JEAN-LOUIS KOSZUL

Travaux de B. Kostant sur les groupes de Lie semi-simples

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 191, p. 329-337
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__329_0>

Séminaire BOURBAKI
12e année, 1959/60, n° 191

Décembre 1959

TRAVAUX DE B. KOSTANT SUR LES GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES [4]

par Jean-Louis KOSZUL

1. Les transformations de Coxeter-Killing.

Dans un espace vectoriel euclidien E, on appelle réflexion une symétrie par rapport à un hyperplan. Soit Γ un sous-groupe fini du groupe des transformations orthogonales de E engendré par des réflexions. Un élément $x \in E$ est dit régulier s'il n'est invariant par aucune réflexion de Γ. L'ensemble des éléments réguliers est un ouvert de E dont les composantes connexes sont appelées les chambres de Γ. Le groupe Γ opère transitivement dans l'ensemble des chambres. Pour toute chambre W de Γ, soit $R(W)$ l'ensemble des réflexions $S \in \Gamma$, telles que $\overline{W}$ contienne un point invariant par S qui n'est invariant par aucune autre réflexion de Γ. Les hyperplans qui correspondent aux réflexions de $R(W)$ sont appelés les murs de la chambre W. Toutes les chambres ont le même nombre ℓ de murs et $\ell \leq \dim E$, l'égalité ayant lieu lorsque 0 est le seul élément de E invariant par Γ. Un élément $R \in \Gamma$ est appelé une transformation de Coxeter-Killing lorsqu'il existe une chambre W de Γ telle que R soit le produit (dans un certain ordre) des éléments de $R(W)$. Les transformations de Coxeter-Killing ont beaucoup de propriétés remarquables (cf. [1], [2], [3]) :

1° elles constituent une classe d'éléments conjugués dans Γ,

2° si h est l'ordre des trandformations de Coxeter-Killing, le nombre des réflexions du groupe Γ est $\frac{1}{2}\ell h$,

3° si R est une transformation de Coxeter-Killing et si

$$\det(T - R) = \prod_{j=1}^{j=m} (T - \exp(\frac{2\pi i k_j}{h}))$$

avec $m = \dim E$ et $0 \leq k_j < h$, alors l'algèbre des invariants symétriques du groupe linéaire Γ est engendrée par m polynômes algébriquement indépendants de degrés $k_j + 1$.

2. Transformations de Coxeter-Killing des groupes de Lie semi-simples.

Les groupes linéaires finis engendrés par des réflexions qui sont cristallographiques c'est-à-dire qui conservent un réseau de l'espace euclidien, sont les groupes de Weyl de la théorie des algèbres de Lie semi-simples.

Dans la suite, on désignera par $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe de rang ℓ et par $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit Δ l'ensemble des racines pour la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. La forme de Killing $(\; , \;)$ permet de les identifier à des éléments de $\mathfrak{h}$. Le sous-espace réel $\mathfrak{h}^0$ engendré par Δ est de dimension ℓ et a pour complexifié $\mathfrak{h}$; la restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{h}^0$ étant définie positive, c'est un espace euclidien. Soit G le groupe de Lie linéaire défini par $\mathfrak{g}$ et soit H le sous-groupe abélien connexe de G qui correspond à $\mathfrak{h}$. L'ensemble Δ et par conséquent $\mathfrak{h}^0$ sont stables par le normalisateur $N(\mathfrak{h})$ de H dans G. Ceci donne un homomorphisme de $N(\mathfrak{h})$ dans le groupe des transformations orthogonales de $\mathfrak{h}^0$; l'image de cet homomorphisme, isomorphe à $N(\mathfrak{h})/H$, est appelé le <u>groupe de Weyl</u> relatif à $\mathfrak{h}$. On sait que c'est un groupe fini, engendré par les réflexions par rapport aux hyperplans d'équations $(\alpha , X) = 0$ avec $\alpha \in \Delta$. Comme Δ engendre un réseau de $\mathfrak{h}^0$, c'est un groupe cristallographique.

