

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ALBRECHT DOLD

## Structure de l'anneau de cobordisme $\Omega$

*Séminaire N. Bourbaki*, 1960, exp. n° 188, p. 273-286

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1958-1960\\_\\_5\\_\\_273\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__273_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

STRUCTURE DE L'ANNEAU DE COBORDISME  $\Omega$

d'après les travaux de V. A. ROKHLIN et de C. T. C. WALL

par Albrecht DOLD

D'après THOM ([9], IV) deux variétés <sup>(1)</sup> orientées  $M^q, M'^q$  (de dimension  $q$ ) sont cobordantes,  $M \sim M'$ , s'il existe une variété  $B^{q+1}$  de bord  $M + (-M')$ , où  $-M'$  est la variété  $M'$  avec l'orientation opposée, et où  $+$  dénote la réunion (disjointe).  $\sim$  est une relation d'équivalence, compatible avec les opérations  $M^q + M'^q$  et  $M^q \times M'^r$ . Les classes d'équivalence forment un anneau gradué

$$\Omega = \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_q, \quad \Omega_0 = \mathbb{Z},$$

par rapport à ces opérations ; c'est l'anneau de cobordisme (orienté).

Si l'on n'exige pas d'orientation, on obtient de façon analogue un anneau

$$\mathfrak{N} = \sum \mathfrak{N}_q ;$$

c'est une algèbre sur  $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

THOM démontre ([9], IV) :

1°  $\Omega_q$  et  $\mathfrak{N}_q$  sont à engendrement fini.

2° L'algèbre  $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Q}$  est une algèbre polynomiale, admettant comme générateurs les classes des espaces projectifs complexes  $P_{2k} \mathbb{C}$  de dimension paire.

3°  $\mathfrak{N}$  est une algèbre polynomiale admettant comme générateurs les espaces projectifs réels  $P_{2k} \mathbb{R}$  de dimension paire et certaines variétés  $V_{2k-1}$ ,  $k \neq 2^n$ , construites en [1].

MILNOR ([4] et [10]) montre que déjà  $\Omega$  mod torsion est polynomiale, et construit des générateurs. De plus, il n'y a pas de torsion impaire dans  $\Omega$ . Il reste donc à calculer la 2-torsion.

ROKHLIN dans [6] annonçait sans démonstration une construction intéressante qui

<sup>(1)</sup> Variété = variété différentiable de classe  $C^\infty$ , compacte, mais non nécessairement connexe, et, (sauf mention du contraire), fermée, i. e. sans bord.

donne quelques renseignements sur  $\Omega \otimes \mathbb{Z}_2$  ; elle est expliquée dans l'Appendice de cette rédaction. Plus tard ([7]), il donnait un résultat complet sur la 2-torsion, mais sa démonstration est lacunaire (celle de  $K_2 \subset K_3$ ), et THOM a remarqué, il y a quelques années, au cours d'une conversation, qu'un tel résultat ne pouvait être correct.

Récemment, WALL ([11], [12]) a calculé la 2-torsion ; il obtient la structure complète de  $\Omega$ , et d'autres résultats. Il retrouve d'ailleurs et utilise une partie de [6].

Cet exposé s'appuie surtout sur [12].

### 1. La suite exacte de Wall.

Soit  $M^q$  une variété, éventuellement à bord. Soit  $W_1 \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$  sa première classe de Stiefel-Whitney, et soit  $V^{q-1} \subset M^q$  une sous-variété qui représente  $W_1$  (par dualité de Poincaré). On obtient  $V$  en prenant une application  $f$  de classe  $C^\infty$  de  $M$  dans un espace projectif réel  $P_N R$  (de haute dimension  $N$ ), qui envoie la classe non-nulle de  $H^1(P_N R; \mathbb{Z}_2)$  dans  $W_1$  ; on peut supposer  $f$  transversalement régulière ([9], I, n° 3-4) sur un hyperplan  $P_{N-1} R \subset P_N R$  et on prend  $V = f^{-1}(P_{N-1} R)$ . Par définition de  $V$  le nombre d'intersection d'un chemin fermé  $s$  dans  $M$  avec  $V$  est 1 mod 2 si et seulement si  $s$  renverse l'orientation de  $M$ . Ceci montre que  $M - V$  est orientable, et  $V$  aussi (de l'orientation induite).

Soient maintenant  $M, M'$  des variétés fermées cobordantes, et soit  $B$  une variété de bord  $M + (-M')$ . Si  $V \subset M, V' \subset M'$  représentent  $W_1(M), W_1(M')$  on peut choisir la variété  $C \subset B$  qui représente  $W_1(B)$  de telle manière que  $C \cap M = V, C \cap M' = V'$  (on peut étendre à tout  $B$  l'application donnée  $M \cup M' \rightarrow P_N R$ ). Ceci montre que, au signe près, les classes de cobordisme  $[V]_\Omega, [V']_\Omega$  sont égales. Mais on va voir que  $2[V]_\Omega = 0$  ; le signe ne jouera donc pas de rôle, et on aura défini un homomorphisme.

