \longrightarrow 0$ <u>lorsque</u> $t \longrightarrow +\infty$ .

DÉMONSTRATION. - La démonstration des trois théorèmes se fait simultanément ; le théorème 6.1 repose sur la proposition 5.i , i = 1 , 2 , 3 .

Il résulte de ces propositions que l'on peut extraire de la suite $u^n$ une suite $u^\alpha$ telle que $u^\alpha \longrightarrow w$ dans $L^2(0,T;V)$ <u>faible</u>, $D_t u^\alpha \longrightarrow w'$ dans $L^2(0,T;V)$ faible (remplacer T par $T_0$ dans le cas du théorème 6.2).

On va démontrer que w est la solution faible cherchée.

On note d'abord que $u^\alpha(0) \longrightarrow w(0)$ dans V faible ; comme d'après (6.3) et (6.4) , $u^\alpha(0) \longrightarrow a$ dans $\mathcal{A}$ , on a : $w(0) = a$ .

Par ailleurs w et w' étant dans $L^2(0,T;V)$ , w est continue à valeurs dans V , ce qui implique en particulier (3.10) (cf. en outre le théorème 4.2, si n = 2) .

Le seul point non trivial est donc de vérifier que

$$(6.5) \quad \int_0^T \left\{ (w'(t), \phi(t)) + \nu((w(t), \phi(t)) - b(w(t), \phi(t), w(t)) \right\} dt = \\ = \int_0^T (f(t), \phi(t))\, dt$$

pour tout $\phi \in L^2(0,T;V)$ .

Considérons pour cela m fonctions $\varphi^j(t)$ continues dans $[0,T]$ (et nulles pour t assez grand, si $T = \infty$) , et soit

$$(6.6) \qquad \phi(t) = \sum_{j=1}^m \varphi^j(t)\, \psi^j \quad .$$

On déduit de (6.2) que pour $\alpha \geqslant m$ ,

$$(6.7) \int_0^T \left\{ (D_t u(t), \phi(t)) + \nu((u^\alpha(t), \phi(t))) - b(u^\alpha(t), \phi(t), u^\alpha(t)) \right\} dt = \\ = \int_0^T (f(t), \phi(t))\, dt$$

pour $\phi$ de la forme (6.6) .

On a évidemment, lorsque $\alpha \longrightarrow \infty$ ,

$$\int_0^T (D_t u^\alpha(t), \phi(t))dt \longrightarrow \int_0^T (w'(t), \phi(t))dt$$

et

$$\int_0^T ((u^\alpha(t), \phi(t)))dt \longrightarrow \int_0^T ((w(t), \phi(t)))dt .$$

Admettons un instant que

$$(6.8) \quad \int_0^T b(u^\alpha(t), \phi(t), u^\alpha(t))dt \longrightarrow \int_0^T b(w(t), \phi(t), w(t))dt .$$

On déduira alors de (6.7) que (6.5) a lieu pour tout $\phi$ de la forme (6.6) , et donc (les fonctions de cette forme étant dense dans $L^2(0,T;V)$) pour tout $\phi \in L^2(0,T;V)$ .

Reste donc uniquement à vérifier (6.8) . Il suffit de vérifier à cet effet que, pour tout $i$ et $k$ ,

$$\int_{\Omega\times(0,T)} u_k^\alpha(x,t)(D_k \phi_i(x,t)) \ u_i^\alpha(x,t) \ dx \ dt \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \int_{\Omega\times(0,T)} w_k(x,t)(D_k \phi_i(x,t)) \ w_i(x,t) \ dx \ dt .$$

Si $T$ est infini, les $\varphi^j$ sont à support compact ; dans tous les cas les $\psi^j$ sont à support compact dans $\bar{\Omega}$ . Donc les intégrales ci-dessus sont en fait prises sur un compact de $\bar{\Omega} \times [0,T]$ . Comme $D_k \phi_i(x,t)$ est continue sur ce compact, soit $K$ , il reste seulement à montrer que $u_i^\alpha \longrightarrow w_i$ dans $L^2(K)$ fort. Or on sait que $u_i^\alpha$ , $D_j u_i^\alpha$, $j = 1 , \dots , n$ et $D_t u_i^\alpha$ sont bornés dans $L^2(\Omega\times(0,T))$, nulles au bord de $\Omega$ . Dans ces conditions $u_i^\alpha \longrightarrow w_i$ dans $L^2(K)$ fort est bien connu. Les trois théorèmes sont démontrés.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] GAGLIARDO (Emilio). - Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili, Ricerche di Mat., t. 7, 1958, p. 102-137.

[2] HOPF (Erhard). - Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachr., t. 4, 1950/51, p. 213-231.

[3] KISELEV (A. A.). - Nestacionarnoe tečenie vjazkoj nesžimaemoj zidkosti v ograničennoj trekhmernoj oblasti, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 106, 1956, p. 27-30.

[4] KISELEV (A. A.) i LADYŽENSKAJA (O. A.). - O suščestvovanii i edinstvennosti rešenija nestacionarnoj zadači dlja vjazkoj nesžimaemoj židkosti, Izvestia Akad. Nauk SSSR, Serija Mat., t. 21, 1957, p. 655-680.

[5] LADYŽENSKAJA (O. A.). - Rešenie "v celom" kraevoj zadači dlja uravnenij nav'e-stoksa v slučae dvukh prostranstvennykh peremennykh, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 123, 1958, p. 427-429.

[6] LERAY (Jean). - Etudes de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, J. Math. pures et appl., Serie 9, t. 12, 1933, p. 1-82.

[7] LERAY (Jean). - Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, J. Math. pures et appl., Serie 9, t. 13, 1934, p. 331-418.

[8] LERAY (Jean). - Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Mat., t. 63, 1934, p. 193-248.

[9] PRODI (G.). - A paraître.

[10] SOBOLEV (S.). - Ob odnoj teoreme funkcional'nogo analiza, Recueil math. Soc. math. Moscou (Mat. Sbornik), N. S., t. 4 (46), 1938, p. 471-497.