On supposera choisi un ordre lexicographique dans $\mathfrak{h}^0$ et on désignera par α_i $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$ les racines simples positives. Les conditions $(\alpha_i , X) > 0$ définissent une chambre du groupe de Weyl dont les murs sont les hyperplans d'équations $(\alpha_i , X) = 0$. Soit R_i la réflexion

$$X \longrightarrow X - 2\frac{(X , \alpha_i)}{(\alpha_i , \alpha_i)}\alpha_i$$

qui correspond à la racine simple α_i. Alors $R_1 R_2 \ldots R_\ell$ est une transformation de Coxeter-Killing du groupe de Weyl relatif à $\mathfrak{h}$ (on dira une <u>transformation de Coxeter-Killing de</u> $\mathfrak{h}$). A. J. COLEMAN a démontré le résultat suivant : <u>si</u> h <u>est l'ordre de</u> R <u>et si</u> $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{h})$, <u>il existe un élément régulier</u> $Z \in \mathfrak{h}$ <u>tel que</u> $RZ = \omega Z$. On sait de plus que R <u>n'admet pas la valeur propre</u> 1 (cf. [2], [3]), <u>et que</u> h <u>ne dépend pas du choix de la sous-algèbre</u> $\mathfrak{h}$.

LEMME 1. - <u>Les racines positives dont les images par</u> R <u>sont négatives sont les racines</u> $\theta_i = R_\ell R_{\ell-1} \ldots R_{i+1} \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$. <u>Elles constituent une base de</u> $\mathfrak{h}$.

On a en effet

$$\theta_i = \alpha_i + \sum_{j>i} c_{ij} \alpha_j \quad ,$$

donc $\theta_i > 0$ et $(\theta_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ est une base de $\mathfrak{h}$. On a :

$$R\theta_i = -\alpha_i + \sum_{j<i} c'_{ij}\,\alpha_j$$

donc $R\theta_i < 0$. Comme, d'autre part, α_i est la seule racine positive dont l'image par R_i soit négative, il est clair que, si $\alpha > 0$ et $R\alpha < 0$, il existe un entier i $(1 \leq i \leq \ell)$ tel que $\alpha_i = R_{i+1} \dots R_{\ell-1} R_\ell \alpha$.

Soit Δ_j $(j = 1, 2, \dots, L)$ la famille des orbites de R dans Δ. Pour tout j, la somme des éléments de Δ_j est nulle puisque 1 n'est pas valeur propre de R. Compte tenu du lemme 1, chaque Δ_j contient au moins une racine θ_i et par suite $L \leq \ell$. Soit Z un élément régulier de $\mathfrak{h}$ tel que $RZ = \omega Z$. Si $\alpha \in \Delta$ et si $R^p\alpha = \alpha$, alors

$$(Z, \alpha) = (Z, R^p\alpha) = (R^{-p}Z, \alpha) = \omega^{-p}(Z, \alpha) \qquad ;$$

puisque Z est régulier, ceci entraîne que p est multiple de h. Par conséquent, <u>chaque Δ_j contient exactement h éléments et, si r désigne le nombre des racines positives, on a</u> :

$$hL = 2r \qquad .$$

Un élément S de G est dit <u>régulier</u> si il est semi-simple et si la sous-algèbre des éléments de $\mathfrak{g}$ invariants par S est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

THÉORÈME 1. – <u>Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ et soit h l'ordre des transformations de Coxeter-Killing des groupes de Weyl de $\mathfrak{g}$. Tout élément P du normalisateur $N(\mathfrak{h})$ ayant pour restriction à $\mathfrak{h}^0$ une transformation de Coxeter-Killing est un élément régulier d'ordre h.</u>