$$(1.1) \quad D : \mathcal{R}_q \rightarrow \Omega_{q-1}, \quad D[M]_{\mathcal{R}} = [V]_\Omega \quad .$$

Supposons que  $W_1(M)$  provienne d'une classe entière (voir l'Appendice pour le cas général). Alors l'application

$$f : M \rightarrow P_N R$$

qui donne  $V$  peut être choisie comme application

$$M \rightarrow P_1 R = S^1 \quad ,$$

et  $V$  comme contre-image d'un point, donc avec fibré normal trivial dans  $M$ .  
Si maintenant on coupe  $M$  suivant  $V$  on obtient une variété orientable de bord  $\pm 2V$  ,

C. Q. F. D.

Désignons par  $\mathfrak{M}_q$  le sous-groupe de  $\mathfrak{R}_q$  qui se compose des éléments  $[M]_{\mathfrak{R}}$  , tels que  $W_1(M)$  provienne d'une classe entière, et soit

$$(1.2) \quad d : \mathfrak{M}_q \rightarrow \Omega_{q-1} \quad , \quad d[M]_{\mathfrak{R}} = [V]_{\Omega}$$

l'homomorphisme qu'on vient de définir. Enfin, soit  $r : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  l'homomorphisme qui fait oublier l'orientation ; il est clair que

$$r(\Omega_q) \subset \mathfrak{M}_q \quad .$$

1.3. THÉORÈME. - La suite :

$$\dots \rightarrow \Omega_q \xrightarrow{2} \Omega_q \xrightarrow{r} \mathfrak{M}_q \xrightarrow{d} \Omega_{q-1} \xrightarrow{2} \Omega_{q-1} \longrightarrow$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. - L'exactitude de  $\Omega \xrightarrow{2} \Omega \xrightarrow{r} \mathfrak{R}$  fut annoncée dans [6] ; une démonstration se trouve dans [2].

Prenons maintenant la suite

$$\mathfrak{M}_q \xrightarrow{d} \Omega_{q-1} \xrightarrow{2} \Omega_{q-1} \quad .$$

Nous avons déjà vu que  $2d = 0$  . D'autre part, si  $B^q$  est une variété orientée de bord  $2V^{q-1}$  on obtient une variété fermée  $M^q$  en recollant les deux exemplaires  $V$  du bord de  $B$  ; sa classe  $W_1(M)$  est entière, et est représentée par  $V \subset M$  .

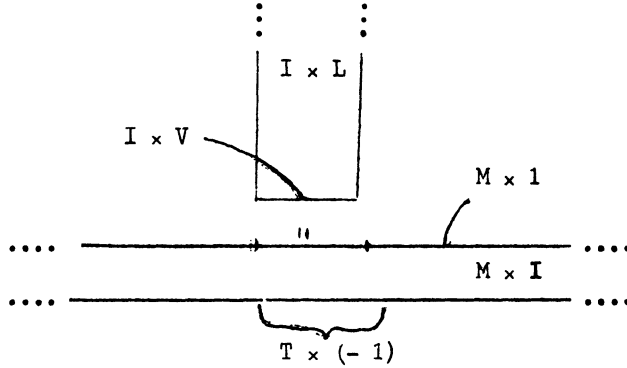
Reste à voir l'exactitude de

$$\Omega_q \xrightarrow{r} \mathfrak{M}_q \xrightarrow{d} \Omega_{q-1} \quad .$$

Il est clair que  $d \circ r = 0$  . Soient alors  $M^q$  ,  $V^{q-1}$  comme ci-dessus, et  $L^q$  une variété orientée de bord  $V$  . Soit  $T$  un voisinage tubulaire de  $V$  dans  $M$  ; puisque le fibré normal de  $V$  est trivial on a  $T = V \times I$  , où  $I$  est le segment  $[-1, 1]$  . Formons la somme topologique  $M \times I + L \times I$  et identifions chaque point de  $T \times 1 \subset M \times 1$  avec le point correspondant de  $V \times I \subset L \times I$  . On obtient une variété  $B$  dont le bord consiste en  $M \times (-1) \approx M$  et une variété orientable

$$M' = (M - T) \times 1 \cup L \times \text{bord}(I) = (M - T) \times 1 \cup L \times (-1) \cup L \times 1 \quad .$$

(Il faut, bien entendu, "arrondir les angles" à  $V \times (-1)$ ,  $V \times 1$ ; voir MILNOR, [5]). Donc  $[M]_{\mathfrak{N}} = r[M']_{\Omega}$ , C. Q. F. D.



1.4. PROPOSITION. -  $\mathfrak{M} = \sum_{q=0}^{\infty} \mathfrak{m}_q$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{N}$ .

PREUVE. - La classe  $W_1$  d'une variété produit est donnée par la formule de Whitney :

$$W_1(M \times M') = W_1(M) \otimes 1 + 1 \otimes W_1(M') \quad .$$

Cette classe est donc entière si  $W_1(M)$  et  $W_1(M')$  le sont,

C. Q. F. D.

1.5. REMARQUE. - WALL dans [12] commence par établir une partie de (1.3) seulement ; cette partie lui sert pour démontrer ses théorèmes principaux, dont (1.3) est une simple conséquence.