Supposons en effet que $P \in N(\mathfrak{h})$ ait pour restriction à $\mathfrak{h}^0$ la transformation R définie plus haut. Puisque P^h est l'identité sur $\mathfrak{h}$, il existe un élément $X \in \mathfrak{h}$ tel que $P^h = \exp X$. Pour tout $\alpha \in \Delta$, soit X_α un élément $\neq 0$ de $\mathfrak{g}$ tel que $[X, X_\alpha] = (X, \alpha)\, X_\alpha$ pour tout $X \in \mathfrak{h}$. On a

$$P^h X_\alpha = e^{(X,\alpha)}\, X_\alpha$$

et

$$(X, \alpha) = (X, R\alpha) \qquad .$$

Par suite

$$e^{(X,\alpha)h} = e^{((X,\alpha)+(X,R\alpha)+\dots(X,R^{h-1}\alpha))} = 1$$

puisque $\alpha + R\alpha + \dots R^{h-1}\alpha = 0$.

Ceci prouve que P est d'ordre fini, donc semi-simple. Soit b_j $(j = 1, 2, \ldots, L)$ le sous-espace stable par P engendré par les X_α avec $\alpha \in \Delta_j$. Si $\alpha \in \Delta_j$ et si $e^{(X,\alpha)} \neq 1$, alors P n'admet pas la valeur propre 1 dans b_j ; si $e^{(X,\alpha)} = 1$, alors $(I + P + \ldots P^{h-1}) X_\alpha$ est invariant par P et engendre l'espace des vecteurs de b_j invariants par P. Comme P est semi-simple et n'admet pas la valeur propre 1 dans $\mathfrak{h}$, ceci implique que $L \geq \ell$. Or on a vu plus haut que $L \leq \ell$, donc $L = \ell$ ce qui entraîne que la sous-algèbre des éléments de $\mathfrak{g}$ invariants par P est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, donc que P est régulier. On doit de plus avoir $e^{(X,\alpha)} = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta$, ce qui prouve que P est d'ordre h. On a en même temps démontré le 2° du paragraphe 1 dans le cas où Γ est un groupe de Weyl.

On montrera dans la suite que ces propriétés de P caractérisent une classe d'éléments conjugués dans G.

3. Eléments réguliers principaux.

A partir de ce paragraphe, on supposera que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple. Soit H_i $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$ la base de $\mathfrak{h}^o$ définie par les conditions $(H_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$ et soit $X_o = \sum_i H_i$. Toute racine α s'écrivant $\alpha = \sum_i n_i \alpha_i$ où les n_i sont des entiers tous positifs ou tous négatifs, $(X_o, \alpha) = \sum_i n_i$ est un entier $\neq 0$. Soit

$$\psi = \sum_i q_i \alpha_i$$

la plus haute racine et soit

$$q = (X_o, \psi) = \sum_i q_i \quad .$$

On démontre que $q_i \geq 1$ pour tout i et que pour toute racine α, $(X_o, \alpha) \leq q$, l'égalité ayant lieu seulement pour $\alpha = \psi$.

Comme le groupe de Weyl relatif à $\mathfrak{h}$ opère transitivement dans l'ensemble des chambres, tout élément de $\exp i\mathfrak{h}^o$ est conjugué d'un élément de la forme $\exp(2\pi iX)$ avec $X \in \mathfrak{h}^o$ et $(X, \alpha_i) \geq 0$ pour tout i. Si X appartient au réseau engendré par la base $(H_i)_{1 \leq i \leq \ell}$, alors $\exp(2\pi iX) = I$. On en déduit que tout élément de $\exp i\mathfrak{h}^o$ est conjugué d'un élément de la forme $\exp(2\pi iX)$ avec $(X, \psi) \leq 1$ et $(X, \alpha_i) \geq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, \ell$. Soit alors S un élément régulier d'ordre fini k de G. Il est conjugué d'un élément $S' \in G$ ayant pour invariants les éléments de $\mathfrak{h}$. Comme S' est d'ordre fini, on a $S' \in \exp i\mathfrak{h}^o$. D'après ce qui précède, on voit donc que S est conjugué d'un élément de la forme $\exp(2\pi iX)$ avec $X \in \mathfrak{h}^o$, $(X, \psi) \leq 1$ et $(X, \alpha_i) \geq 0$ pour tout i. Posant

$X = \sum x_i H_i$, on a donc $x_i \geq 0$ et $\sum q_i x_i \leq 1$. Puisque S est régulier, on a même $x_i > 0$ et $\sum q_i x_i < 1$. Par conséquent, $k > \sum k x_i q_i \geq q$. Ainsi, tout élément régulier d'ordre fini est d'ordre $\geq q + 1$. Si $k = q + 1$, alors $kx_i = 1$ pour tout i , c'est-à-dire que tout élément régulier d'ordre $q + 1$ est conjugué de l'élément

$$P_o = \exp\left(\frac{2\pi i}{q+1} X_o\right)$$

où $X_o = \sum_i H_i$. Les éléments réguliers d'ordre $q + 1$ sont appelés les éléments réguliers principaux de G . Ils constituent une classe d'éléments conjugués de G . On montrera dans ce qui suit que $q + 1 = h$ (théorème 3, corollaire 1).

4. Sous-algèbres principales de dimension 3 .

Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie simple complexe de dimension 3 et soit X , E , F une base de $\mathfrak{a}$ telle que $[X , E] = E$, $[X , F] = -F$ et $[E , F] = X$. Les résultats suivants sont classiques : soit M un $\mathfrak{a}$-module simple ; les valeurs propres de X dans M sont de la forme $\frac{\dim M - 1}{2} - k$, où $k = 0 , 1 , \ldots, \dim M - 1$; chaque valeur propre a la multiplicité 1 et le sous-espace propre correspondant à la valeur propre $\frac{\dim M - 1}{2}$ est le sous-espace de dimension 1 des zéros de E dans M . Si $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$, le nombre des sous-modules simples d'une décomposition de $\mathfrak{g}$ considéré comme $\mathfrak{a}$-module est donc au moins égal à la dimension du noyau de $\mathrm{ad}(X)$, c'est-à-dire qu'il est au moins égal à ℓ . Ce minimum est atteint : supposons les vecteurs propres X_α choisis de sorte que $[X_\alpha , X_{-\alpha}] = \alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$ et posons :

$$X_o = \sum_i H_i \ , \qquad E_o = \sum_i \sqrt{q_i}\, X_i \ , \qquad F_o = \sum_i \frac{(X_o , H_i)}{\sqrt{q_i}} X_{-\alpha_i} \ .$$

Alors $[X_o , E_o] = E_o$, $[X_o , F_o] = -F_o$, $[E_o , F_o] = X_o$, donc le sous-espace $\mathfrak{a}_o$ de $\mathfrak{g}$ engendré par X_o , E_o , F_o est une sous-algèbre simple de dimension 3 . Comme les valeurs propres de $\mathrm{ad}(X_o)$ sont les entiers 0 et (X_o , α) , chaque sous-module simple de $\mathfrak{g}$ considéré comme $\mathfrak{a}_o$-module est de dimension impaire, et contient donc un élement $\neq 0$ du noyau de $\mathrm{ad}(X_o)$ c'est-à-dire de $\mathfrak{h}$. Ceci montre que $\mathfrak{g}$ se décompose en somme directe de ℓ sous-module simples sur $\mathfrak{a}_o$.

Une sous-algèbre simple $\mathfrak{a}$ de dimension 3 de $\mathfrak{g}$ est appelée une sous-algèbre

<u>principale</u> lorsque $\mathfrak{g}$, considéré comme $\mathfrak{a}$-module est somme directe de ℓ sous-modules simples. On démontre que toute sous-algèbre principale est conjuguée de la sous-algèbre $\mathfrak{a}_o$.