Les méthodes de ROKHLIN ([6]) permettent d'améliorer (1.3) ; dans l'Appendice, on expliquera comment elles conduisent à une suite exacte plus riche.

## 2. Structure de $\mathfrak{M}$ .

Un des outils principaux de WALL est l'homomorphisme composé

$$(2.1) \quad d' : \mathfrak{M}_q \xrightarrow{d} \Omega_{q-1} \xrightarrow{r} \mathfrak{M}_{q-1} \quad .$$

Soit  $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_r)$  une partition de  $q - 1$  et soit

$$W_{\omega} = W_{a_1} W_{a_2} \dots W_{a_r}$$

le monôme en classes de Stiefel-Whitney qui lui correspond.

2.2. LEMME. -  $\langle W_\omega, d'(X) \rangle = \langle W_\omega \cdot W_1, X \rangle, X \in \mathcal{M}_q$  .

PREUVE. - Soient  $i : V^{q-1} \subset M^q$  comme avant. Alors  $W_j(V) = i^* W_j(M)$  parce que le fibré normal est trivial, donc

$$\begin{aligned} \langle W_\omega, V \rangle &= \langle W_\omega, W_1 \cap M \rangle \text{ puisque } V \text{ est dual à } W_1 \\ &= \langle W_\omega \cup W_1, M \rangle . \end{aligned}$$

2.3. PROPOSITION. -  $d' : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  est une dérivation.

La formule de Whitney

$$W(M \times M') = W(M) \otimes W(M')$$

et 2.2 permettent de vérifier que les nombres de Stiefel-Whitney de  $d'([M] \cdot [M'])$  et de  $(d'[M]) \cdot [M'] + [M] \cdot d'[M']$  sont égaux, donc ces éléments sont égaux ([9], corollaire IV.11).

On étudie maintenant quelques variétés particulières dont on verra plus tard qu'elles engendrent  $\mathcal{M}$  .

Soit  $S_m$  la sphère unité,  $\sum_{i=0}^m x_i^2 = 1$ , de  $R^{m+1}$ , et  $P_n C$  l'espace projectif

complexe avec coordonnées homogènes  $(z_0, z_1, \dots, z_n)$ . Soit  $P(m, n)$  la variété obtenue en identifiant dans  $S^m \times P_n C$  les points  $(x, z)$  et  $(-x, \bar{z})$  ( $\bar{z}$  = conjugué complexe). L'application  $(x, z) \rightarrow x$  induit une fibration  $P(m, n) \rightarrow P_m R$  (= projectif réel), de fibre  $P_n C$ . L'anneau de cohomologie

$$H^*(P(m, n), \mathbb{Z}_2)$$

est celui du produit, i. e. il a deux générateurs  $c, d$  de dimension 1, 2 et les relations  $c^{m+1} = 0, d^{n+1} = 0$ . La classe de Stiefel-Whitney est

$$W(P(m; n)) = (1 + c)^m (1 + c + d)^{n+1} \text{ (voir [1]).}$$

Soit

$$T(x_0, \dots, x_m) = (x_0, \dots, x_{m-1}, -x_m) .$$

Alors  $(x, z) \rightarrow (Tx, z)$  induit une involution  $A$  de  $P(m, n)$ . Si  $m+n$  est impair et  $m > 0$ ,  $P(m, n)$  est orientable et  $A$  renverse l'orientation, donc  $2[P(m, n)]_{\Omega} = 0$ , et on peut faire la construction de 1.3 : soit  $Q(m, n)$  la variété obtenue en identifiant dans  $P(m, n) \times [0, 1]$  les points

$(p, 0)$  et  $(A(p), 1)$  (pour tout  $m, n$ ). L'application  $(p, t) \rightarrow t$  induit une fibration  $Q(m, n) \rightarrow S^1$  de fibre  $P(m, n)$ . La cohomologie additive  $H^*(Q(m, n), \mathbb{Z})$  est celle du produit. Multiplicativement, on a trois générateurs :  $x$  (qui vient de la base  $S^1$ ),  $c$  et  $d$  (qui se projettent sur les générateurs de la fibre  $P(m, n)$ ) et les relations

$$(2.4) \quad x^2 = 0, \quad c^{m+1} = c^m x, \quad d^{n+1} = 0 \quad ([12], \text{lemma 4}).$$

Le calcul de la classe de Stiefel-Whitney est analogue au cas  $P(m, n)$ ; par récurrence sur  $n$  on obtient ([12], lemma 5)

$$(2.5) \quad W(Q(m, n)) = (1 + c + x)(1 + c)^{m-1} (1 + c + d)^{n+1}.$$

Considérons les  $W_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , comme fonctions symétriques élémentaires des variables  $t_1, t_2, \dots$ ; de sorte que les polynômes en  $W_j$  sont précisément les polynômes symétriques en  $t_1, t_2, \dots$ . D'importance particulière sont les polynômes