Les valeurs propres de P^o sont étroitement liées à la décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe de $\mathfrak{a}_o$-modules simples. Soit $Z_o = E_o + X_{-\psi}$; on va montrer que Z_o est un élément régulier de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g}'$ la sous-algèbre compacte réelle de $\mathfrak{g}$ engendrée par $i\mathfrak{h}^o$, $X_\alpha - X_{-\alpha}$ et $i(X_\alpha + X_{-\alpha})$ avec $\alpha \in \Delta$. Le conjugué $\bar{Z}_o$ de Z_o par rapport à $\mathfrak{g}'$ est

$$\Sigma\, q_i X_{-\alpha_i} + X_\psi \quad .$$

On a donc $[Z_o , \bar{Z}_o] = 0$, ce qui prouve que Z_o est dans la sous-algèbre complexe engendrée par une sous-algèbre abélienne de dimension maximale de $\mathfrak{g}'$. Ceci entraîne que Z_o est semi-simple. Soit maintenant ζ le projecteur de $\mathfrak{g}$ sur la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par les X_α avec $\alpha > 0$ qui a pour noyau la sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{h}$ et les X_α avec $\alpha < 0$. On vérifie facilement que ζ applique injectivement le noyau de $ad(Z_o)$ dans le noyau de $ad(E_o)$, lequel est de dimension ℓ d'après ce qui précède. Ceci prouve que le noyau de $ad(Z_o)$ est de dimension ℓ et par suite que Z_o est régulier.

Soit $\mathfrak{h}'$ la sous-algèbre de Cartan noyau de $ad(Z_o)$. Puisque $[X_o , E_o] = E_o$ et $[X_o , X_{-\psi}] = - qX_{-\psi}$, on a :

$$P_o Z_o = \exp(\frac{2\pi i}{q+1} X_o)\, Z_o = Z_o \quad .$$

Par conséquent, $\mathfrak{h}'$ <u>est stable par</u> P_o .

LEMME 2. - <u>Soient</u> $k_1 \leq k_2 \dots \leq k_\ell$ <u>les entiers</u> > 0 <u>tels que les sous-modules simples d'une décomposition de</u> $\mathfrak{g}$ <u>considéré comme</u> $\mathfrak{a}_o$<u>-module aient pour dimensions les entiers</u> $2k_i + 1$. <u>Les valeurs propres de la restriction de</u> P_o <u>à</u> $\mathfrak{h}'$ <u>sont les nombres</u> ν^{k_i} <u>où</u> $\nu = \exp(\frac{2\pi i}{q+1})$. <u>On a</u> $k_{\ell-1} < k_\ell = q$.

En effet, le projecteur ζ commute avec $ad(X_o)$ et applique isomorphiquement $\mathfrak{h}'$ sur le noyau de $ad(E_o)$. On a vu que sur ce noyau les valeurs propres de $ad(X_o)$ sont les entiers k_i . Comme ψ est la seule racine α telle que (X_o , α) ait la valeur maximum q , on a $k_{\ell-1} < k_\ell = q$.

THÉORÈME 2 (dualité). - <u>On a</u> $k_i + k_{\ell-i} = q + 1$ <u>pour</u> $i = 1 , 2 , \dots , \ell$.

En effet, P_o conserve le sous-espace réel $\mathfrak{h}'^o$ engendré par les racines de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}'$. Si ν^p est une valeur propre de P_o dans $\mathfrak{h}'$ ayant la multiplicité s, alors $\bar{\nu}^p = \nu^{q+1-p}$ est une valeur propre de P_o dans $\mathfrak{h}'$ ayant la même multiplicité s. Comme $0 < k_1 \leq k_2 \dots k_\ell \leq q$, ceci démontre le théorème.

THÉORÈME 3. - Si r est le nombre des racines positives, alors $2r = (q+1)\ell$.