$$S_q = \sum_i t_i^q, \quad q = 1, 2, \dots$$

On a ([9]) : pour tout  $q$  qui n'est pas de la forme  $2^k - 1$ , soit  $L^q$  une variété telle que  $\langle S_q, L^q \rangle = 1$  (il existe de telles  $L$ ). Alors  $\mathcal{R}$  est l'algèbre des polynômes en  $[L^q]_{\mathcal{R}}$ ,  $q = 2, 4, 5, \dots$ . Par exemple :

$$(2.6) \quad \langle S_{2q}, P_{2q} R \rangle = 1 \quad ([9], \text{p. 80})$$

$$(2.7) \quad \langle S_{2q-1}, V_{2q-1} \rangle = 1, \quad q \neq 2^k$$

où  $V_{2^r(2s+1)-1} = P(2^r - 1, 2^r s)$ ,  $s \neq 0$  ([1], G)

$$(2.8) \quad \langle S_{2q}, M_{2q} \rangle = 1, \quad q \neq 2^k$$

où  $M_{2^r(2s+1)} = Q(2^r - 1, 2^r s)$ ,  $s \neq 0$  ([12], lemma 6)

En particulier les éléments

$$x_{2q} = [M_{2q}], \quad x_{2q-1} = [V_{2q-1}], \quad q \neq 2^k, \quad \text{et} \quad (x_{2^j})^2 = [P_{2^j} R]^2$$

sont algébriquement indépendants. Puisqu'ils sont contenus dans  $\mathcal{R}$  (clair pour  $M$  et  $V$ ; quant à  $[P_{2^j} R]^2$  une comparaison des nombres de Stiefel-Whitney montre

que  $P_n R \times P_n R$  est cobordante à  $P_n C$ , qui est orientable ; voir [7]), ils engendrent une sous-algèbre polynomiale  $\mathfrak{M}'$  de  $\mathfrak{M}$ . Soit  $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{R}$  le sous-groupe où s'annulent tous les nombres de Stiefel-Whitney qui contiennent le facteur  $(W_1)^2$ . Il est clair que  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}'$  ( $W_1 \cup W_1 = 0$  si  $W_1$  est une classe entière). On va montrer que  $\dim(\mathfrak{M}'_q) = \dim(\mathfrak{M}_q)$ , donc :

2.9. THÉOREME. -  $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ . La dérivation  $d'$  est donnée par

$$d'(X_{2q}) = X_{2q-1}, \quad q \neq 2^j, \quad d'(X_{2^j})^2 = 0.$$

3. Conséquences de 2.9. Structure de  $\Omega$ .

3.1. LEMME.

(i) Ker( $d'$ )/Im( $d'$ ) est l'algèbre polynomiale engendrée par les  $(X_{2k})^2$ , ou encore par les  $[P_{2k} C]$ .

(ii) Les nombres de Pontrjagin mod 2 sont nuls sur Im( $d'$ ), et ils caractérisent les éléments de Ker( $d'$ )/Im( $d'$ ).

DÉMONSTRATION. - On doit calculer l'homologie de l'algèbre différentielle  $(\mathfrak{M}', d')$ . Elle est le produit tensoriel des algèbres différentielles suivantes :

a. algèbre de polynômes en  $X_{2q}, X_{2q-1}$  avec  $d' X_{2q} = X_{2q-1}$ ,  $q \neq 2^j$ ; son homologie est polynomiale de générateur  $(X_{2q})^2$ .

b. algèbre de polynômes en  $(X_{2^j})^2$ ,  $d' = 0$ .

La formule de Künneth pour l'homologie d'un produit tensoriel donne alors la première moitié de 3.1 (i).

Les nombres de Pontrjagin annulent la torsion de  $\Omega$ , donc aussi

$$\text{Im}(d') = r(\text{Im}(d)) \subset r(\text{torsion de } \Omega).$$

Les calculs de MILNOR ([3], XIII) impliquent qu'un polynôme en  $[P_{2k} C]_{\mathfrak{R}}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  est nul si tous ses nombres de Pontrjagin mod 2 sont nuls. L'algèbre de polynômes en  $\{[P_{2k} C]_{\mathfrak{R}}\}$  est donc contenue dans Ker( $d'$ )/Im( $d'$ ), et par raison de dimension elle contient tout.

3.2. COROLLAIRE. - Im( $d'$ ) = r(torsion de  $\Omega$ ).

3.3. THÉOREME. - Il n'y a pas d'élément d'ordre 4 dans  $\Omega$ .



DÉMONSTRATION. - Soit  $c \in \Omega_q$  d'ordre  $2^n$ ,  $n$  maximal. D'après 3.2  $r(c) = d'(c') = rd(c')$ , donc  $r(c - dc') = 0$ , donc  $c - dc' = 2c''$  par 1.3. Si  $n > 1$ , on aurait  $0 = 2^n c'' = 2^{n-1}(c - dc') = 2^{n-1}c$ , parce que  $2d = 0$ .

3.4. COROLLAIRE. -  $\text{Ker}(d) = \text{Ker}(d')$ ; la suite  $\Omega \xrightarrow{r} \mathfrak{M} \xrightarrow{d'} \mathfrak{M}$  est exacte.