Soit n_k le nombre des $\mathfrak{a}_o$-modules simples de dimension $2k+1$ figurant dans une décomposition du $\mathfrak{a}_o$-module $\mathfrak{g}$. On a $n_k = 0$ pour $k < 1$ et $k > q$, donc $\ell = n_1 + n_2 + \dots n_q$. Du théorème de dualité résulte de plus que $n_k = n_{q+1-k}$. Soit s_k la multiplicité de l'entier k comme valeur propre de $\mathrm{ad}(X_o)$. On a $s_k = s_{-k}$ et $s_k = 0$ pour $|k| > q$. Par conséquent,

$$\dim \mathfrak{g} = s_{-q} + s_{-q+1} + \dots s_q = \ell + 2(s_1 + s_2 + \dots s_q) .$$

D'après les remarques du début de ce paragraphe, on a

$$s_k = n_k + n_{k+1} + \dots n_q$$

ce qui, avec la dualité, peut s'écrire

$$s_k = n_1 + n_2 + \dots + n_{q+1-k} .$$

On a donc :

$$(*) \qquad s_k + s_{q+1-k} = \ell + n_k .$$

En sommant de $k = 1$ à $k = q$, on obtient $\dim \mathfrak{g} = \ell + (q+1)\ell$, ce qui démontre le théorème puisque $\dim \mathfrak{g} = 2r + \ell$.

COROLLAIRE 1. - L'ordre h des transformations de Coxeter-Killing des groupes de Weyl de G est égal à $q + 1$.

Cela résulte de la relation $2r = \frac{1}{2}\ell h$ (cf. paragraphe 1).

COROLLAIRE 2. - Soit P un élément de G ; pour que P soit un élément régulier principal, il faut et il suffit qu'il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ telle que la restriction de P à $\hat{\mathfrak{h}}^o$ soit une transformation de Coxeter-Killing de $\hat{\mathfrak{h}}$.

Cela résulte du corollaire 1 et du théorème 1.

5. Relations entre les valeurs propres d'une transformation de Coxeter-Killing et

les sous-algèbres principales de dimension 3 .

Soit P un élément régulier principal ; pour préciser le corollaire 2 du théorème 3, il reste à caractériser les sous-algèbres de Cartan $\hat{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ telles que la restriction de P à $\hat{\mathfrak{h}}^{o}$ soit une transformation de Coxeter-Killing de $\hat{\mathfrak{h}}$.

THÉORÈME 4. - Soit P un élément régulier principal de G et soit $\hat{\mathfrak{h}}$ une sous-algèbre de Cartan stable par P . Pour que la restriction de P à $\hat{\mathfrak{h}}^{o}$ soit une transformation de Coxeter-Killing de $\hat{\mathfrak{h}}$, il faut et il suffit que P admette dans $\hat{\mathfrak{h}}$ la valeur propre $\nu = \exp(\frac{2\pi i}{q+1})$.

La condition est nécessaire d'après le résultat de COLEMAN cité au début du paragraphe 2. La démonstration s'achève en établissant trois lemmes.

LEMME 3. - Pour $0 \leq k \leq q$, le noyau de $P_o - \nu^k I$ est de dimension $\ell + n_k$ (où n_k est le nombre des sous-modules simples de dimension $2k+1$ figurant dans une décomposition du $\mathfrak{a}_o$-module $\mathfrak{g}$).

En effet, le noyau de $P_o - \nu^k I$ est somme du noyau de $\mathrm{ad}(X_o) - kI$ et du noyau de $\mathrm{ad}(X_o) - (q+1-k) I$. Sa dimension est donc

$$(*) \qquad s_k + s_{q+1-k} = \ell + n_k \quad .$$

LEMME 4. - Si L est le noyau de $P_o - \nu I$, tout élément régulier de L est de la forme cAZ_o avec $c \neq 0$ èt $A \in H$.

Puisque $k_{\ell-1} \leq k_\ell$ (lemme 2), le théorème de dualité montre que $k_1 < k_2$, autrement dit $\mathfrak{a}_o$ est le seul sous-module simple de dimension 3 du $\mathfrak{a}_o$-module $\mathfrak{g}$. On a donc $n_1 = 1$ et $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_\ell}, X_{-\psi}$ est une base de L . Si

$$Y = \sum b_i X_{\alpha_i} + b_{\ell+1} X_{-\psi}$$

est un élément de L et si l'un des coefficients b_j est nul, alors $\mathrm{ad}(Y)$ est nilpotent, car, en changeant au besoin l'ordre lexicographique, Y est combinaison linéaire de vecteurs X_{β_i} $(i = 1, 2, \dots, \ell)$ où les β_i sont des racines positives. Si Y est régulier, tous les coefficients b_j sont donc $\neq 0$ et cela permet de déterminer un scalaire $c \neq 0$ et un élément $A \in H$ tels que $Y = cAZ_o$.

LEMME 5. - Soient P_1 et P_2 deux éléments réguliers principaux et $\hat{\mathfrak{h}}$ une sous-algèbre de Cartan stable par P_1 et P_2 . Si $\nu = \exp(\frac{2\pi i}{q+1})$ est valeur propre de P_1 et de P_2 dans $\hat{\mathfrak{h}}$, alors P_1 et P_2 sont conjugués dans le sous-groupe $N(\hat{\mathfrak{h}})$.

Il suffit de démontrer le lemme dans le cas $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}'$ et $P_2 = P_o$. Soit $\mathfrak{h}_1$ la sous-algèbre de Cartan des éléments de $\mathfrak{g}$ invariants par P_1 et soit S un élément de G tel que $SP_1 S^{-1} = P_o$. On a $S\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$, et $S\mathfrak{h}'$ contient un élément régulier Y tel que $P_o Y = \nu Y$. D'après le lemme 4, il existe donc une constante $c \neq 0$ et un élément $A \in H$ tels que $Y = cAZ_o$. Par conséquent $A\mathfrak{h}' = S\mathfrak{h}'$, donc $S^{-1} A \in N(\mathfrak{h}')$ et

$$P_1 = S^{-1} P_o S = S^{-1} AP_o A^{-1} S$$

est conjugué de P_o dans $N(\mathfrak{h}')$.

Le théorème 4 montre que les valeurs propres des transformations de Coxeter-Killing sont les valeurs propres de la restriction de P_o à $\mathfrak{h}'$ données par le lemme 2, c'est-à-dire les ν^{k_i}. Compte tenu des résultats sur les invariants du groupe de Weyl indiqués au paragraphe 1, on a donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 5. - Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple et $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre principale de dimension 3 de $\mathfrak{g}$. Les dimensions des sous-modules simples d'une décomposition du $\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{g}$ sont des entiers impairs $2k_i + 1$ $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$. L'algèbre des invariants symétriques d'un groupe de Weyl de G est engendrée par des polynômes de degrés $k_i + 1$ algébriquement indépendants.

Enfin, compte tenu des relations entre les invariants symétriques des groupes de Weyl et la cohomologie réelle de G (cf. [1]), le résultat précédent s'énonce encore comme suit : l'algèbre de cohomologie réelle de G est engendrée par ℓ éléments dont les degrés sont les dimensions $2k_i + 1$ des sous-modules simples d'une décomposition de $\mathfrak{g}$ considéré comme module sur une sous-algèbre principale de dimension 3 (résultat dû à A. SHAPIRO).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - The Betti numbers of the exceptional simple Lie groups, Proc. intern. Congr. Math. [1950. Cambridge], vol. 2, p. 21-24. - Providence, Amer. math. Soc., 1952.

[2] COLEMAN (A. J.). - The Betti numbers of the simple Lie groups, Canadian J. Math., t. 10, 1958, p. 349-356.

[3] COXETER (H. S. M.). - The product of the generators of a finite group generated by reflexions, Duke math. J., t. 18, 1951, p. 765-782.

[4] KOSTANT (B.). - The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group (à paraître).

[5] STEINBERG (R.). - Finite reflexion groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 91, 1959, p. 493-504.