PREUVE. - Pour  $x \in \text{Ker}(d')$  on a  $rdx = 0$ , donc  $dx = 2y$  par 1.3, donc  $0 = 2dx = 4y$ , d'où  $2y = 0$  d'après 3.3, c'est-à-dire  $\text{Ker}(d') \subset \text{Ker}(d)$ . L'autre inclusion est triviale.

3.5. COROLLAIRE. - Deux variétés orientées  $M^q$ ,  $M'^q$  sont cobordantes si et seulement si tous leurs nombres caractéristiques sont égaux.

PREUVE. - Si les nombres de Stiefel-Whitney sont égaux,  $r(x) = 0$ , où  $x = [M]_\Omega - [M']_\Omega$  ([9], corollaire IV.11), donc  $x = 2y$ . Si les nombres de Pontrjagin sont égaux,  $x$  est de torsion ([9], corollaire IV.16). D'après MILNOR ([4] et [10]) il n'y a pas de torsion impaire, donc  $0 = 2y = x$  d'après 3.3.

La structure de  $\Omega$  est maintenant connue : si  $T \subset \Omega$  est l'idéal de torsion, on a un isomorphisme multiplicatif

$$(3.6) \quad r : T \cong \text{Im}(d') \quad ;$$

puisque la structure de  $(W, d')$  est connue,  $T$  est connu.

Le quotient  $\Omega/T$  est un anneau polynomial,  $\Omega/T = \mathbb{Z}[Y_4, Y_8, Y_{12}, \dots]$  ([4] et [10]) ; le seul problème pourrait être le type de l'extension. Mais  $r$  induit des isomorphismes  $\Omega \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \text{Im}(r) = \text{Ker}(d')$ ,  $T \cong \text{Im}(d')$

$$(3.7) \quad (\Omega/T) \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \text{Ker}(d')/\text{Im}(d') = \mathbb{Z}_2[X_{2i}^2, X_4^2, X_6^2, \dots] \quad ;$$

il s'ensuit qu'on peut choisir les générateurs  $Y_{4i} \in \Omega$  de telle façon que

$$r(Y_{4i}) = X_{2i}^2 \in \mathfrak{M}$$

Alors la multiplication est claire dans  $T$  et dans  $\mathbb{Z}[\{Y_{4i}\}] \subset \Omega$ , et le produit de  $Y_{4i}$  avec  $U \in T = \text{Im}(d')$  est l'élément

$$X_{2i}^2 U \in \text{Im}(d') = T \quad .$$

On peut aussi donner une description de  $\Omega$  par générateurs et relations, analogue à celle que E. THOMAS a donnée pour la cohomologie entière de la grassmannienne réelle.

3.8. THÉOREME. - Pour qu'une variété  $M^q$  soit cobordante à une variété orientable, il faut et il suffit que tous les nombres de Stiefel-Whitney qui contiennent le facteur  $W_1$  s'annulent sur  $M$ .

PREUVE. - La nécessité est claire. Si tous les  $W_\omega W_1$  s'annulent sur  $M$ ,  $[M]$  est dans  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ , et 2.2 montre que  $d'[M] = 0$ , donc  $[M] \in \text{Im}(r)$  d'après 3.4.

4. Sur la démonstration de 2.9.

Rappelons la construction de Thom [9]. Sur l'espace classifiant  $B_0(n)$  du groupe orthogonal on prend le fibré  $E_n$  de fibre  $R^n$  qui est associé au fibré universel, et on dénote par  $MO(n)$  l'espace obtenu de  $E_n$  en identifiant à un seul point tous les vecteurs de longueur  $\geq 1$ . On a alors l'isomorphisme

$$\tau : \mathfrak{R}_q \cong \pi_{n+q}(MO(n)) \quad \text{pour } q < n \quad .$$

La cohomologie mod 2 de  $B_0(n)$  est l'algèbre des polynômes en  $W_1, W_2, \dots, W_n$ . L'inclusion

$$i : B_0(n) \rightarrow MO(n)$$

(c'est la section centrale de  $E_n$ ) applique  $H^*(MO(n), \mathbb{Z}_2)$  isomorphiquement sur l'idéal de  $H^*(MO(n), \mathbb{Z}_2)$  qui est engendré par  $W_n$ . (Pour les dimensions  $< 2n$ , on supposera  $n$  grand par rapport à  $q$ , mais on ne mentionnera plus cette hypothèse). Pour  $p > 2$ ,  $H^*(MO(n), \mathbb{Z}_p)$  est trivial.

Soit  $X \in \mathfrak{R}_q$  et  $\xi : S^{n+q} \rightarrow MO(n)$  une application qui lui correspond par l'isomorphisme  $\tau$ . Alors

$$(4.1) \quad \langle W_\omega, X \rangle = \langle \xi^*(W_n W_\omega), S^{n+q} \rangle$$

pour tout nombre de Stiefel-Whitney  $W_\omega$ .

THOM montre que  $H^*(MO(n))$  (on supprime les coefficients  $\mathbb{Z}_2$ ) est un module libre sur l'algèbre de Steenrod  $A$  (jusqu'en dimension  $2n$ ). Parce qu'il n'y a pas de cohomologie pour les autres nombres premiers, ceci entraîne ([9], théorème II.6) que

$$(4.2) \quad \mathfrak{R}_q = \pi_{n+q}(MO(n)) = \text{Hom}_A(H^*(MO(n)), \mathbb{Z}_2)_{n+q}$$

(à  $\xi : S^{n+q} \rightarrow MO(n)$  correspond  $\xi^\dagger : H^*(MO(n)) \rightarrow H^{n+q}(S^{n+q}) = \mathbb{Z}_2$ ), ou encore duale (sur  $\mathbb{Z}_2$ ) à  $(H^*(MO(n)) \otimes_A \mathbb{Z}_2)_{n+q}$ .

Pour tout espace vectoriel gradué, positif, de type fini  $H = \sum_{i=0}^{\infty} H^i$ , soit

$$P(H) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim(H^i) \cdot t^i$$

sa série de Poincaré. On a  $P(H + H') = P(H) + P(H')$  et  $P(H \otimes H') = P(H) P(H')$ .  
Par exemple :

$$(4.3) \quad P(A) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - t^{2^j-1})^{-1} \quad ([8], \text{n}^\circ 19)$$

$$(4.4) \quad P(H^*(MO(n))) = t^n \prod_{j=1}^{\infty} (1 - t^j)^{-1} .$$

Il s'ensuit de (4.3) que pour un module libre  $F$  sur  $A$  on a

$$(4.5) \quad P(\text{Hom}_A(F, \underline{Z}_2)) = P(F \otimes_A \underline{Z}_2) = P(F) \cdot \prod_{j=1}^{\infty} (1 - t^{2^j-1})^{-1} ,$$

en particulier

$$(4.6) \quad P(\mathcal{R}) = \prod_{j \neq 2^k-1} (1 - t^j)^{-1} .$$

Revenons maintenant au groupe  $\mathcal{M}' \subset \mathcal{R}$ . D'après (4.1) c'est le sous-groupe de  $\text{Hom}_A(H^*(MO(n)), \underline{Z}_2)$  qui annule tous les  $W_n W_1^2 W_\omega$ , donc

$$(4.7) \quad \mathcal{M}'_q = \text{Hom}_A(W_n H^*(B_0(n)) / W_n W_1^2 H^*(B_0(n)), \underline{Z}_2)_{n+q} .$$

Par un raisonnement délicat de type [9], page 40 et suivantes, que je ne reproduirai pas ici, WALL ([12]) montre :

4.8. LEMME. -  $W_n W_1^2 H^*(B_0(n))$  est un facteur direct du  $A$ -module

$$W_n H^*(B_0(n)) = H^*(MO(n)) .$$

Parce que  $H^*(MO(n))$  est libre,

$$W_n W_1^2 H^*(B_0(n))$$

et

$$W_n H^*(B_0(n)) / W_n W_1^2 H^*(B_0(n))$$

sont libres (d'ailleurs, WALL démontre 4.8 en construisant une base de  $H^*(MO(n))$ , dont une partie engendre  $W_n W_1^2 H^*(B_0(n))$ ). On a donc :

$$P(W_n H^*(B_0(n)) / W_n W_1^2 H^*(B_0(n))) = t^n \prod (1 - t^i)^{-1} - t^{n+2} \prod (1 - t^i)^{-1} \\ = t^n \prod_{i \neq 2} (1 - t^i)^{-1} ,$$

et, d'après (4.7) et (4.5)

$$(4.9) \quad P(W') = \prod_{\substack{i \neq 2 \\ i \neq 2^{k-1}}} (1 - t^i)^{-1} .$$

Mais ceci est aussi la série de Poincaré de  $\mathfrak{M}''$ , et parce que  $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}'$  il s'ensuit  $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}'$ .

5. Appendice : la suite exacte de Rokhlin.

Soit  $M^q$  une variété,  $V^{q-1} \subset M^q$  une sous-variété qui représente  $W_1(M)$ . Nous ne supposons plus, comme au paragraphe 1, que  $W_1(M)$  soit entière. Alors le fibré normal  $\nu$  de  $V$  dans  $M$  peut être non trivial, et si l'on coupe  $M$  suivant  $V$  on obtient une variété de bord disons  $\tilde{V}$ , qui n'est plus, en général, égale à  $2V$ . Mais, en tous cas,  $\tilde{V}$  sera un revêtement à deux feuilletés de  $V$ , donc cobordante à  $2V$  ([2]), et on a  $2[V]_{\Omega} = 0$ ; l'homomorphisme  $D$  de (1.1) est donc défini sur tout  $\mathfrak{R}$ .

Prenons maintenant une sous-variété  $A^{q-2} \subset V^{q-1}$  qui représente la classe  $W_1(\nu)$  du fibré normal. Comme dans le cas de  $V$  ceci peut se faire aussi pour les variétés à bord, ce qui montre que la classe de cobordisme  $[A]_{\mathfrak{R}}$  est déterminée par celle de  $M$ ; on obtient un homomorphisme :

$$(5.1) \quad D'' : \mathfrak{R}_q \rightarrow \mathfrak{R}_{q-2} , \quad D''[M] = [A] .$$

5.2. THÉORÈME. - La suite :

$$\longrightarrow \Omega_q \xrightarrow{r} \mathfrak{R}_q \xrightarrow{D+D''} \Omega_{q-1} + \mathfrak{R}_{q-2} \xrightarrow{2+0} \Omega_{q-1} \xrightarrow{r} \longrightarrow$$

est exacte.

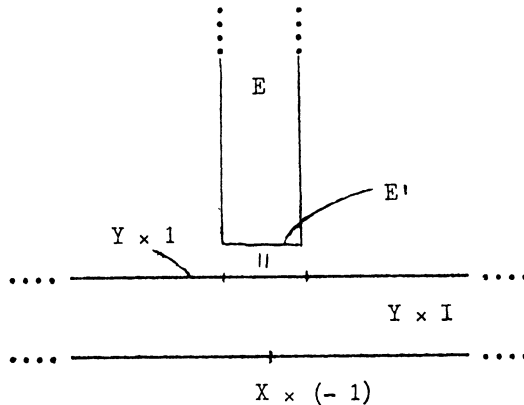
5.3. COROLLAIRE. -  $\mathfrak{M} = \text{Ker}(D'')$ , la suite (1.3) est donc contenue dans (5.2).

DÉMONSTRATION de (5.3). - Il est clair que  $\mathfrak{M} \subset \text{Ker}(D'')$ . Soit maintenant  $X \in \mathfrak{R}$  et  $D''X = 0$ . Puisque, aussi,  $2DX = 0$  il existe  $X' \in \mathfrak{M}$  tel que  $DX = dX' = DX'$ , donc  $(D + D'')(X - X') = 0$ , donc  $X - X' \in \text{Im}(r) \subset \mathfrak{M}$ , d'où  $X \in \mathfrak{M}$ .

DÉMONSTRATION de (5.2).

5.4. LEMME. - Soit  $Y^n$  une variété orientée,  $X^{n-1} \subset Y^n$  une sous-variété connexe (non orientée), et supposons  $[Y]_{\Omega} = 0$ ,  $[X]_{\mathcal{H}} = 0$ . Il existe alors une variété orientée  $C^{n+1}$  de bord  $Y$  qui contient une sous-variété  $B^n \subset C^{n+1}$  de bord  $X$ .

DÉMONSTRATION de (5.4). - Soit  $B^n$  arbitraire de bord  $X$ . Le fibré normal  $\gamma$  de  $X$  dans  $Y$  n'est autre que le fibré associé au fibré tangent de  $X$  ( $g \in O(n)$  opère par  $\det(g)$  sur  $R^1$ ); autrement le voisinage de  $X$  dans  $Y$  ne pourrait être orientable. Le fibré  $\gamma$  admet donc une extension  $\Gamma \rightarrow B$  à tout  $B$ , telle que  $\Gamma$  est orientable. Soit  $E$  l'espace des vecteurs de  $\Gamma$  de longueur  $\leq 1$ ;  $E$  est orientable et est fibré en segments sur  $B$ ; la partie  $E'$  sur  $X = \partial B$  est égale au voisinage tubulaire  $T$  de  $X$  dans  $Y$ . Formons maintenant la somme topologique  $Y \times I + E$  et identifions chaque point de  $T \times 1 \subset Y \times 1$  avec le point correspondant de  $E' \subset E$  (voir la figure). On obtient une variété  $C'$  dont le bord consiste en  $Y \times (-1) = Y$ , et une variété orientable  $Y' = (Y - T) \times 1 \cup E''$ , où  $E''$  contient les vecteurs de longueur 1 de  $E$ . De plus,  $C'$  contient  $B = X \times I \cup$  (vecteurs 0 de  $E$ ), de bord  $X \times (-1) = X$ , et  $B$  ne rencontre pas  $Y'$ . Prenons finalement une variété orientable  $C''$  de bord  $Y'$  et attachons-la suivant  $Y'$  à  $C'$ ; ceci donne la variété cherchée  $C$ .



Démontrons maintenant l'exactitude de

$$\Omega \xrightarrow{r} \mathcal{H} \xrightarrow{D+D''} \Omega + \mathcal{H} \quad .$$

Si  $M^q$ ,  $V^{q-1}$ ,  $A^{q-2}$  sont comme avant, si  $A$  est un bord, disons de  $B^{q-1}$ , et  $V$  est un bord orienté de  $C^q$ , alors  $M$  est cobordante à une variété orientable. On peut supposer  $A$  et  $V$  connexes (autrement, on joint les composantes

par des tubes) ; le lemme (5.4) donne alors  $B \subset C$ ,  $\text{bord}(B) = A \subset V = \text{bord}(C)$ . Soit  $\gamma$  le fibré de base  $C$ , de fibre  $R^1$ , dont la classe  $W_1$  est représentée par la sous-variété  $B$ . La classe  $W_1$  de la restriction à  $V$  est représentée par  $A$ ; cette restriction est donc égale au fibré normal de  $V$  dans  $M$ . Soit  $E$  l'espace des vecteurs de  $\gamma$  de longueur  $\leq 1$ ; il est fibré en segments sur  $C$ , et la partie sur  $V$  est égale au voisinage tubulaire  $T$  de  $V$  dans  $M$ . Comme dans la démonstration de (5.4) on peut attacher  $E$  à  $M \times I$  suivant  $T \times 1$ . On obtient une variété  $L$  dont le bord consiste en  $M \times (-1)$  et une variété orientable (rappeler que les vecteurs de longueur 1 de  $E$  forment un revêtement à deux feuillets de  $C$ ; c'est donc orientable),

C. Q. F. D.

Remarquons que ceci et (1.3) suffisent déjà pour démontrer (5.3).

Montrons maintenant que  $D'' : \mathcal{R}_q \rightarrow \mathcal{R}_{q-2}$  est surjectif. L'exactitude de

$$\mathcal{R} \xrightarrow{D+D''} \Omega + \mathcal{R} \xrightarrow{2+0} \Omega$$

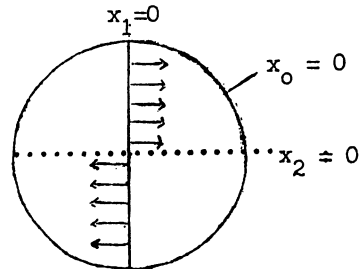
sera alors évidente, moyennant (5.3) et (1.3). Puisqu'on sait déjà que  $\Omega \xrightarrow{2} \Omega \xrightarrow{r} \mathcal{R}$  est exact, ceci achèvera la démonstration.

Soit  $A^{q-2}$  une variété et soit  $M^q \rightarrow A^{q-2}$  le fibré associé au fibré tangent de  $A$ , de fibre  $P_2 R$  où le groupe  $O(n)$  opère comme suit

$$(5.5) \quad g(x_0, x_1, x_2) = (\det(g) x_0, x_1, x_2); \quad x_i \text{ les coordonnées homogènes des points de } P_2 R.$$

$M$  est une variété, et on va voir que  $D''[M] = [A]$ . Considérons d'abord la droite  $x_1 = 0$  de  $P_2 R$ . Elle est invariante sous l'opération de  $O(n)$ , et définit donc un sous-fibré  $V^{q-1} \subset M^q$ .  $V$  est une variété orientable parce qu'un chemin fermé  $s$  de  $A$  renverse l'orientation de la fibre de  $V$  si et seulement si  $s$  renverse l'orientation de  $A$ . Un argument analogue montre qu'on peut orienter  $M - V$  de telle façon que les deux orientations induites dans  $V$  soient les mêmes. Ceci montre que  $V$  représente  $W_1(M)$  (d'où  $[V]_{\Omega} = D[M]_{\mathcal{R}}$ ).

Prenons maintenant dans  $P_2 R$  un champ de vecteurs normaux à  $x_1 = 0$ , comme il est indiqué dans la figure (on doit identifier les points diamétralement opposés au bord de la figure-disque pour obtenir  $P_2 R$ ). Ce champ de vecteurs a une seule singularité, pour  $x_2 = 0$ , et il est invariant sous l'opération de  $O(n)$ . Il définit donc un champ de vecteurs



normaux (ou transversaux) à  $V$ , dont les singularités (de type ordinaire) sont situées sur la section de  $M \rightarrow A$ , définie par  $x_1 = 0 = x_2$ . Cette sous-variété, équivalente à  $A$ , représente donc la classe  $W_1$  du fibré normal de  $V$  dans  $M$ ,

C. Q. F. D.

Remarquons que cette construction définit un homomorphisme  $\varphi : \mathcal{N}_{q-2} \rightarrow \mathcal{N}_q$  tel que  $D''\varphi = \text{id}$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] DOLD (Albrecht). - Erzeugende der Thomschen Algebra  $\mathcal{N}$ , Math. Z., t. 65, 1956, p. 25-35.
- [2] DOLD (Albrecht). - Démonstration élémentaire de deux résultats du cobordisme, Séminaire Ehresmann, t. 2, 1958/59.
- [3] MILNOR (John). - Lectures on characteristic classes. - Princeton University, 1957 (Miméographié).
- [4] MILNOR (John). - On the cobordism ring  $\Omega^*$ , Notices Amer. math. Soc., t. 5, 1958, p. 457.
- [5] MILNOR (John). - Differentiable manifolds which are homotopy spheres. - Princeton Notes, 1959.
- [6] ROKHLIN (V. A.). - Homologies intrinsèques, Doklady Akad. Nauk. SSSR., t. 89, 1953, p. 789-792.
- [7] ROKHLIN (V. A.). - Homologies intrinsèques, Doklady Akad. Nauk. SSSR., t. 119, 1956, p. 876-879.
- [8] SERRE (Jean-Pierre). - Cohomologie mod 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane, Comment. Math. Helvet., t. 27, 1953, p. 198-232.
- [9] THOM (René). - Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helvet., t. 28, 1954, p. 17-86.
- [10] THOM (René). - Travaux de Milnor sur le cobordisme, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1959, exposé n° 180.
- [11] WALL (C. T. C.). - Note on the cobordism ring, Bull. Amer. math. Soc., (à paraître).
- [12] WALL (C. T. C.). - Determination of the cobordism ring. - Cambridge University, 1959 (Miméographié).